NONA EDIÇÃO

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

William E. Boyce
Professor Emérito da cátedra Edward P. Hamilton

Richard C. DiPrima
Anteriormente Professor da cátedra Eliza Ricketts Foundation do Departamento de Ciências Matemáticas do Rensselaer Polytechnic Institute

Tradução e Revisão Técnica

Valéria de Magalhães Iório
Fundação Educacional Serra dos Órgãos, Teresópolis

gen | LTC

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS, NINTH EDITION
Copyright © 2009 John Wiley & Sons, Inc.
All Rights Reserved. This translation is published under license.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2010 by
LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da Editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040
Tel.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.ltceditora.com.br

Capa: Olga Loureiro

Editoração Eletrônica: Ganthares

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

B784e

Boyce, William E., 1930-
Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno / William E. Boyce, Richard C. DiPrima ; tradução e revisão Valéria de Magalhães Iório. - Rio de Janeiro : LTC, 2010.

Tradução de: Elementary differential equations and boundary value problems, 9th ed
Apêndices
Inclui exercícios e respectivas respostas
Inclui índice
ISBN 978-5-216-1756-3

1. Equações diferenciais. 2. Problemas de valores de contorno. I. DiPrima, Richard C. II. Título.

10-1666. CDD: 515.35
CDU: 517.9

SUMÁRIO

Capítulo 1 Introdução 1

1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção **1**
1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais **8**
1.3 Classificação de Equações Diferenciais **15**
1.4 Notas Históricas **20**

Capítulo 2 Equações Diferenciais de Primeira Ordem 23

2.1 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes **23**
2.2 Equações Separáveis **31**
2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem **38**
2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares **52**
2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional **60**
2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes **72**
2.7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler **77**
2.8 O Teorema de Existência e Unicidade **85**
2.9 Equações de Diferenças de Primeira Ordem **93**

Capítulo 3 Equações Lineares de Segunda Ordem 105

3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes **105**
3.2 Soluções de Equações Lineares Homogêneas; o Wronskiano **111**
3.3 Raízes Complexas da Equação Característica **121**
3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem **127**
3.5 Equações Não Homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados **134**
3.6 Variação dos Parâmetros **143**
3.7 Vibrações Mecânicas e Elétricas **148**
3.8 Vibrações Forçadas **160**

Capítulo 4 Equações Lineares de Ordem Mais Alta 171

4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem n **171**
4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes **176**
4.3 O Método dos Coeficientes Indeterminados **183**
4.4 O Método de Variação dos Parâmetros **186**

Capítulo 5 Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem 191

5.1 Revisão de Séries de Potências **191**
5.2 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte I **196**
5.3 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte II **204**
5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares **209**
5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I **217**
5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II **222**
5.7 Equação de Bessel **228**

Capítulo 6 A Transformada de Laplace 239

6.1 Definição da Transformada de Laplace **239**
6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais **245**
6.3 Funções Degrau **253**
6.4 Equações Diferenciais sob a Ação de Funções Descontínuas **259**
6.5 Funções de Impulso **265**
6.6 A Convolução **270**

Capítulo 7 Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem 277

7.1 Introdução **277**
7.2 Revisão de Matrizes **283**
7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear, Autovalores, Autovetores **291**
7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem **299**
7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes **303**
7.6 Autovalores Complexos **312**
7.7 Matrizes Fundamentais **322**
7.8 Autovalores Repetidos **328**
7.9 Sistemas Lineares Não Homogêneos **336**

Capítulo 8 Métodos Numéricos 345

8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente **345**
8.2 Aprimoramentos no Método de Euler **353**
8.3 O Método de Runge-Kutta **358**
8.4 Métodos de Passos Múltiplos **361**
8.5 Mais sobre Erros; Estabilidade **366**
8.6 Sistemas de Equações de Primeira Ordem **373**

Capítulo 9 Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade 377

9.1 O Plano de Fase: Sistemas Lineares **377**
9.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade **386**
9.3 Sistemas Localmente Lineares **393**
9.4 Espécies em Competição **403**
9.5 Equações Predador-Presa **413**
9.6 O Segundo Método de Liapunov **420**
9.7 Soluções Periódicas e Círculos Limites **428**
9.8 Caos e Atratores Estranhos: as Equações de Lorenz **438**

Capítulo 10 Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier 447

10.1 Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos **447**
10.2 Séries de Fourier **452**
10.3 O Teorema de Convergência de Fourier **460**
10.4 Funções Pares e Ímpares **466**
10.5 Separação de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra **472**
10.6 Outros Problemas de Condução de Calor **478**
10.7 A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica **486**
10.8 A Equação de Laplace **497**
Apêndice A Dedução da Equação de Calor **505**
Apêndice B Dedução da Equação de Onda **508**

Capítulo 11 Problemas de Valores de Contorno e Teoria de Sturm-Liouville 511

11.1 A Ocorrência de Problema de Valores de Contorno em Fronteiras com Dois Pontos **511**
11.2 Problemas de Valores de Contorno de Sturm-Liouville **517**
11.3 Problemas de Valores de Contorno Não Homogêneos **527**
11.4 Problemas de Sturm-Liouville Singulares **538**
11.5 Observações Adicionais sobre o Método de Separação de Variáveis: uma Expansão em Funções de Bessel **543**
11.6 Séries de Funções Ortogonais: Convergência na Média **548**

Respostas dos Problemas **555**

Índice **605**

CAPÍTULO

1

Introdução

Neste capítulo vamos dar perspectiva ao nosso estudo de equações diferenciais de diversas maneiras diferentes. Primeiro, vamos usar dois problemas para ilustrar algumas das ideias básicas a que retornaremos com frequência e que serão aprofundadas ao longo deste livro. Indicamos, mais adiante, diversos modos de classificar equações, com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para o livro. Finalmente, fazemos um esboço das tendências principais no desenvolvimento histórico desse campo e mencionamos alguns dos matemáticos ilustres que contribuíram para o assunto. O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante os três últimos séculos. Apesar disso, continua sendo uma área de pesquisa dinâmica hoje em dia, com muitas questões interessantes em aberto.

1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção

Antes de começar um estudo sério de equações diferenciais (lendo este livro ou partes substanciais dele, por exemplo), você deve ter alguma ideia dos benefícios que isso pode lhe trazer. Para alguns estudantes o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas para a maioria as possíveis aplicações importantes em outros campos é que fazem com que tal estudo valha a pena.

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são **equações diferenciais**. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e a detecção de ondas sísmicas ou o aumento ou a diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de **modelo matemático** do processo, e muitos desses modelos são discutidos ao longo do texto. Começamos esta seção com dois modelos que nos levam a equações fáceis de resolver. Vale a pena observar que mesmo as equações diferenciais mais simples fornecem modelos úteis de processos físicos importantes.

EXEMPLO 1 Um Objeto em Queda

Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Formule uma equação diferencial que descreva o movimento.

Começamos usando letras para representar as diversas quantidades de interesse nesse problema. O movimento ocorre durante um determinado intervalo de tempo, logo vamos usar t para denotar o tempo. Além disso, vamos usar v para representar a velocidade do objeto em queda. A velocidade deve variar com o tempo, de modo que vamos considerar v como uma função de t; em outras palavras, t é a variável independente e v é a variável dependente. A escolha de unidades de medida é um tanto arbitrária, e não há nada no enunciado do problema que sugira unidades apropriadas, de modo que estamos livres para escolher unidades que nos pareçam razoáveis. Especificamente, vamos medir o tempo t em segundos (s) e a velocidade v em metros por segundo (m/s). Além disso, vamos supor que a velocidade v é positiva quando o sentido do movimento é para baixo, isto é, quando o objeto está caindo.

A lei física que governa o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à força total atuando sobre o objeto. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação

$$F = ma, \tag{1}$$

onde m é a massa do objeto, a sua aceleração e F a força total agindo sobre o objeto. Para manter nossas unidades consistentes, mediremos m em quilogramas (kg), a em metros por segundo ao quadrado (m/s²) e F em newtons (N). É claro que a e v estão relacionadas por $a = dv/dt$, de modo que podemos reescrever a Eq. (1) na forma

$$F = m(dv/dt). \tag{2}$$

A seguir, considere as forças que agem no objeto em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde g é a aceleração devida à gravidade. Nas unidades de medida que escolhemos, g foi determinada experimentalmente como aproximadamente igual a 9,8 m/s² próximo à superfície da Terra. Existe, também, uma força devida à resistência do ar que é mais difícil de modelar. Este não é o local para uma discussão aprofundada da força de resistência do ar; basta dizer que se supõe, muitas vezes, que a resistência do ar é proporcional à velocidade, e faremos essa hipótese aqui. Dessa forma, a força de resistência do ar tem magnitude (ou módulo) γv, onde γ é uma constante chamada de coeficiente da resistência do ar. O valor numérico do coeficiente de resistência do ar varia muito de um objeto para outro; objetos com superfície lisa e formato aerodinâmico têm coeficiente de resistência do ar muito menor do que objetos com superfície rugosa e formato não aerodinâmico. O coeficiente γ corresponde à massa por unidade de tempo, ou seja, kg/s neste problema; se essas unidades parecem estranhas, lembre que γv tem que ter unidades de força, ou seja, kg·m/s².

Ao escrever uma expressão para a força total F, precisamos lembrar que a gravidade sempre age para baixo (no sentido positivo), enquanto a resistência do ar age para cima (no sentido negativo), como ilustrado na Fig. 1.1.1. Logo,

$$F = mg - \gamma v \tag{3}$$

e a Eq. (2) torna-se

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \tag{4}$$

A Eq. (4) é um modelo matemático de um objeto caindo na atmosfera, próximo do nível do mar. Note que o modelo contém as três constantes m, g e γ. As constantes m e γ dependem bastante do objeto particular que está caindo, e serão diferentes, em geral, para objetos diferentes. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado, o valor de g é o mesmo para todos os objetos.

FIGURA 1.1.1 Diagrama de forças agindo sobre um objeto em queda livre.

Para resolver a Eq. (4) precisamos encontrar uma função $v = v(t)$ que satisfaça a equação. Isso não é difícil de fazer, e vamos mostrar como na próxima seção. Agora, no entanto, vamos ver o que podemos descobrir sobre soluções sem encontrar, de fato, qualquer uma delas. Nossa tarefa pode ser ligeiramente simplificada se atribuirmos valores numéricos para m e γ, mas o procedimento é o mesmo, independentemente dos valores escolhidos. Vamos supor que $m = 10$ kg e $\gamma = 2$ kg/s. Então, a Eq. (4) pode ser escrita como

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}. \tag{5}$$

EXEMPLO 2 Um Objeto em Queda (continuação)

Investigue o comportamento das soluções da Eq. (5) sem resolver a equação diferencial.

Vamos proceder analisando a Eq. (5) de um ponto de vista geométrico. Suponha que a velocidade v tem um determinado valor. Então, calculando a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) encontramos o valor correspondente de dv/dt. Por exemplo, se $v = 40$, então $dv/dt = 1{,}8$. Isso significa que a inclinação† de

† Isso é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. (N.T.)

uma solução $v = v(t)$ tem valor 1,8 em qualquer ponto onde $v = 40$. Podemos apresentar essa informação graficamente no plano tv desenhando pequenos segmentos de reta com coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta $v = 40$. Analogamente, se $v = 50$, então $dv/dt = -0{,}2$, logo desenhamos segmentos de reta com coeficiente angular $-0{,}2$ em diversos pontos ao longo da reta $v = 50$. Procedendo da mesma maneira com outros valores de v obtemos a Fig. 1.1.2, que é um exemplo do que é chamado de um **campo de direções**.

Lembre-se de que uma solução da Eq. (5) é uma função $v = v(t)$ cujo gráfico é uma curva no plano tv. A importância da Fig. 1.1.2 é que cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma dessas curvas solução. Assim, mesmo não tendo encontrado qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura, podemos fazer deduções qualitativas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se v for menor do que certo valor crítico então todos os segmentos de reta têm coeficientes angulares positivos e a velocidade do objeto em queda aumenta enquanto ele cai. Por outro lado, se v for maior do que o valor crítico então os segmentos de reta têm coeficientes angulares negativos e o objeto em queda vai diminuindo a velocidade à medida que cai. Qual é esse valor crítico de v que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Referindo-nos, novamente, à Eq. (5), perguntamos quais os valores de v que farão com que dv/dt seja zero. A resposta é $v = (5)(9{,}8) = 49$ m/s.

De fato, a função constante $v = 49$ é uma solução da Eq. (5). Para verificar essa afirmação, substitua $v(t) = 49$ na Eq. (5) e note que as expressões dos dois lados do sinal de igualdade são iguais a zero. Como essa solução não varia com o tempo, $v(t) = 49$ é chamada de **solução de equilíbrio**. Essa é a solução que corresponde a um equilíbrio perfeito entre a gravidade e a resistência do ar. Mostramos, na Fig. 1.1.3, a solução de equilíbrio superposta no campo de direções. Dessa figura podemos chegar a outra conclusão, a saber, que todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando t aumenta.

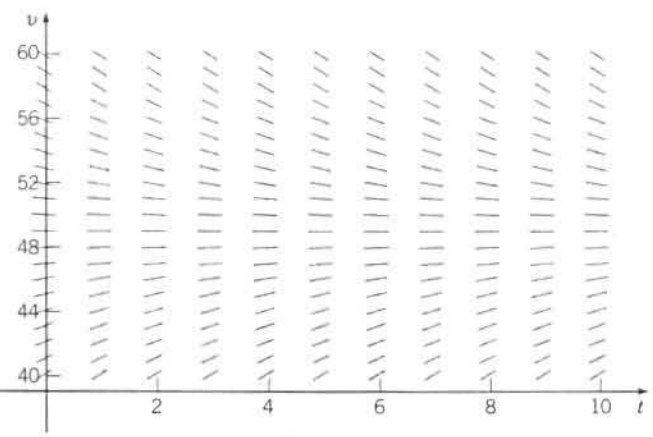


FIGURA 1.1.2 Um campo de direções para a Eq. (5).

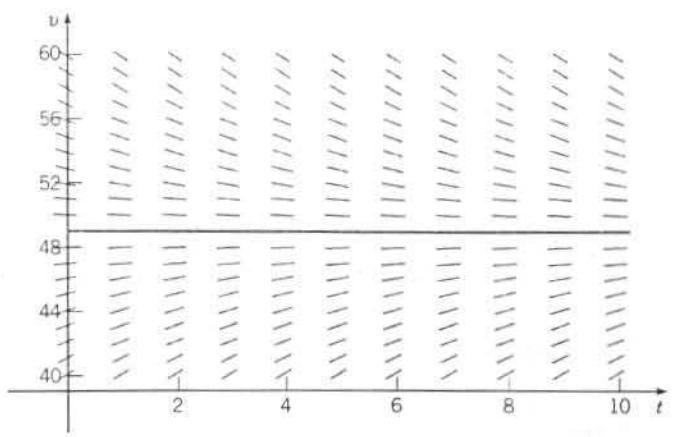


FIGURA 1.1.3 Campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (5).

A abordagem ilustrada no Exemplo 2 pode ser igualmente aplicada à Eq. (4), mais geral, onde os parâmetros m e γ são números positivos não especificados. Os resultados são essencialmente idênticos aos do Exemplo 2. A solução de equilíbrio da Eq. (4) é $v(t) = mg/\gamma$. Soluções abaixo da solução de equilíbrio aumentam de velocidade com o tempo, soluções acima diminuem de velocidade e todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio quando t fica muito grande.

Campos de direções. Campos de direções são ferramentas valiosas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{6}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis, t e y, algumas vezes chamada de **função taxa**. Um campo de direções para equações da forma geral (6) pode ser construído calculando-se f em cada ponto de uma malha retangular. Em cada ponto da malha desenha-se um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função f naquele ponto. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa ideia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Basta, em geral, uma malha contendo algumas centenas de pontos. A construção de um campo de direções é muitas vezes um primeiro passo bastante útil na investigação de uma equação diferencial.

Vale a pena fazer duas observações. A primeira é que para construir um campo de direções não precisamos resolver a Eq. (6), apenas calcular a função dada $f(t, y)$ muitas vezes. Dessa forma, campos de direção podem ser construídos com facilidade mesmo para equações muito difíceis de resolver. A segunda é que fazer cálculos repetidos de uma função dada é uma tarefa para a qual um computador é particularmente apropriado, e você deve em geral usar um computador para desenhar um campo de direções. Todos os campos de direção mostrados neste livro, como o da Fig. 1.1.2, foram gerados em um computador.

Ratos do Campo e Corujas. Vamos ver, agora, um exemplo bem diferente. Considere uma população de ratos do campo que habitam certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população atual. Essa hipótese é uma lei física que não está muito bem estabelecida (ao contrário da lei de Newton para o movimento no Exemplo 1), mas é uma hipótese inicial usual[1] em um estudo de crescimento populacional. Se denotarmos o tempo por t e a população de ratos por $p(t)$, então a hipótese sobre o crescimento populacional pode ser expressa pela equação

$$\frac{dp}{dt} = rp, \tag{7}$$

onde o fator de proporcionalidade r é chamado de **taxa constante** ou **taxa de crescimento**. Especificamente, suponhamos que o tempo é medido em meses e que a taxa r tem o valor de 0,5 por mês. Então, cada uma das expressões na Eq. (7) tem unidades de ratos por mês.

Vamos aumentar o problema supondo que diversas corujas moram na mesma vizinhança e que elas matam 15 ratos do campo por dia. Para incorporar essa informação ao modelo precisamos acrescentar outro termo à equação diferencial (7), de modo que ela se transforma em

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450. \tag{8}$$

Observe que o termo correspondente à ação do predador é –450 em vez de –15, já que o tempo está sendo medido em meses e o que precisamos é a taxa predatória mensal.

EXEMPLO 3

Investigue graficamente as soluções da Eq. (8).

A Figura 1.1.4 mostra um campo de direções para a Eq. (8). Pode-se observar da figura, ou mesmo diretamente da Eq. (8), que para valores suficientemente grandes de p, dp/dt é positivo, de modo que a solução cresce. Por outro lado, se p é pequeno, dp/dt é negativo e a solução diminui. Novamente, o valor crítico de p que separa as soluções que crescem das que decrescem é o valor de p para o qual dp/dt é igual a zero. Fazendo dp/dt igual a zero na Eq. (8) e resolvendo depois para p encontramos a solução de equilíbrio $p(t) = 900$, para a qual os termos para o crescimento e para a ação predatória na Eq. (8) estão perfeitamente equilibrados. A solução de equilíbrio também está ilustrada na Figura 1.1.4.

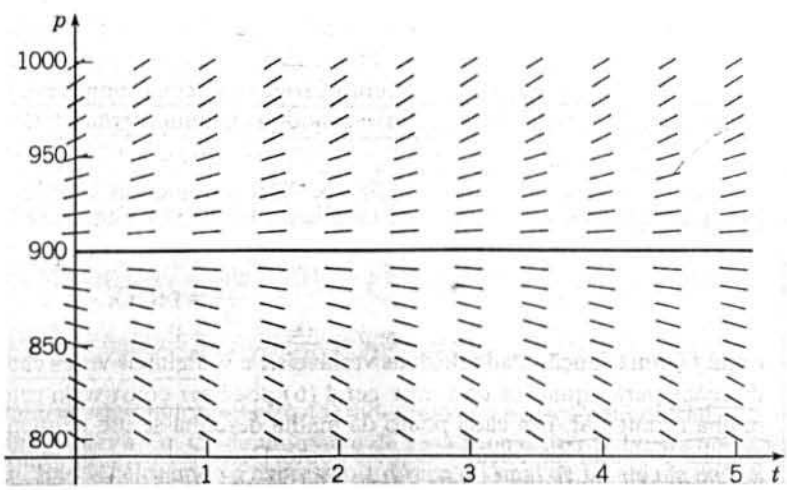


FIGURA 1.1.4 Um campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (8).

[1]Um modelo de crescimento populacional melhor é discutido na Seção 2.5.

Comparando os Exemplos 2 e 3, vemos que em ambos os casos a solução de equilíbrio separa as soluções crescentes das decrescentes. No Exemplo 2 as outras soluções convergem para a solução de equilíbrio ou são atraídas para ela, de modo que depois de o objeto cair por um tempo suficiente um observador o verá movendo-se perto da velocidade de equilíbrio. Por outro lado, no Exemplo 3 as outras soluções divergem da solução de equilíbrio, ou são repelidas por ela. As soluções se comportam de maneiras bem diferentes dependendo se começam acima ou abaixo da solução de equilíbrio. À medida que o tempo passa um observador pode ver populações muito maiores ou muito menores do que a população de equilíbrio, mas a solução de equilíbrio propriamente dita nunca será observada na prática. Em ambos os problemas, no entanto, a solução de equilíbrio é muito importante para a compreensão do comportamento das soluções da equação diferencial dada.

Uma versão mais geral da Eq. (8) é

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, \tag{9}$$

onde a taxa de crescimento r e a taxa predatória k não estão especificadas. As soluções dessa equação mais geral são muito semelhantes às soluções da Eq. (8). A solução de equilíbrio da Eq. (9) é $p(t) = k/r$. As soluções acima da solução de equilíbrio crescem, enquanto as que estão abaixo decrescem.

Você deve ter em mente que ambos os modelos discutidos nesta seção têm suas limitações. O modelo (5) do objeto em queda só é válido enquanto o objeto está em queda livre, sem encontrar obstáculos. O modelo populacional (8) prevê a existência, após um longo tempo, de um número negativo (se $p < 900$) ou de um número imenso (se $p > 900$) de ratos. Essas previsões não são realistas, de modo que esse modelo torna-se inaceitável após um período de tempo razoavelmente curto.

A Construção de Modelos Matemáticos. Para se usar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis é preciso, primeiro, formular a equação diferencial apropriada que descreve, ou modela, o problema em questão. Consideramos, nesta seção, dois exemplos desse processo de modelagem, um vindo da física e outro da ecologia. Ao construir modelos matemáticos futuros você deve reconhecer que cada problema é diferente e que a arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras. De fato, a construção de um modelo satisfatório é algumas vezes a parte mais difícil de um problema. Apesar disso, pode ser útil listar alguns passos que fazem muitas vezes parte do processo:

1. Identifique as variáveis independente e dependente, e atribua letras para representá-las. Muitas vezes a variável independente é o tempo.
2. Escolha as unidades de medida de cada variável. Essa escolha é, de certa forma, arbitrária, mas algumas escolhas podem ser mais convenientes do que outras. Por exemplo, escolhemos medir o tempo em segundos no caso de um objeto em queda e em meses no problema populacional.
3. Use o princípio básico subjacente, ou a lei que rege o problema em investigação. Isso pode ser uma lei física amplamente reconhecida, como a lei do movimento de Newton, ou pode ser uma hipótese um tanto especulativa baseada na sua própria experiência ou em observações. De qualquer modo, é provável que essa etapa não seja uma etapa puramente matemática, mas uma em que será necessário ter familiaridade com o campo de aplicação onde o problema se originou.
4. Expresse o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1. Isso pode ser mais fácil falar do que fazer. Pode exigir constantes físicas ou parâmetros (como o coeficiente da resistência do ar no Exemplo 1) e a determinação de valores apropriados para eles. Ou pode envolver o uso de variáveis auxiliares, ou intermediárias, que têm que estar relacionadas com as variáveis primárias.
5. Certifique-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas. Se isso não acontecer sua equação está errada e você deve tentar consertá-la. Se as unidades são as mesmas, então sua equação está pelo menos consistente do ponto de vista dimensional, embora possa conter outros erros que esse teste não revela.
6. Nos problemas considerados aqui o resultado do passo 4 é uma única equação diferencial, que constitui o modelo matemático desejado. Lembre-se, no entanto, de que em problemas mais complexos o modelo matemático resultante pode ser muito mais complicado, podendo envolver, por exemplo, um sistema com várias equações diferenciais.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$
2. $y' = 2y - 3$
3. $y' = 3 + 2y$
4. $y' = -1 - 2y$
5. $y' = 1 + 2y$
6. $y' = y + 2$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10 escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$.

7. Todas as soluções tendem a $y = 3$.
8. Todas as soluções tendem a $y = 2/3$.
9. Todas as outras soluções se afastam de $y = 2$.
10. Todas as outras soluções se afastam de $y = 1/3$.

Em cada um dos Problemas de 11 a 14 desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que nesses problemas as equações não são da forma $y' = ay + b$ e o comportamento de suas soluções é um pouco mais complicado do que o das soluções das equações no texto.

11. $y' = y(4 - y)$
12. $y' = -y(5 - y)$
13. $y' = y^2$
14. $y' = y(y - 2)^2$

Considere a seguinte lista de equações diferenciais, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas Figuras de 1.1.5 até 1.1.10. Em cada um dos Problemas de 15 a 20 identifique a equação diferencial que corresponde ao campo de direções dado.

(a) $y' = 2y - 1$
(b) $y' = 2 + y$
(c) $y' = y - 2$
(d) $y' = y(y + 3)$
(e) $y' = y(y - 3)$
(f) $y' = 1 + 2y$
(g) $y' = -2 - y$
(h) $y' = y(3 - y)$
(i) $y' = 1 - 2y$
(j) $y' = 2 - y$

15. O campo de direções na Figura 1.1.5.
16. O campo de direções na Figura 1.1.6.
17. O campo de direções na Figura 1.1.7.
18. O campo de direções na Figura 1.1.8.
19. O campo de direções na Figura 1.1.9.
20. O campo de direções na Figura 1.1.10.

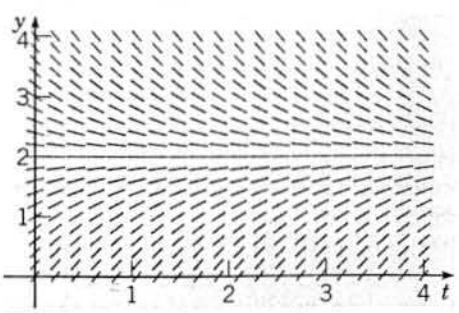


FIGURA 1.1.5 Campo de direções para o Problema 15.

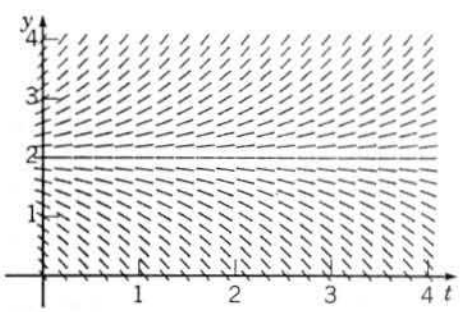


FIGURA 1.1.6 Campo de direções para o Problema 16.

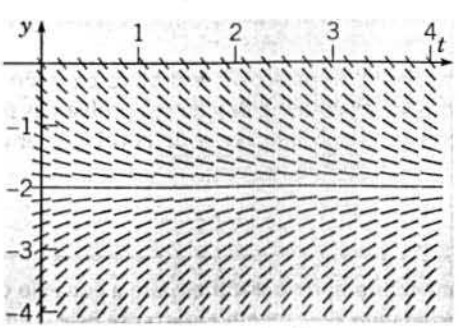


FIGURA 1.1.7 Campo de direções para o Problema 17.

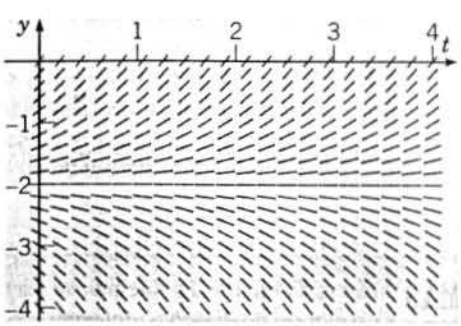


FIGURA 1.1.8 Campo de direções para o Problema 18.

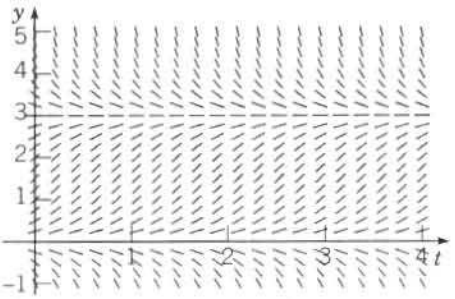


FIGURA 1.1.9 Campo de direções para o Problema 19.

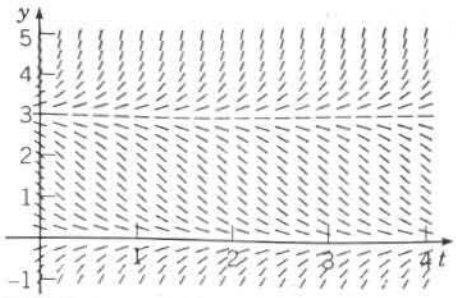


FIGURA 1.1.10 Campo de direções para o Problema 20.

21. Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.000 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente no lago.
    (a) Escreva uma equação diferencial cuja solução é a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.
    (b) Qual a quantidade do produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo? Essa quantidade-limite depende da quantidade presente inicialmente?
22. Uma gota esférica de chuva evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.
23. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a de seu meio ambiente (na maioria dos casos, a temperatura do ar ambiente). Suponha que a temperatura ambiente seja de 70°F (cerca de 21°C) e a taxa de 0,05 $(\text{min})^{-1}$. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante de tempo. Note que a equação diferencial é a mesma, independentemente de a temperatura do objeto estar acima ou abaixo da temperatura ambiente.
24. Um determinado remédio está sendo injetado na veia de um paciente de hospital. O líquido, contendo 5 mg/cm^3 do remédio, entra na corrente sanguínea do paciente a uma taxa de 100 cm^3/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo, ou deixa a corrente sanguínea de outro modo, a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4 $(\text{h})^{-1}$.
    (a) Supondo que o remédio está sempre sendo distribuído uniformemente na corrente sanguínea, escreva uma equação diferencial para a quantidade de remédio presente na corrente sanguínea em qualquer instante de tempo.
    (b) Quanto do remédio continua presente na corrente sanguínea após muito tempo?
25. Para objetos pequenos caindo devagar, a hipótese feita no texto sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores caindo mais rapidamente, uma hipótese mais precisa é de que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.[2]
    (a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m supondo que a resistência do ar é proporcional à velocidade.
    (b) Determine a velocidade limite após um longo período de tempo.
    (c) Se $m = 10$ kg, encontre o coeficiente da resistência do ar de modo que a velocidade limite seja 49 m/s.
    (d) Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o com a Figura 1.1.3.

Em cada um dos Problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade nessas equações depende de t, além de y; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as do texto.

26. $y' = -2 + t - y$
27. $y' = te^{-2t} - 2y$
28. $y' = e^{-t} + y$
29. $y' = t + 2y$
30. $y' = 3 \operatorname{sen} t + 1 + y$
31. $y' = 2t - 1 - y^2$
32. $y' = -(2t + y)/2y$
33. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

[2]Veja Lyle N. Long e Howard Weiss, "The Velocity Dependence of Aerodynamics Drag: A Primer for Mathematicians", *Amer. Math. Monthly 106* (1999), 2, pp.127-135

1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Na seção anterior deduzimos as equações diferenciais

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{1}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = rp - k. \tag{2}$$

A Eq. (1) modela um objeto em queda, e a Eq. (2) uma população de ratos do campo caçados por corujas. Ambas são da forma geral

$$\frac{dy}{dt} = ay - b, \tag{3}$$

onde a e b são constantes dadas. Fomos capazes de descobrir algumas propriedades qualitativas importantes sobre o comportamento de soluções das Eqs. (1) e (2) analisando o campo de direções associado. Para responder a perguntas de natureza quantitativa, no entanto, precisamos encontrar as soluções propriamente ditas. Vamos ver, agora, como fazer isso.

EXEMPLO 1 Ratos do Campo e Corujas (continuação)

Considere a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450, \tag{4}$$

que descreve a interação de determinadas populações de ratos do campo e corujas [veja a Eq. (8) da Seção 1.1]. Encontre as soluções dessa equação.

Para resolver a Eq. (4) precisamos encontrar funções $p(t)$ que, ao serem substituídas na equação, transformem-na em uma identidade óbvia. Um modo de proceder é o seguinte: primeiro, coloque a Eq. (4) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2}, \tag{5}$$

ou, se $p \neq 900$,

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Pela regra da cadeia, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (6) é a derivada de $\ln|p - 900|$ em relação a t, logo temos

$$\frac{d}{dt}\ln|p - 900| = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Então, integrando as expressões na Eq. (7) obtemos

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + C, \tag{8}$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. Portanto, aplicando a exponencial à Eq. (8) vemos que

$$|p - 900| = e^{(t/2)+C} = e^C e^{t/2}, \tag{9}$$

ou

$$p - 900 = \pm e^C e^{t/2}, \tag{10}$$

e, finalmente,

$$p = 900 + ce^{t/2}, \tag{11}$$

onde $c = \pm e^C$ é também uma constante (não nula) arbitrária. Note que a função constante $p = 900$ também é solução da Eq. (5) e está contida na Eq. (11) se permitirmos que c assuma o valor zero. A Figura 1.2.1 mostra gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

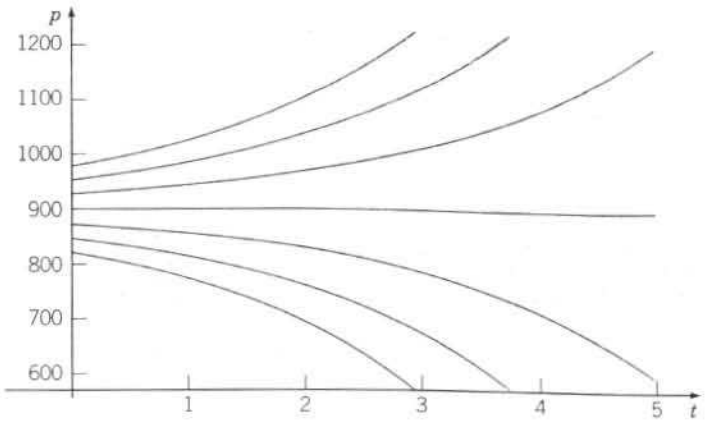


FIGURA 1.2.1 Gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

Note que o comportamento dessas soluções é do tipo inferido pelo campo de direções na Figura 1.1.4. Por exemplo, soluções em qualquer dos lados da solução de equilíbrio $p = 900$ tendem a se afastar dessa solução.

Encontramos, no Exemplo 1, uma infinidade de soluções da equação diferencial (4), correspondendo à infinidade de valores possíveis que a constante arbitrária c, na Eq. (11), pode assumir. Isso é típico do que acontece ao se resolver uma equação diferencial. O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos valores possíveis geram uma infinidade de soluções.

Com frequência queremos focalizar nossa atenção em um único elemento dessa família infinita de soluções, especificando o valor da constante arbitrária. Na maior parte das vezes isso é feito indiretamente, através de um ponto dado que tem que pertencer ao gráfico da solução. Por exemplo, para determinar a constante c na Eq. (11) poderíamos dar a quantidade de elementos na população em um determinado instante, tal como 850 elementos no instante $t = 0$. Em outras palavras, o gráfico da solução tem que conter o ponto $(0, 850)$. Simbolicamente, essa condição pode ser expressa como

$$p(0) = 850. \tag{12}$$

Substituindo, então, os valores $t = 0$ e $p = 850$ na Eq. (11), obtemos

$$850 = 900 + c.$$

Logo, $c = -50$ e, inserindo esse valor na Eq. (11), obtemos a solução desejada, a saber,

$$p = 900 - 50e^{t/2}. \tag{13}$$

A condição adicional (12) que usamos para determinar c é um exemplo de uma **condição inicial**. A equação diferencial (4) junto com a condição inicial (12) forma um **problema de valor inicial**.

Vamos considerar, agora, o problema mais geral que consiste na equação diferencial (3)

$$\frac{dy}{dt} = ay - b$$

e a condição inicial

$$y(0) = y_0, \tag{14}$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário. Podemos resolver esse problema pelo mesmo método que usamos no Exemplo 1. Se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, então podemos reescrever a Eq. (3) como

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = a. \tag{15}$$

Integrando essa equação, obtemos,

$$\ln|y - (b/a)| = at + C, \tag{16}$$

onde C é arbitrário. Aplicando a exponencial na Eq. (16) e resolvendo para y, vemos que

$$y = (b/a) + ce^{at}, \tag{17}$$

onde $c = \pm e^C$ também é arbitrário. Note que $c = 0$ corresponde à solução de equilíbrio $y = b/a$. Finalmente, a condição inicial (14) implica $c = y_0 - (b/a)$, de modo que a solução do problema de valor inicial (3), (14) é

$$y = (b/a) + [y_0 - (b/a)]e^{at}. \tag{18}$$

Para $a \neq 0$, a Eq. (17) contém todas as soluções possíveis da Eq. (3) e é chamada de **solução geral**.[3] A representação geométrica da solução geral (17) é uma família infinita de curvas, chamadas de **curvas integrais**. Cada curva integral está associada a um valor particular de c e é o grafo da solução correspondente àquele valor de c. Satisfazer uma condição inicial significa identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado.

Para relacionar a solução (18) à Eq. (2), que modela a população de ratos do campo, basta substituir a pela taxa de crescimento r e b pela taxa predatória k. A solução (18) fica, então,

$$p = (k/r) + [p_0 - (k/r)]e^{rt}, \tag{19}$$

onde p_0 é a população inicial de ratos do campo. A solução (19) confirma as conclusões obtidas baseadas no campo de direções e no Exemplo 1. Se $p_0 = k/r$, então, segue da Eq. (19) que $p = k/r$ para todo t; essa é a solução constante, ou de equilíbrio. Se $p_0 \neq k/r$, então o comportamento da solução depende do sinal do coeficiente $p_0 - (k/r)$ na exponencial na Eq. (19). Se $p_0 > k/r$, então p cresce exponencialmente com o tempo t; se $p_0 < k/r$, então p decresce e acaba se tornando nulo, o que corresponde à extinção dos ratos. Valores negativos de p, embora sejam possíveis na Eq. (19), não fazem sentido no contexto desse problema particular.

Para colocar a Eq. (1), que descreve a queda de um objeto, na forma (3), precisamos identificar a com $-\gamma/m$ e b com $-g$. Fazendo essas substituições na Eq. (18), obtemos

$$v = (mg/\gamma) + [v_0 - (mg/\gamma)]e^{-\gamma t/m}, \tag{20}$$

onde v_0 é a velocidade inicial. Mais uma vez, essa solução confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 baseados no campo de direções. Existe uma solução de equilíbrio, ou constante, $v = mg/\gamma$, e todas as outras soluções tendem a essa solução de equilíbrio. A velocidade da convergência para essa solução de equilíbrio é determinada pelo expoente $-\gamma/m$. Assim, para um objeto com massa m dada a velocidade se aproxima do valor de equilíbrio mais depressa à medida que o coeficiente da resistência do ar γ aumenta.

EXEMPLO 2 Um Objeto em Queda (continuação)

Vamos considerar, como no Exemplo 2 da Seção 1.1, um objeto em queda com massa $m = 10$ kg e coeficiente da resistência do ar $\gamma = 2$ kg/s. A equação de movimento (1) fica, então,

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}. \tag{21}$$

Suponha que esse objeto caia de uma altura de 300 m. Encontre sua velocidade em qualquer instante t. Quanto tempo vai levar para ele chegar no chão e quão rápido estará se movendo no instante do impacto?

O primeiro passo é enunciar uma condição inicial apropriada para a Eq. (21). A palavra "cai", no enunciado do problema, sugere que a velocidade inicial é zero, de modo que usaremos a condição inicial

$$v(0) = 0. \tag{22}$$

A solução da Eq. (21) pode ser encontrada substituindo-se os valores dos coeficientes na solução (20), mas em vez disso vamos resolver diretamente a Eq. (21). Primeiro, coloque a equação na forma

$$\frac{dv/dt}{v - 49} = -\frac{1}{5}. \tag{23}$$

Integrando, obtemos

$$\ln|v - 49| = -\frac{t}{5} + C, \tag{24}$$

e a solução geral da Eq. (21) é, então,

$$v = 49 + ce^{-t/5}, \tag{25}$$

onde c é arbitrário. Para determinar c colocamos os valores na condição inicial (22), $t = 0$ e $v = 0$, na Eq. (25), obtendo $c = -49$. Logo, a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

[3] Se $a = 0$, a solução da Eq. (3) não é dada pela Eq. (17). Deixamos a seu cargo encontrar a solução geral nesse caso.

$$v = 49(1 - e^{-t/5}). \tag{26}$$

A Eq. (26) dá a velocidade do objeto em queda em qualquer instante positivo (antes de atingir o chão, é claro).

A Figura 1.2.2 mostra gráficos da solução (25) para diversos valores de c, com a solução (26) destacada por uma linha mais grossa. É evidente que todas as soluções tendem à solução de equilíbrio $v = 49$. Isso confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 através da análise dos campos de direção nas Figuras 1.1.2 e 1.1.3.

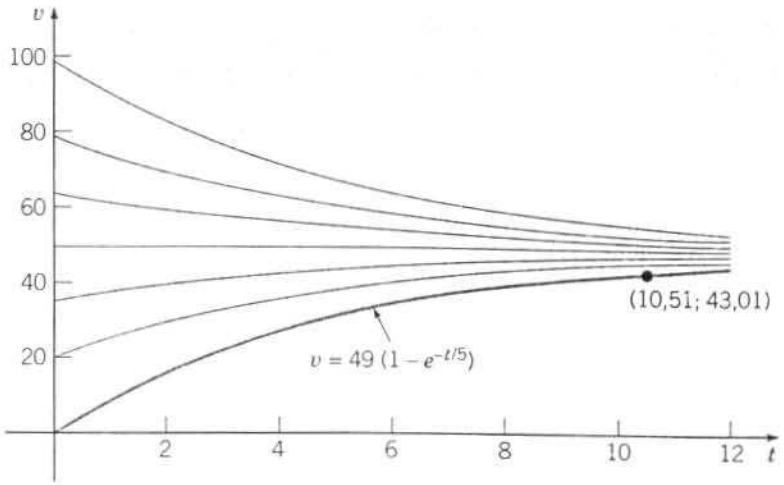


FIGURA 1.2.2 Gráficos da solução (25) para diversos valores de c.

Para encontrar a velocidade do objeto quando ele atinge o solo precisamos saber o instante do impacto. Em outras palavras, precisamos saber quanto tempo leva para o objeto cair 300 m. Para isso, observamos que a distância x percorrida pelo objeto está relacionada à sua velocidade pela equação $v = dx/dt$, ou

$$\frac{dx}{dt} = 49(1 - e^{-t/5}). \tag{27}$$

Portanto, integrando a Eq. (27) obtemos

$$x = 49t + 245e^{-t/5} + c, \tag{28}$$

onde c é uma constante de integração arbitrária. O objeto começa a cair em $t = 0$, de modo que sabemos que $x = 0$ quando $t = 0$. Da Eq. (28), segue que $c = -245$, de modo que a distância percorrida pelo objeto até um instante t é dada por

$$x = 49t + 245e^{-t/5} - 245. \tag{29}$$

Seja T o instante em que o objeto atinge o solo; então $x = 300$ quando $t = T$. Substituindo esses valores na Eq. (29), obtemos a equação

$$49T + 245e^{-T/5} - 545 = 0. \tag{30}$$

O valor de T que satisfaz a Eq. (30) pode ser aproximado por um processo numérico[4] usando-se uma calculadora científica ou um computador, com o resultado que $T \cong 10{,}51$ s. Nesse instante, a velocidade correspondente v_T é encontrada, da Eq. (26), como $v_T \cong 43{,}01$ m/s. O ponto (10,51; 43,01) também está marcado na Figura 1.2.2.

Observações Adicionais sobre Modelagem Matemática. Até agora nossa discussão de equações diferenciais esteve restrita a modelos matemáticos de um objeto em queda e de uma relação hipotética entre ratos do campo e corujas. A dedução desses modelos pode ter sido plausível, ou talvez até convincente, mas você deve lembrar que o teste decisivo de qualquer modelo matemático é se suas previsões coincidem com observações ou resultados experimentais. Não temos nenhuma observação da realidade nem resultados experimentais aqui para comparação, mas existem diversas fontes de discrepâncias possíveis.

No caso de um objeto em queda, o princípio físico subjacente (a lei do movimento de Newton) está bem estabelecido e é amplamente aplicável. No entanto, a hipótese sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade não está tão comprovada. Mesmo que essa hipótese esteja correta, a determinação do coefi-

[4] Um sistema de álgebra computacional pode fazer isso; muitas calculadoras também já vêm com rotinas para resolver tais equações.

ciente γ da resistência do ar através de medidas diretas apresenta dificuldades. De fato, algumas vezes o coeficiente de resistência do ar é encontrado indiretamente — por exemplo, medindo-se o tempo de queda de uma determinada altura e, depois, calculando-se o valor de γ que prevê esse tempo observado.

O modelo populacional dos ratos do campo está sujeito a diversas incertezas. A determinação da taxa de crescimento r e da taxa predatória k depende de observações sobre populações reais, que podem sofrer uma variação considerável. A hipótese de que r e k são constantes também pode ser questionada. Por exemplo, uma taxa predatória constante torna-se difícil de sustentar quando a população de ratos do campo torna-se menor. Além disso, o modelo prevê que uma população acima do valor de equilíbrio cresce exponencialmente, ficando cada vez maior. Isso não parece estar de acordo com a observação sobre populações reais; veja a discussão adicional sobre dinâmica populacional na Seção 2.5

Se as diferenças entre observações realizadas e as previsões de um modelo matemático forem muito grandes, então você precisa refinar seu modelo, fazer observações mais cuidadosas ou ambos. Quase sempre existe uma troca entre precisão e simplicidade. Ambas são desejáveis, mas em geral um ganho em uma delas envolve uma perda na outra. No entanto, mesmo se um modelo matemático for incompleto ou não muito preciso ele ainda pode ser útil para explicar características qualitativas do problema sob investigação. Ele pode, também, dar resultados satisfatórios em algumas circunstâncias e não em outras. Portanto, você deve sempre usar seu julgamento e bom senso na construção de modelos matemáticos e ao utilizar suas previsões.

PROBLEMAS

1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0. Depois descreva, em poucas palavras, as semelhanças, ou diferenças, entre as soluções.
   (a) $dy/dt = -y + 5, \quad y(0) = y_0$
   (b) $dy/dt = -2y + 5, \quad y(0) = y_0$
   (c) $dy/dt = -2y + 10, \quad y(0) = y_0$
2. Siga as instruções do Problema 1 para os problemas de valor inicial a seguir:
   (a) $dy/dt = y - 5, \quad y(0) = y_0$
   (b) $dy/dt = 2y - 5, \quad y(0) = y_0$
   (c) $dy/dt = 2y - 10, \quad y(0) = y_0$
3. Considere a equação diferencial

$$dy/dt = -ay + b,$$

onde a e b são números positivos.
   (a) Resolva a equação diferencial.
   (b) Esboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.
   (c) Descreva como a solução muda sob cada uma das seguintes condições:
      i. a aumenta;
      ii. b aumenta;
      iii. ambos, a e b, aumentam mas a razão b/a permanece constante.
4. Considere a equação diferencial $dy/dt = ay - b$.
   (a) Encontre a solução de equilíbrio ye.
   (b) Seja $Y(t) = y - ye$, de modo que $Y(t)$ é o desvio da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por $Y(t)$.
5. **Coeficientes a Determinar.** Vamos mostrar um modo diferente de resolver a equação

$$dy/dt = ay - b. \tag{i}$$

   (a) Resolva a equação mais simples

$$dy/dt = ay. \tag{ii}$$

   Chame a solução de $y_1(t)$.
   (b) Observe que a única diferença entre as Eqs. (i) e (ii) é a constante $-b$ na Eq. (i). Parece razoável, portanto, supor que as soluções dessas duas equações diferem apenas por uma constante. Teste essa hipótese tentando encontrar uma constante k tal que $y = y_1(t) + k$ seja uma solução da Eq. (i).
   (c) Compare sua solução em (b) com a dada no texto pela Eq. (17).

Obs.: Esse método também pode ser usado em alguns casos em que a constante b é substituída por uma função $g(t)$. Depende se você é capaz de prever a forma geral que a solução deve ter. Esse método é descrito em detalhe na Seção 3.5 em conexão com equações de segunda ordem.

6. Use o método do Problema 5 para resolver a equação

$$dy/dt = -ay + b.$$

7. A população de ratos do campo no Exemplo 1 satisfaz a equação diferencial

$$dp/dt = 0{,}5p - 450.$$

   (a) Encontre o instante em que a população é extinta se $p(0) = 850$.
   (b) Encontre o instante de extinção se $p(0) = p_0$, onde $0 < p_0 < 900$.
   (c) Encontre a população inicial p_0 se a população é extinta em 1 ano.

8. Considere uma população p de ratos do campo que crescem a uma taxa proporcional à população atual, de modo que $dp/dt = rp$.
   (a) Encontre a taxa de crescimento r se a população dobra em 30 dias.
   (b) Encontre r se a população dobra em N dias.

9. O objeto em queda no Exemplo 2 satisfaz o problema de valor inicial

$$dv/dt = 9{,}8 - (v/5), \qquad v(0) = 0.$$

   (a) Encontre o tempo decorrido quando o objeto atinge 98% de sua velocidade limite.
   (b) Qual a distância percorrida pelo objeto até o instante encontrado no item (a)?

10. Modifique o Exemplo 2 de modo que o objeto em queda não sofra resistência do ar.
   (a) Escreva o problema de valor inicial modificado.
   (b) Determine quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.
   (c) Determine sua velocidade no instante de impacto.

11. Considere o objeto de massa 10 kg em queda do Exemplo 2, mas suponha agora que o coeficiente de resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade.
   (a) Se a velocidade limite é de 49 m/s (a mesma do Exemplo 2), mostre que a equação de movimento pode ser escrita como

$$dv/dt = [(49)^2 - v^2]/245.$$

   Veja também o Problema 25 da Seção 1.1.
   (b) Se $v(0) = 0$, encontre uma expressão para $v(t)$ em qualquer instante t.
   (c) Faça o gráfico da solução encontrada em (b) e da solução (26) do Exemplo 2 no mesmo conjunto de eixos.
   (d) Baseado nos gráficos encontrados em (c), compare o efeito de um coeficiente de resistência do ar quadrático com um linear.
   (e) Encontre a distância $x(t)$ percorrida pelo objeto até o instante t.
   (f) Encontre o tempo T que leva para o objeto cair 300 m.

12. Um material radioativo, tal como um dos isótopos de tório, o tório-234, se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se $Q(t)$ é a quantidade presente no instante t, então $dQ/dt = -rQ$, onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.
   (a) Se 100 mg de tório-234 decaem a 82,04 mg em uma semana, determine a taxa de decaimento r.
   (b) Encontre uma expressão para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t.
   (c) Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.

13. A **meia-vida** de um material radioativo é o tempo necessário para que uma quantidade desse material decaia à metade de sua quantidade original. Mostre que para qualquer material radioativo que decaia de acordo com a equação $Q' = -rQ$ a meia-vida τ e a taxa de decaimento r estão relacionadas pela equação $r\tau = \ln 2$.

14. O rádio-226 tem uma meia-vida de 1620 anos. Encontre o tempo necessário para que uma determinada quantidade desse material seja reduzida da quarta parte.

15. De acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 23 da Seção 1.1), a temperatura $u(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$du/dt = -k(u - T),$$

onde T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto seja $u(0) = u_0$.

(a) Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante.

(b) Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 - T$ foi reduzida pela metade. Encontre a relação entre k e τ.

16. Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 15) e que a taxa k tem valor 0,15 h^{-1}. Suponha que a temperatura no interior era de 70°F (cerca de 21°C) quando ocorreu uma falha no sistema de aquecimento. Se a temperatura externa estava em 10°F (cerca de –12°C), quanto tempo vai levar para a temperatura no interior chegar a 32°F (0°C)?

17. Considere um circuito elétrico contendo um capacitor, um resistor e uma bateria; veja a Figura 1.2.3. A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação[5]

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V,$$

onde R é a resistência, C a capacitância e V a voltagem constante fornecida pela bateria.

(a) Se $Q(0) = 0$, encontre $Q(t)$ em qualquer instante t e esboce o gráfico de Q em função de t.

(b) Encontre o valor limite Q_L para onde $Q(t)$ tende após um longo período de tempo.

(c) Suponha que $Q(t_1) = Q_L$ e que, no instante $t = t_1$, a bateria seja removida e o circuito é fechado novamente. Encontre $Q(t)$ para $t > t_1$ e esboce seu gráfico.

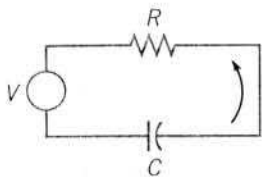


FIGURA 1.2.3 O circuito elétrico do Problema 17.

18. Um pequeno lago contendo 1.000.000 de galões (cerca de 4.550.000 litros) de água não contém, inicialmente, um produto químico indesejável (veja o Problema 21 da Seção 1.1). O lago recebe água contendo 0,01 g/galão de um produto químico a uma taxa de 300 galões por hora e a água sai do lago à mesma taxa. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.

(a) Seja $Q(t)$ a quantidade de produto químico no lago no instante t. Escreva um problema de valor inicial para $Q(t)$.

(b) Resolva o problema no item (a) para $Q(t)$. Quanto produto químico o lago terá ao final de 1 ano?

(c) Ao final de 1 ano, a fonte do produto químico despejado no lago é retirada e, a partir daí, o lago recebe água pura e a mistura sai à mesma taxa de antes. Escreva o problema de valor inicial que descreve essa nova situação.

(d) Resolva o problema de valor inicial do item (c). Qual a quantidade de produto químico que ainda permanece no lago após mais 1 ano (2 anos após o início do problema)?

(e) Quanto tempo vai levar para que $Q(t)$ seja igual a 10 g?

(f) Faça o gráfico de $Q(t)$ em função de t para t até 3 anos.

19. Sua piscina, contendo 60.000 galões (cerca de 273.000 litros) de água, foi contaminada por 5 kg de uma tinta não tóxica que deixa a pele de um nadador com uma cor verde nada atraente. O sistema de filtragem da piscina pode retirar a água, remover a tinta e devolver a água para a piscina a uma taxa de 200 gal/min.

(a) Escreva o problema de valor inicial para o processo de filtragem; seja $q(t)$ a quantidade de tinta na piscina em qualquer instante t.

(b) Resolva o problema encontrado em (a).

(c) Você convidou dúzias de amigos para uma festa em torno da piscina que está marcada para começar em 4 horas. Você já verificou que o efeito da tinta é imperceptível se a concentração é menor do que 0,02 g/gal. Seu sistema de filtragem é capaz de reduzir a concentração de tinta a esse nível dentro de 4 horas?

(d) Encontre o instante T em que a concentração de tinta alcança, pela primeira vez, o valor de 0,02 g/gal.

(e) Encontre a taxa do fluxo de água que é suficiente para obter a concentração de 0,02 g/gal dentro de 4 horas.

[5]Essa equação resulta das leis de Kirchhoff, que são discutidas na Seção 3.7.

1.3 Classificação de Equações Diferenciais

O objetivo principal deste livro é discutir algumas das propriedades de soluções de equações diferenciais e descrever alguns dos métodos que se mostraram eficazes para encontrar soluções ou, em alguns casos, aproximá-las. Com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para a nossa apresentação, vamos descrever agora diversas maneiras úteis de se classificar equações diferenciais.

Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. Uma classificação importante baseia-se em saber se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes. No primeiro caso aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples, e ela é dita uma **equação diferencial ordinária**. No segundo caso as derivadas são derivadas parciais, e a equação é chamada de **equação diferencial parcial**.

Todas as equações diferenciais discutidas nas duas seções precedentes são equações diferenciais ordinárias. Outro exemplo de uma equação diferencial ordinária é

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \tag{1}$$

para a carga $Q(t)$ em um capacitor em um circuito com capacitância C, resistência R e indutância L; essa equação é deduzida na Seção 3.7. Exemplos típicos de equações diferenciais parciais são a equação de calor

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{2}$$

e a equação de onda

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Aqui, α^2 e a^2 são certas constantes físicas. Note que, em ambas as Eqs. (2) e (3), a variável dependente u depende de duas variáveis independentes, x e t. A equação de calor descreve a condução de calor em um corpo sólido, e a equação de onda aparece em uma variedade de problemas envolvendo movimento ondulatório em sólidos ou fluidos.

Sistemas de Equações Diferenciais. Outra classificação de equações diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é suficiente. Se existem, no entanto, duas ou mais funções que devem ser determinadas precisamos de um sistema de equações. Por exemplo, as equações de Lotka-Volterra, ou equações predador-presa, são importantes em modelagem ecológica. Elas têm a forma

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as populações respectivas das espécies presa e predadora. As constantes a, α, c e γ são baseadas em observações empíricas e dependem das espécies particulares em estudo. Sistemas de equações são discutidos nos Capítulos 7 e 9; em particular, as equações de Lotka-Volterra são examinadas na Seção 9.5. Não é fora do comum, em algumas áreas, encontrar sistemas muito grandes contendo centenas ou até milhares de equações.

Ordem. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. As equações nas seções anteriores são todas de primeira ordem, enquanto a Eq. (1) é uma equação de segunda ordem. As Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais de segunda ordem. Mais geralmente, a equação

$$F[t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(n)}(t)] = 0 \tag{5}$$

é uma equação diferencial ordinária de ordem n. A Eq. (5) expressa uma relação entre a variável independente t e os valores da função u e de suas n primeiras derivadas, $u', u'', \ldots, u^{(n)}$. É conveniente e usual em equações diferenciais substituir $u(t)$ por y e $u'(t), u''(t), \ldots, u^{(n)}(t)$ por $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, respectivamente. Assim, a Eq. (5) fica

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Por exemplo,

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{7}$$

é uma equação diferencial de terceira ordem para $y = u(t)$. Algumas vezes outras letras serão usadas no lugar de t e y para as variáveis independentes e dependentes; o significado deve ficar claro pelo contexto.

Vamos supor que é sempre possível resolver uma equação diferencial ordinária dada para a maior derivada, obtendo

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{8}$$

Estudaremos apenas equações da forma (8). A razão principal disso é evitar ambiguidades que possam aparecer, já que uma única equação da forma (6) pode corresponder a diversas equações da forma (8). Por exemplo, a equação

$$(y')^2 + ty' + 4y = 0 \tag{9}$$

leva a duas equações,

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}. \tag{10}$$

Equações Lineares e Não Lineares. Uma classificação crucial de equações diferenciais é se elas são lineares ou não. A equação diferencial ordinária

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, y', \ldots, y^{(n)}$; uma definição análoga se aplica às equações diferenciais parciais. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t). \tag{11}$$

A maioria das equações que você viu até agora neste livro é linear; exemplos são as equações nas Seções 1.1 e 1.2 que descrevem um objeto em queda e a população de ratos do campo. Analogamente, nesta seção a Eq. (1) é uma equação diferencial ordinária linear e as Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais lineares. Uma equação que não é da forma (11) é uma equação **não linear**. A Eq. (7) é não linear devido à expressão yy'. Analogamente, cada equação no sistema (4) é não linear por causa de expressões envolvendo o produto xy.

Um problema físico simples que leva a uma equação diferencial não linear é o problema do pêndulo. O ângulo θ que um pêndulo de comprimento L oscilando faz com a direção vertical (veja a Figura 1.3.1) satisfaz a equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0, \tag{12}$$

cuja dedução está delineada nos Problemas de 29 a 31. A presença da parcela envolvendo sen θ faz com que a Eq. (12) seja não linear.

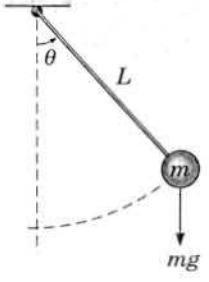


FIGURA 1.3.1 Um pêndulo oscilando.

A teoria matemática e os métodos para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos. Em contraste, a teoria para equações não lineares é mais complicada e os métodos de resolução são menos satisfatórios. Em vista disso, é auspicioso que muitos problemas significativos levem a equações diferenciais

ordinárias lineares ou possam ser aproximados por equações lineares. Por exemplo, para o pêndulo, se o ângulo θ for pequeno então sen $\theta \cong \theta$ e a Eq. (12) pode ser aproximada pela equação linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{13}$$

Esse processo de aproximar uma equação não linear por uma linear é chamado de **linearização**, e é extremamente útil para tratar equações não lineares. Apesar disso, existem muitos fenômenos físicos que não podem ser representados adequadamente por equações lineares. Para estudar esses fenômenos é imprescindível tratar com equações não lineares.

Em um texto elementar é natural enfatizar as partes mais simples e diretas do assunto. Portanto, a maior parte deste livro trata de equações lineares e diversos métodos para resolvê-las. No entanto, os Capítulos 8 e 9, assim como partes do Capítulo 2, consideram equações não lineares. Sempre que for apropriado vamos observar por que as equações não lineares são, em geral, mais difíceis e por que muitas das técnicas úteis na resolução de equações lineares não podem ser aplicadas às equações não lineares.

Soluções. Uma **solução** da equação diferencial ordinária (8) no intervalo $\alpha < t < \beta$ é uma função ϕ tal que $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ existem e satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t)] \tag{14}$$

para todo t em $\alpha < t < \beta$. A menos que explicitado o contrário, vamos supor que a função f na Eq. (8) toma valores reais e que estamos interessados em encontrar soluções reais $y = \phi(t)$.

Lembre-se de que encontramos, na Seção 1.2, soluções de determinadas equações por um processo de integração direta. Por exemplo, vimos que a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450 \tag{15}$$

tem solução

$$p = 900 = ce^{t/2}, \tag{16}$$

onde c é uma constante arbitrária. Muitas vezes não é tão fácil encontrar soluções de equações diferenciais. No entanto, se você encontrar uma função que pode ser solução de uma equação diferencial dada é muito fácil, em geral, verificar se a função é de fato solução, pois basta substituir a função na equação. Por exemplo, dessa maneira é fácil mostrar que a função $y_1(t) = \cos t$ é uma solução de

$$y'' + y = 0 \tag{17}$$

para todo t. Para confirmar isso, note que $y_1'(t) = -\text{sen } t$ e $y''(t) = -\cos t$; segue então que $y_1''(t) + y_1(t) = 0$. Da mesma forma, é fácil mostrar que $y_2(t) = \text{sen } t$ também é solução da Eq. (17). É claro que isso não é um modo satisfatório de resolver a maioria das equações diferenciais, já que existe um número grande demais de funções possíveis para que se tenha alguma chance de encontrar a função correta aleatoriamente. De qualquer modo, é importante compreender que é possível verificar se qualquer solução proposta está correta substituindo-a na equação diferencial. Essa pode ser uma verificação útil, e você deve transformar essa verificação em hábito.

Algumas Questões Relevantes. Embora tenhamos sido capazes de verificar que determinadas funções simples são soluções das Eqs. (15) e (17), não temos, em geral, tais soluções disponíveis. Uma questão fundamental, então, é a seguinte: uma equação da forma (8) sempre tem solução? A resposta é "não". Escrever, simplesmente, uma equação da forma (8) não significa necessariamente que existe uma função $y = \phi(t)$ que a satisfaça. Como podemos saber, então, se uma determinada equação tem solução? Essa é a questão de *existência* de solução, e é respondida por teoremas que afirmam que, sob certas condições sobre a função f na Eq. (8), a equação sempre tem solução. Essa não é, no entanto, uma preocupação puramente matemática por pelo menos duas razões. Se um problema não tem solução, gostaríamos de saber disso antes de investir tempo e esforço na vã tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico razoável está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então a equação deveria ter solução. Se não tiver, presume-se que há algo de errado com a formulação. Nesse sentido, o engenheiro ou cientista tem um modo de verificar a validade do modelo matemático.

Se supusermos que uma equação diferencial dada tem pelo menos uma solução, é natural perguntar quantas soluções ela tem e que condições adicionais devem ser especificadas para se obter uma única solução. Essa é a questão de *unicidade*. Em geral, soluções de equações diferenciais contêm uma ou mais constantes arbitrárias, como a solução (16) da Eq. (15). A Eq. (16) representa uma infinidade de funções,

correspondendo à infinidade de escolhas possíveis para a constante c. Como vimos na Seção 1.2, se p for especificado em um instante t essa condição determina um valor para c; mesmo assim, não descartamos a possibilidade de que possam existir outras soluções da Eq. (15) para as quais p tem o valor especificado no instante t dado. Essa questão de unicidade também tem implicações práticas. Se formos suficientemente felizes para encontrar uma solução de um problema dado e se soubermos que o problema tem uma única solução, então podemos ter certeza de que resolvemos completamente o problema. Se existem outras soluções, talvez devamos continuar procurando-as.

Uma terceira questão importante é: dada uma equação diferencial da forma (8), podemos determinar de fato uma solução? E se for esse o caso, como? Note que, se encontrarmos uma solução da equação dada, responderemos, ao mesmo tempo, à questão de existência de solução. No entanto, sem conhecer a teoria de existência poderíamos, por exemplo, usar um computador para encontrar uma aproximação numérica para uma "solução" que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo que a solução existe pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares usuais-funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas. Infelizmente, essa é a situação para a maioria das equações diferenciais. Assim, discutimos tanto métodos elementares que podem ser usados para se obter soluções de determinados problemas relativamente simples quanto métodos de natureza mais geral que podem ser aplicados em problemas mais difíceis.

Uso de Computadores em Equações Diferenciais. Um computador pode ser uma ferramenta extremamente útil no estudo de equações diferenciais. Há muitos anos os computadores vêm sendo utilizados para executar algoritmos, como os descritos no Capítulo 8, que constroem aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais. Esses algoritmos foram refinados a um nível extremamente alto de generalidade e eficiência. Algumas poucas linhas de código, escritas em uma linguagem de programação de alto nível e executadas (em alguns segundos, frequentemente) em um computador relativamente barato são suficientes para resolver numericamente com muita precisão um espectro amplo de equações diferenciais. Rotinas mais sofisticadas também estão disponíveis com facilidade. Essas rotinas combinam a habilidade de tratar sistemas muito grandes e complicados com diversas características de diagnósticos que alertam o usuário quanto a problemas possíveis à medida que vão sendo encontrados.

A saída usual de um algoritmo numérico é uma tabela de números, listando valores selecionados da variável independente e os valores correspondentes da variável dependente. Com programas apropriados é fácil mostrar graficamente a solução de uma equação diferencial, quer ela tenha sido obtida numericamente ou como resultado de um procedimento analítico de alguma espécie. Tais apresentações gráficas são, com frequência, mais claras e úteis para a compreensão e a interpretação da solução de uma equação diferencial do que uma tabela de números ou uma fórmula analítica complicada. Existem diversos pacotes de programas especiais no mercado, muito bem construídos e relativamente baratos, para a investigação gráfica de equações diferenciais. A ampla disponibilidade de computadores pessoais tornou acessíveis, para os estudantes, capacidades computacional e gráfica poderosas. Você deve considerar, dependendo de suas circunstâncias, como aproveitar melhor os recursos computacionais disponíveis. Você certamente achará isso instrutivo.

Outro aspecto da utilização de computadores bastante relevante para o estudo de equações diferenciais é a disponibilidade de pacotes gerais extremamente poderosos que podem efetuar uma gama muito grande de operações matemáticas. Entre esses estão o Maple, o Mathematica e o MATLAB, cada um dos quais pode ser usado em diversos tipos de computadores pessoais ou estações de trabalho. Todos esses três programas podem executar cálculos numéricos extensos e têm facilidades gráficas versáteis. Além disso, o *Maple* e o *Mathematica* também têm capacidades analíticas muito grandes. Por exemplo, podem executar passos analíticos necessários para a resolução de muitas equações diferenciais, frequentemente em resposta a um único comando. Qualquer pessoa que espera tratar equações diferenciais de um modo mais do que superficial deve se familiarizar com pelo menos um desses produtos e explorar como ele pode ser usado.

Para você, aluno, esses recursos computacionais afetam a maneira de estudar equações diferenciais. Para se tornar confiante no uso de equações diferenciais é essencial compreender como os métodos de solução funcionam, e essa compreensão é obtida, em parte, fazendo-se um número suficiente de exemplos detalhadamente. No entanto, você deve planejar, após algum treino, delegar tanto quanto possível os detalhes de rotina (muitas vezes repetitivos) a um computador, enquanto você presta mais atenção à formulação correta do problema e à interpretação da solução. Nosso ponto de vista é que você deve sempre tentar usar os melhores métodos e ferramentas disponíveis para cada tarefa. Em particular, você deve tentar combinar métodos numéricos, gráficos e analíticos de modo a obter a maior compreensão possível sobre o comportamento da solução e dos processos subjacentes que o problema modela. Você deve se lembrar, também, de que algumas tarefas são executadas melhores com lápis e papel, enquanto outras necessitam de uma calculadora ou um computador. Muitas vezes é necessário ter bom senso para selecionar uma combinação equilibrada.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear.

1. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$
2. $(1+y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$
4. $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t+y) = \operatorname{sen} t$
6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 14, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

7. $y'' - y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$
8. $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$
9. $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$
10. $y'''' + 4y''' + 3y = t$; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$
11. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{1/2}$, $y_2(t) = t^{-1}$
12. $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2}\ln t$
13. $y'' + y = \sec t$, $0 < t < \pi/2$; $y = (\cos t)\ln\cos t + t\operatorname{sen} t$
14. $y' - 2ty = 1$; $y = e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}\,ds + e^{t^2}$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$
16. $y'' - y = 0$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Em cada um dos Problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

19. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
20. $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 24, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não linear. Derivadas parciais são denotadas por índices.

21. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
22. $u_{xx} + u_{xy} + uu_x + uu_y + u = 0$
23. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$
24. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

Em cada um dos Problemas de 25 a 28, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

25. $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u_1(x,y) = \cos x\cosh y$, $u_2(x,y) = \ln(x^2+y^2)$
26. $\alpha^2u_{xx} = u_t$; $u_1(x,t) = e^{-\alpha^2t}\operatorname{sen} x$, $u_2(x,t) = e^{-\alpha^2\lambda^2t}\operatorname{sen}\lambda x$, λ uma constante real
27. $a^2u_{xx} = u_{tt}$; $u_1(x,t) = \operatorname{sen}\lambda x\operatorname{sen}\lambda at$, $u_2(x,t) = \operatorname{sen}(x - at)$, λ uma constante real
28. $\alpha^2u_{xx} = u_t$; $u = (\pi/t)^{1/2}e^{-x^2/4\alpha^2t}$, $t > 0$
29. Siga os passos indicados aqui para deduzir a equação de movimento de um pêndulo, Eq. (12) no texto. Suponha que a barra do pêndulo seja rígida e sem peso, que a massa seja pontual e que não exista atrito ou resistência em nenhum ponto do sistema.
    (a) Suponha que a massa esteja em uma posição deslocada arbitrária, indicada pelo ângulo θ. Desenhe um diagrama mostrando as forças que agem sobre a massa.
    (b) Aplique a lei do movimento de Newton na direção tangencial ao arco circular sobre o qual a massa se move. Então, a força de tensão sobre a barra não aparece na equação. Note que é necessário encontrar a componente da força gravitacional na direção tangencial. Note, também, que a aceleração linear (para diferenciá-la da aceleração angular) é $Ld^2\theta/dt^2$, onde L é o comprimento da barra.
    (c) Simplifique o resultado obtido no item (b) para obter a Eq. (12) do texto.
30. Outra maneira de deduzir a equação do pêndulo (12) baseia-se no princípio de conservação de energia.
    (a) Mostre que a energia cinética do pêndulo em movimento é
    $$T = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$
    (b) Mostre que a energia potencial V do pêndulo relativa à sua posição de repouso é
    $$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

(c) Pelo princípio de conservação de energia, a energia total $E = T + V$ é constante. Calcule dE/dt, iguale a zero e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12).

31. Uma terceira dedução da equação do pêndulo depende do princípio do momento angular: a taxa de variação do momento angular em torno de qualquer ponto é igual ao momento externo total em torno do mesmo ponto.

(a) Mostre que o momento angular M em torno do ponto de suporte é dado por $M = mL^2 d\theta/dt$.

(b) Iguale dM/dt ao momento da força gravitacional e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12). Note que os momentos positivos são no sentido trigonométrico (anti-horário).

1.4 Notas Históricas

Sem saber alguma coisa sobre equações diferenciais e métodos para resolvê-las, é difícil apreciar a história desse ramo importante da matemática. Além disso, o desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática, e não pode ser separado dele. Apesar disso, para fornecer alguma perspectiva histórica vamos indicar aqui algumas das tendências principais na história desse assunto e identificar os matemáticos atuantes no período inicial de desenvolvimento que mais se destacaram. Outras informações históricas estão contidas em notas de rodapé ao longo do livro e nas referências listadas ao final do capítulo.

As equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Newton cresceu no interior da Inglaterra, foi educado no Trinity College, em Cambridge, e se tornou Professor de Matemática, na cadeira *Lucasian*, em 1669. Suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Elas circularam privadamente, entre seus amigos, mas Newton era muito sensível a críticas e só começou a publicar seus resultados a partir de 1687, quando apareceu seu livro mais famoso, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Apesar de Newton ter atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente ditas, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ e $dy/dx = f(x, y)$. Ele desenvolveu um método para resolver essa última equação no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio em x e y usando séries infinitas. Newton parou de fazer pesquisa matemática no início da década de 1690, exceto pela solução de problemas desafiadores ocasionais e pela revisão e publicação de resultados obtidos anteriormente. Foi nomeado *Warden of the British Mint* (responsável pela Casa da Moeda britânica) em 1696 e pediu demissão da sua posição de professor alguns anos depois. Recebeu o título de cavaleiro em 1705 e, após sua morte, foi enterrado na capela de Westminster.

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia na Universidade de Altdorf quando tinha 20 anos. Ao longo de sua vida, engajou-se em atividades acadêmicas em diversos campos diferentes. Era basicamente autodidata em matemática, já que seu interesse no assunto desenvolveu-se quando tinha vinte e poucos anos. Leibniz chegou aos resultados sobre cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada, dy/dx, assim como o sinal de integral, são devidos a ele. Descobriu o método de separação de variáveis (Seção 2.2) em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis (Seção 2.2, Problema 30) em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem (Seção 2.1) em 1694. Passou sua vida como embaixador e conselheiro de diversas famílias reais alemãs, o que permitiu que viajasse muito e mantivesse uma correspondência extensa com outros matemáticos, especialmente os irmãos Bernoulli. No decorrer dessa correspondência foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais durante a parte final do século XVII.

Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, de Basel, fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e ampliar o campo de suas aplicações. Jakob tornou-se professor de matemática em Basel em 1687 e Johann foi nomeado para a mesma posição quando seu irmão faleceu, em 1705. Ambos eram briguentos, ciumentos e estavam frequentemente envolvidos em disputas, especialmente entre si. Apesar disso, ambos fizeram contribuições significativas em diversas áreas da matemática. Com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica formulando-os como equações diferenciais. Por exemplo, Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ em 1690 e, no mesmo artigo, usou pela primeira vez a palavra "integral" no sentido moderno. Em 1694, Johann Bernoulli foi capaz de resolver a equação $dy/dx = y/ax$. Um problema resolvido por ambos os irmãos e que gerou muito atrito entre eles foi o problema da *braquistócrona* (veja o Problema

32 da Seção 2.3). O problema da braquistócrona foi resolvido, também, por Leibniz, por Newton e pelo Marquês de L'Hospital. Diz-se, embora sem comprovação, que Newton soube do problema no final da tarde de um dia cansativo na Casa da Moeda e que o resolveu naquela noite após o jantar. Ele publicou a solução anonimamente, mas, ao vê-la, Johann Bernoulli observou: "Ah, conheço o leão pela sua pata".

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, emigrou para São Petersburgo na juventude para se incorporar à Academia de São Petersburgo, recém-fundada, mas retornou a Basel em 1733 como professor de botânica e, mais tarde, de física. Seus interesses eram, principalmente, em equações diferenciais parciais e suas aplicações. Por exemplo, é seu nome que está associado à equação de Bernoulli em mecânica dos fluidos. Foi, também, o primeiro a encontrar as funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel (Seção 5.7).

O maior matemático do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), cresceu perto de Basel e foi aluno de Johann Bernoulli. Ele seguiu seu amigo Daniel Bernoulli, indo para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida esteve associado à Academia de São Petersburgo (1727-1741 e 1766-1783) e à Academia de Berlim (1741-1766). Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos; suas obras completas enchem mais de 70 grossos volumes. Seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Embora tenha ficado cego durante os últimos 17 anos de sua vida, seu trabalho continuou no mesmo ritmo até o dia de sua morte. De interesse especial para nós aqui é sua formulação matemática de problemas em mecânica e seu desenvolvimento de métodos para resolvê-los. Sobre o trabalho de Euler em mecânica, Lagrange disse ser "o primeiro trabalho importante no qual a análise é aplicada à ciência do movimento". Entre outras coisas, Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas (Seção 2.6) em 1734-1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes (Seção 2.6) no mesmo artigo e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes (Seções 3.1, 3.3, 3.4 e 4.2) em 1743. Estendeu esse último resultado para equações não homogêneas em 1750-1751. Começando em torno de 1750, Euler usou, com frequência, séries de potências (Capítulo 5) para resolver equações diferenciais. Propôs, também, um procedimento numérico (Seções 2.7 e 8.1) em 1768-1769, fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) tornou-se professor de matemática em sua cidade natal, Turim, com 19 anos. Sucedeu Euler na cadeira de matemática na Academia de Berlim em 1766 e foi para a Academia de Paris em 1787. Ele é mais conhecido pelo seu trabalho monumental *Mécanique analytique*, publicado em 1788, um tratado elegante e completo sobre mecânica newtoniana. Em relação a equações diferenciais elementares Lagrange mostrou, no período 1762-1765, que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear n soluções independentes (Seções 3.2 e 4.1) Mais tarde, em 1774-1775, desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros (Seções 3.6 e 4.4). Lagrange também é conhecido pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) viveu na Normandia quando menino, mas foi para Paris em 1768 e rapidamente deixou sua marca nos meios científicos, sendo eleito para a Academia de Ciências em 1773. Destacou-se no campo da mecânica celeste; seu trabalho mais importante, *Traité de mécanique celeste*, foi publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática, e Laplace a estudou extensamente em conexão com a atração gravitacional. A transformada de Laplace (Capítulo 6) recebeu o nome em sua homenagem, embora sua utilidade na resolução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No século XIX iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências (veja o Capítulo 5). Esses métodos encontram seu ambiente natural no plano complexo. Por causa disso, eles se beneficiaram, e, até certo ponto, estimularam o desenvolvimento mais ou menos simultâneo da teoria de funções analíticas complexas. As equações diferenciais parciais começaram, também, a ser estudadas intensamente à medida que se tornava claro seu papel crucial em física matemática. Com isso, muitas funções, soluções de certas equações diferenciais ordinárias, começaram a aparecer repetidamente e foram exaustivamente estudadas. Conhecidas coletivamente como funções transcendentais, muitas delas estão associadas a nomes de matemáticos, incluindo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

As inúmeras equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica (veja o Capítulo 8). Por volta de 1900 já haviam sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas sua implementação estava severamente prejudicada pela necessidade de se executar os cálculos à mão ou com equipamentos computacionais muito primitivos. Nos últimos 60 anos o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou

muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Durante esse mesmo período foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos, facilmente disponíveis. Versões apropriadas para computadores pessoais tornaram possível, para os alunos, a resolução de muitos problemas significativos.

Outra característica das equações diferenciais no século XX foi a criação de métodos geométricos ou topológicos especialmente para equações não lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico. Se há necessidade de mais detalhes, isso pode ser obtido em geral usando-se aproximações numéricas. O Capítulo 9 contém uma introdução a esses métodos geométricos.

Nos últimos anos essas duas tendências se juntaram. Computadores, e, especialmente, computação gráfica trouxeram um novo ímpeto ao estudo de sistemas de equações diferenciais não lineares. Foram descobertos fenômenos inesperados (Seção 9.8), tais como atratores estranhos, caos e fractais, que estão sendo intensamente estudados e estão gerando novas e importantes ideias em diversas aplicações diferentes. Embora seja um assunto antigo sobre o qual muito se sabe, as equações diferenciais no século XXI permanecem sendo uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos.

REFERÊNCIAS

Programas de computador para equações diferenciais mudam muito rápido para se poder dar boas referências em um livro como esse. Uma busca pelo Google sobre Maple, Mathematica ou MATLAB é uma boa maneira de começar, se você precisa de informações sobre um desses sistemas de álgebra computacional.

Para ler mais sobre a história da matemática, procure livros como os listados a seguir:

Boyer, C. B., and Merzbach, U. C., *A History of Mathematics* (2nd ed.) (New York: Wiley, 1989).

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

Um apêndice histórico útil sobre o desenvolvimento inicial das equações diferenciais aparece em

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1956).

Uma fonte enciclopédica de informação sobre vidas e feitos de matemáticos do passado é

Gillespie, C. C., ed., *Dictionary of Scientific Biography* (15 vols.) (New York: Scribner's, 1971).

Muita informação histórica pode ser encontrada na Internet. Um site excelente é

www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html

criado por John J. O'Connor e Edmund F. Robertson, do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade St. Andrews, na Escócia.

CAPÍTULO

2

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaz essa equação para todo t em algum intervalo é chamada de solução. Nosso objetivo é determinar se tal função existe e, nesse caso, desenvolver métodos para encontrá-la. Infelizmente, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares para uma função arbitrária f. Em vez disso, descreveremos diversos métodos, cada um deles aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações lineares (Seção 2.1), as equações separáveis (Seção 2.2) e as equações exatas (Seção 2.6). Outras seções deste capítulo descrevem algumas das aplicações importantes de equações diferenciais de primeira ordem, introduzem a ideia de aproximar uma solução por cálculos numéricos e discutem algumas questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções. A última seção inclui um exemplo de soluções caóticas no contexto de equações de diferenças finitas de primeira ordem, que têm alguns pontos importantes de semelhança com equações diferenciais e são mais simples de investigar.

2.1 Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes

Se a função f na Eq. (1) depender linearmente da variável dependente y, então a Eq. (1) é dita uma equação linear de primeira ordem. Nas Seções 1.1 e 1.2 discutimos um tipo restrito de equações lineares de primeira ordem, aquelas com coeficientes constantes. Um exemplo típico é

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \tag{2}$$

onde a e b são constantes dadas. Lembre-se de que uma equação dessa forma descreve o movimento de um objeto em queda na atmosfera. Vamos considerar agora a equação linear de primeira ordem mais geral, obtida substituindo-se os coeficientes a e b na Eq. (2) por funções arbitrárias de t. Em geral escreveremos a **equação linear de primeira ordem** geral na forma-padrão

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{3}$$

onde p e g são funções dadas da variável independente t.

A Eq. (2) pode ser resolvida pelo método de integração introduzido na Seção 1.2. Ou seja, se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, podemos escrever a equação na forma

$$\frac{dy/dt}{y-(b/a)} = -a. \tag{4}$$

Então, integrando, obtemos

$$\ln|y-(b/a)| = -at + C,$$

donde segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (b/a) + ce^{-at}, \tag{5}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Infelizmente, esse método direto de solução não pode ser usado para resolver a equação geral (3), de modo que precisaremos de um método diferente. Esse método é devido a Leibniz; ele envolve a multiplicação da equação diferencial (3) por uma determinada função $\mu(t)$ escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada de **fator integrante**, e a principal dificuldade é determinar como encontrá-la. Vamos introduzir esse método em um exemplo simples e mostrar mais adiante como estendê-lo a outras equações lineares de primeira ordem, incluindo a equação geral (3).

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}e^{t/3}. \tag{6}$$

Desenhe o gráfico de diversas soluções e encontre a solução particular cujo gráfico contém o ponto $(0, 1)$.

O primeiro passo é multiplicar a Eq. (6) por uma função $\mu(t)$, ainda a determinar; assim

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \tfrac{1}{2}\mu(t)y = \tfrac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}. \tag{7}$$

Precisamos agora saber se podemos escolher $\mu(t)$ de tal modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja reconhecida como a derivada de alguma expressão particular. Se for possível, poderemos integrar a Eq. (7) mesmo sem conhecer a função y. Para orientar a escolha do fator integrante $\mu(t)$, pergunte a si mesmo onde, em cálculo, você já viu uma expressão contendo um termo da forma $\mu(t)dy/dt$. Você está na pista certa se isso lhe lembra a regra do produto para a diferenciação. Vamos tentar, então, determinar $\mu(t)$ de modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja a derivada do produto $\mu(t)y$. Comparando a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) com a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y, \tag{8}$$

observamos que serão iguais se escolhermos $\mu(t)$ de modo que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \tfrac{1}{2}\mu(t). \tag{9}$$

Portanto, nossa busca por um fator integrante terá sucesso se pudermos encontrar uma solução para a Eq. (9). Talvez você possa identificar imediatamente uma função que satisfaz a Eq. (9): que função bem conhecida no cálculo tem derivada igual à metade da função original? De maneira mais sistemática, podemos reescrever a Eq. (9) como

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \tfrac{1}{2}, \tag{10}$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = \tfrac{1}{2}. \tag{11}$$

Segue então que

$$\ln|\mu(t)| = \tfrac{1}{2}t + C, \tag{12}$$

ou

$$\mu(t) = ce^{t/2}. \tag{13}$$

A função $\mu(t)$ dada pela Eq. (13) é um fator integrante para a Eq. (6). Como não precisamos do fator integrante mais geral possível, escolheremos c igual a um na Eq. (13) e usaremos $\mu(t) = e^{t/2}$.

Vamos voltar para a Eq. (6) e multiplicá-la pelo fator integrante $e^{t/2}$ para obter

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \tfrac{1}{2}e^{t/2}y = \tfrac{1}{2}e^{5t/6}. \tag{14}$$

Pela escolha que fizemos do fator integrante, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (14) é a derivada de $e^{t/2}y$, de modo que a Eq. (14) fica

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \tfrac{1}{2}e^{5t/6}. \tag{15}$$

Integrando a Eq. (15), obtemos

$$e^{t/2}y = \tfrac{3}{5}e^{5t/6} + c, \tag{16}$$

onde c é uma constante arbitrária. Finalmente, resolvendo a Eq. (16) para y, obtemos a solução geral da Eq. (6), a saber,

$$y = \tfrac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}. \tag{17}$$

Para encontrar a solução cujo gráfico contém o ponto $(0, 1)$, fazemos $t = 0$ e $y = 1$ na Eq. (17), obtendo $1 = (3/5) + c$. Logo, $c = 2/5$ e a solução desejada é

$$y = \tfrac{3}{5}e^{t/3} + \tfrac{2}{5}e^{-t/2}. \tag{18}$$

A Figura 2.1.1 inclui os gráficos da Eq. (17) para diversos valores de c com um campo de direções ao fundo. A solução contendo o ponto $(0, 1)$ está indicada por uma linha mais grossa.

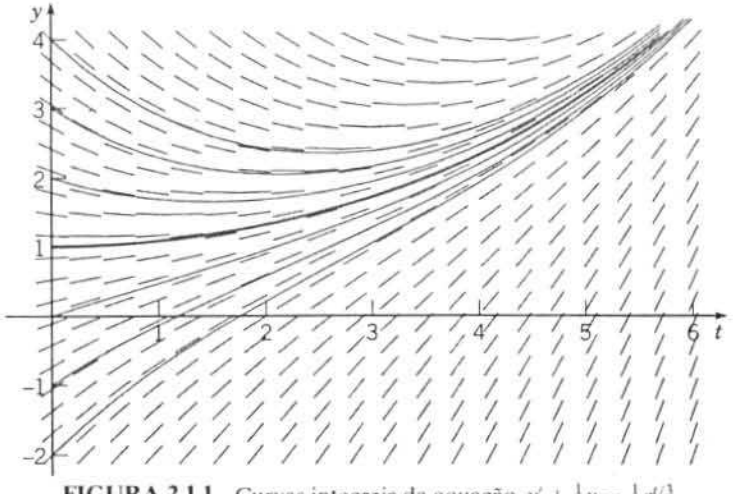


FIGURA 2.1.1 Curvas integrais da equação $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$.

Vamos agora estender o método dos fatores integrantes a equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \tag{19}$$

onde a é uma constante dada e $g(t)$ é uma função dada. Procedendo como no Exemplo 1, vemos que o fator integrante $\mu(t)$ tem que satisfazer

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu, \tag{20}$$

em vez da Eq. (9). Logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{at}$. Multiplicando a Eq. (19) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \tag{21}$$

Integrando a Eq. (21), encontramos

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)\,dt + c, \tag{22}$$

onde c é uma constante arbitrária. Para muitas funções simples $g(t)$ podemos calcular a integral na Eq. (22) e expressar a solução y em termos de funções elementares, como no Exemplo 1. No entanto, para funções $g(t)$ mais complicadas, pode ser necessário deixar a solução em forma integral. Nesse caso,

$$y = e^{-at}\int_{t_0}^{t} e^{as}g(s)\,ds + ce^{-at}. \tag{23}$$

Note que denotamos por s a variável de integração na Eq. (23), para distingui-la da variável independente t, e escolhemos algum valor conveniente t_0 para o limite inferior de integração.

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \tag{24}$$

e desenhe gráficos de diversas soluções. Discuta o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

A Eq. (24) é da forma (19) com $a = -2$; logo, o fator integrante é $\mu(t) = e^{-2t}$. Multiplicando a equação diferencial (24) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t}, \tag{25}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. \tag{26}$$

Integrando a equação diferencial, temos

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \tfrac{1}{2}te^{-2t} + \tfrac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

onde usamos integração por partes no último termo da Eq. (26). Logo, a solução geral da Eq. (24) é

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + ce^{2t}. \tag{27}$$

A Figura 2.1.2 mostra um campo de direções e gráficos da solução (27) para diversos valores de c. O comportamento das soluções para valores grandes de t é determinado pelo termo ce^{2t}. Se $c \neq 0$, a solução cresce exponencialmente em módulo com o mesmo sinal que c. Portanto, a solução diverge quando t se torna muito grande. A fronteira entre soluções que divergem positivamente e que divergem negativamente ocorre quando $c = 0$. Se escolhermos $c = 0$ na Eq. (27) e fizermos $t = 0$, veremos que $y = -7/4$ é o ponto de separação no eixo dos y. Note que para esse valor inicial a solução é $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t$; essa solução cresce positivamente, mas linearmente e não exponencialmente.

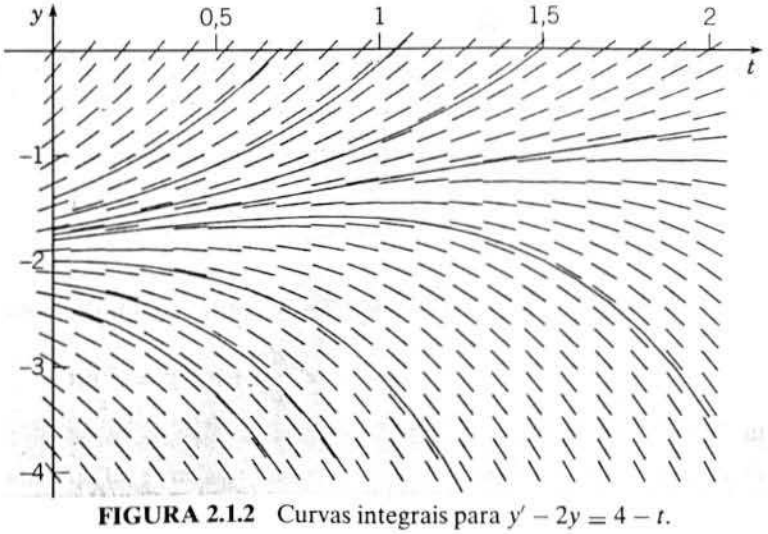


FIGURA 2.1.2 Curvas integrais para $y' - 2y = 4 - t$.

Vamos voltar para a equação linear geral de primeira ordem (3)

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

onde p e g são funções dadas. Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a Eq. (3) por uma função $\mu(t)$ a ser determinada, obtendo

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \tag{28}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio do Exemplo 1, vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (28) é a derivada de um produto $\mu(t)y$, desde que $\mu(t)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \tag{29}$$

Supondo temporariamente que $\mu(t)$ é positiva, temos

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

e, em consequência,

$$\ln \mu(t) = \int p(t)\,dt + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para μ, a saber,

$$\mu(t) = \exp \int p(t)\,dt. \tag{30}$$

Note que $\mu(t)$ é positiva para todo t, como supusemos. Voltando para a Eq. (28), temos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \tag{31}$$

Portanto,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + c, \tag{32}$$

onde c é uma constante arbitrária. Algumas vezes a integral na Eq. (32) pode ser calculada em termos de funções elementares. No entanto, isso não é possível, em geral, de modo que a solução geral da Eq. (3) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \tag{33}$$

onde, mais uma vez, t_0 é algum limite inferior de integração conveniente. Observe que a Eq. (33) envolve duas integrações, uma para obter $\mu(t)$ da Eq. (30) e outra para determinar y da Eq. (33).

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \tag{34}$$

$$y(1) = 2. \tag{35}$$

Para determinar $p(t)$ e $g(t)$ corretamente, precisamos primeiro colocar a Eq. (34) na forma-padrão (3). Temos

$$y' + (2/t)y = 4t, \tag{36}$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Para resolver a Eq. (36), primeiro calculamos o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t}\,dt = e^{2\ln|t|} = t^2.$$

Multiplicando a Eq. (36) por $\mu(t) = t^2$, obtemos

$$t^2y' + 2ty = (t^2y)' = 4t^3,$$

e, portanto,

$$t^2y = t^4 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} \tag{37}$$

é a solução geral da Eq. (34). A Figura 2.1.3 mostra curvas integrais para a Eq. (34) para diversos valores de c. Para satisfazer a condição inicial (35), é necessário escolher $c = 1$; assim,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0 \tag{38}$$

é a solução do problema de valor inicial (34), (35). Essa solução corresponde à curva mais grossa na Figura 2.1.3. Note que ela se torna ilimitada e se aproxima assintoticamente do semieixo positivo dos y quando $t \to 0$ pela direita. Esse é o efeito da descontinuidade infinita do coeficiente $p(t)$ na origem. A função $y = t^2 + (1/t^2)$ para $t < 0$ não é parte da solução desse problema de valor inicial.

Esse é o primeiro exemplo no qual a solução não existe para alguns valores de t. Novamente, isso é devido à descontinuidade infinita de $p(t)$ em $t = 0$, que restringe a solução ao intervalo $0 < t < \infty$.

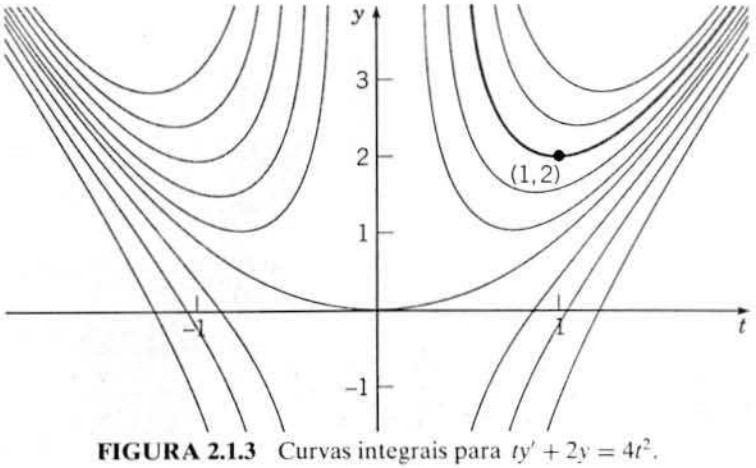


FIGURA 2.1.3 Curvas integrais para $ty' + 2y = 4t^2$.

Olhando novamente para a Figura 2.1.3, vemos que algumas soluções (aquelas para as quais $c > 0$) são assintóticas ao semieixo positivo dos y quando $t \to 0$ pela direita, enquanto outras soluções (para as quais $c < 0$) são assintóticas ao semieixo negativo dos y. A solução para a qual $c = 0$, a saber, $y = t^2$, permanece limitada e diferenciável até em $t = 0$. Se generalizarmos a condição inicial (35) para

$$y(1) = y_0, \tag{39}$$

então $c = y_0 - 1$ e a solução (38) fica

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \qquad t > 0 \text{ se } y_0 \neq 1. \tag{40}$$

Como no Exemplo 2, este é outro caso particular onde existe um valor inicial crítico, a saber, $y_0 = 1$, que separa soluções que se comportam de duas maneiras bem diferentes.

EXEMPLO 4

Resolva o problema de valor inicial

$$2y' + ty = 2, \tag{41}$$

$$y(0) = 1. \tag{42}$$

Para colocar a equação diferencial (41) na forma-padrão (3) precisamos dividir por 2, obtendo

$$y' + (t/2)y = 1. \tag{43}$$

Logo, $p(t) = t/2$ e o fator integrante é $\mu(t) = \exp(t^2/4)$. Então multiplique a Eq. (43) por $\mu(t)$, de modo que

$$e^{t^2/4}y' + \frac{t}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4}. \tag{44}$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (44) é a derivada de $e^{t^2/4}y$, portanto, integrando a Eq. (44) obtemos

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4}\,dt + c. \tag{45}$$

A integral na Eq. (45) não pode ser calculada em termos das funções elementares usuais, de modo que a deixamos em forma integral. No entanto, escolhendo o limite inferior de integração como o ponto inicial $t = 0$ podemos substituir a Eq. (45) por

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4}\,ds + c, \tag{46}$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue, então, que a solução geral y da Eq. (41) é dada por

$$y = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}\,ds + ce^{-t^2/4}. \tag{47}$$

A condição inicial (42) requer que $c = 1$.

O principal objetivo deste exemplo é ilustrar que algumas vezes a solução tem que ser deixada em função de uma integral. Em geral, isso é no máximo ligeiramente inconveniente, e não um obstáculo sério. Para um dado valor de t, a integral na Eq. (47) é uma integral definida, e pode ser aproximada com qualquer precisão desejada usando-se integradores numéricos facilmente disponíveis. Repetindo esse processo para muitos valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico da solução. De maneira alternativa, você pode usar um método numérico de aproximação, como os discutidos no Capítulo 8, que partem diretamente da equação diferencial e não precisam de uma expressão para a solução. Pacotes de programas como Maple e Mathematica executam rapidamente tais procedimentos e produzem gráficos de soluções de equações diferenciais.

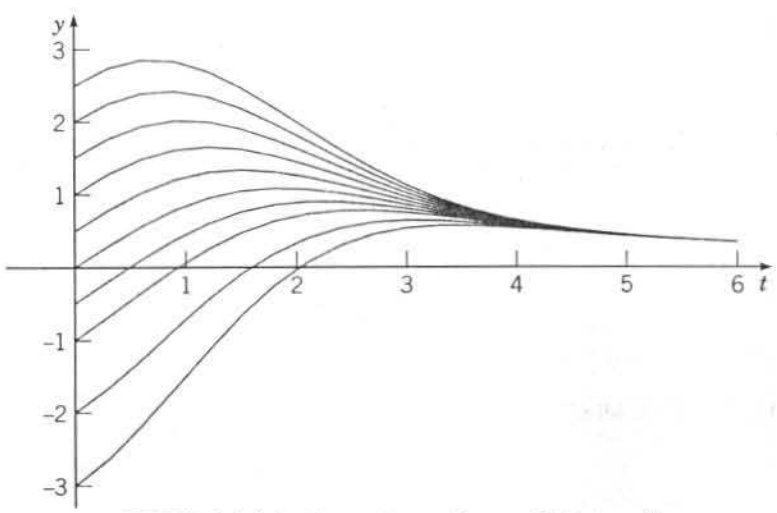


FIGURA 2.1.4 Curvas integrais para $2y' + ty = 2$.

A Figura 2.1.4 mostra gráficos das soluções (47) para diversos valores de c. Da figura, parece plausível conjeturar que todas as soluções tendem a um limite quando $t \to \infty$. O limite pode ser encontrado analiticamente (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.

(b) Baseado em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t.

(c) Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
2. $y' - 2y = t^2e^{2t}$
3. $y' + y = te^{-t} + 1$
4. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t, \quad t > 0$
5. $y' - 2y = 3e^t$
6. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad t > 0$

7. $y' + 2ty + 2te^{-t^2}$
8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$
9. $2y' + y = 3t$
10. $ty' - y = t^2e^{-t}, \quad t > 0$
11. $y' + y = 5 \operatorname{sen} 2t$
12. $2y' + y = 3t^2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0$
16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$
17. $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$
18. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$
19. $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$
20. $ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

Em cada um dos Problemas de 21 a 23:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.

(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0.

(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$
22. $2y' - y = e^{t/3}, \quad y(0) = a$
23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando $t \to 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.

(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0.

(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

24. $ty' + (t + 1)y = 2te^{-t}, \quad y(1) = a, \quad t > 0$
25. $ty' + 2y = (\operatorname{sen} t)/t, \quad y(-\pi/2) = a, \quad t < 0$
26. $(\operatorname{sen} t)y' + (\cos t)y = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi$

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{2}y = 2 \cos t, \qquad y(0) = -1.$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{2}{3}y = 1 - \tfrac{1}{2}t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza, o eixo dos t.

29. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{4}y = 3 + 2 \cos 2t, \qquad y(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t.

(b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta pela primeira vez a reta $y = 12$.

30. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3 \operatorname{sen} t, \qquad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \to \infty$.

31. Considere o problema de valor inicial

$$y' - \tfrac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \to \infty$ das que crescem em módulo, mas permanecem negativas. Como a solução que corresponde a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \to \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ [veja a Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando $t \to \infty$ e encontre esse limite.

Sugestão: considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hospital no primeiro termo.

33. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é um número real arbitrário, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade de que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que todas as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \to \infty$.
35. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3 - t$ quando $t \to \infty$.
36. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 2t - 5$ quando $t \to \infty$.
37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 - t^2$ quando $t \to \infty$.
38. **Variação dos Parâmetros.** Considere o seguinte método de resolução da equação linear de primeira ordem geral:

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{i}$$

(a) Se $g(t) = 0$ para todo t, mostre que a solução é

$$y = A \exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{ii}$$

onde A é uma constante.

(b) Se $g(t)$ não é identicamente nula, suponha que a solução da Eq. (i) é da forma

$$y = A(t) \exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{iii}$$

onde A agora é uma função de t. Substituindo y na equação diferencial por essa expressão, mostre que $A(t)$ tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t) \exp\left[\int p(t)\,dt\right]. \tag{iv}$$

(c) Encontre $A(t)$ da Eq. (iv). Depois substitua $A(t)$ na Eq. (iii) por essa solução para determinar y. Verifique que a solução obtida dessa maneira é igual à solução da Eq. (33) no texto. Essa técnica é conhecida como o método de **variação dos parâmetros**; é discutida em detalhes na Seção 3.6 em conexão com equações lineares de segunda ordem.

Em cada um dos Problemas de 39 a 42, use o método do Problema 38 para resolver a equação diferencial dada.

39. $y' - 2y = t^2e^{2t}$
40. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t, \quad t > 0$
41. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad t > 0$
42. $2y' + y = 3t^2$

2.2 Equações Separáveis

Nas Seções 1.2 e 2.1 usamos um processo de integração direta para resolver equações lineares de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \tag{1}$$

onde a e b são constantes. Vamos mostrar agora que esse processo pode ser aplicado, de fato, a uma classe muito maior de equações.

Vamos usar x, em vez de t, para denotar a variável independente nesta seção por duas razões. Em primeiro lugar, letras diferentes são utilizadas com frequência para as variáveis em uma equação diferencial, e você não deve ficar acostumado a um único par. Em particular, a letra x é muito usada para a variável independente. Além disso, queremos reservar t para outra coisa mais adiante na seção.

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2}$$

Consideramos equações lineares na seção precedente, mas se a Eq. (2) não for linear, então não existe método universalmente aplicável. Vamos considerar aqui uma subclasse das equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por integração direta.

Para identificar essa classe de equações, vamos primeiro colocar a Eq. (2) na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Sempre é possível fazer isso definindo $M(x,y) = -f(x,y)$ e $N(x,y) = 1$, mas também existem outras maneiras. Se acontecer que M só depende de x e que N só depende de y, então a Eq. (3) fica

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{4}$$

Tal equação é dita **separável** porque, se for escrita na forma diferencial

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \tag{5}$$

então, se você quiser, as parcelas envolvendo cada variável podem ser colocadas em lados opostos do sinal de igualdade. A forma diferencial (5) também é mais simétrica e tende a diminuir a diferença entre a variável independente e a dependente.

Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N. Vamos ilustrar o processo em um exemplo e depois discuti-lo em geral para a Eq. (4).

EXEMPLO 1

Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \tag{6}$$

é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais.

Se colocarmos a Eq. (6) na forma

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{7}$$

ela tem a forma (4) e é, portanto, separável. Lembre-se do cálculo que, se y é uma função de x, então, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y)\,\frac{dy}{dx} = f'(y)\frac{dy}{dx}.$$

Por exemplo, se $f(y) = y - y^3/3$, então

$$\frac{d}{dx}(y - y^3/3) = (1 - y^2)\frac{dy}{dx}.$$

Logo, o segundo termo na Eq. (7) é a derivada de $y - y^3/3$ em relação a x e o primeiro é a derivada de $-x^3/3$. Assim, a Eq. (7) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3}\right) = 0.$$

Portanto, integrando, obtemos

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \tag{8}$$

onde c é uma constante arbitrária. A Eq. (8) é uma equação para as curvas integrais da Eq. (6). A Figura 2.2.1 mostra um campo de direções e diversas curvas integrais. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (8) é uma solução da Eq. (6). Uma equação para a curva integral que contém um ponto particular (x_0,y_0) pode ser encontrada substituindo-se x e y, respectivamente, por x_0 e y_0 na Eq. (8) para determinar o valor correspondente de c.

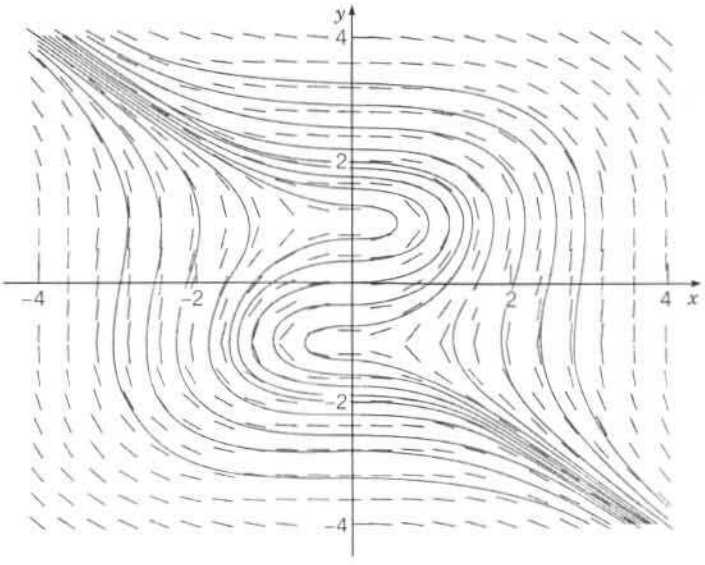


FIGURA 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais para $y' = x^2/(1 - y^2)$.

Essencialmente o mesmo procedimento pode ser seguido para qualquer equação separável. Voltando à Eq. (4), sejam H_1 e H_2 duas primitivas quaisquer de M e N, respectivamente. Logo

$$H_1'(x) = M(x), \qquad H_2'(y) = N(y), \tag{9}$$

e a Eq. (4) fica

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{10}$$

De acordo com as regra da cadeia,

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}H_2(y)\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}H_2(y). \tag{11}$$

Em consequência, podemos escrever a Eq. (10) como

$$\frac{d}{dx}[H_1(x) + H_2(y)] = 0. \tag{12}$$

Integrando a Eq. (12), obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \tag{13}$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (13) é uma solução da Eq. (4); em outras palavras, a Eq. (13) define a solução implicitamente, em vez de explicitamente. Na prática a Eq. (13) é obtida, em geral, da Eq. (5) integrando-se a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y.

A equação diferencial (4), junto com uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{14}$$

forma um problema de valor inicial. Para resolver esse problema de valor inicial, precisamos determinar o valor apropriado da constante c na Eq. (13). Esse valor é obtido fazendo-se $x = x_0$ e $y = y_0$ na Eq. (13), resultando em

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \tag{15}$$

Substituindo c na Eq. (13) por esse valor e observando que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^{x} M(s)\,ds, \qquad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^{y} N(s)\,ds,$$

obtemos

$$\int_{x_0}^{x} M(s)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(s)\,ds = 0. \tag{16}$$

A Eq. (16) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (4) que satisfaz a condição inicial (14). Você deve ter em mente o fato de que, para obter uma fórmula explícita para a solução, é preciso resolver a Eq. (16) para y como função de x. Infelizmente, muitas vezes isso é impossível analiticamente; em tais casos, você pode apelar para métodos numéricos para encontrar valores aproximados de y para valores dados de x.

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1, \tag{17}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

A equação diferencial pode ser escrita como

$$2(y-1)\,dy = (3x^2 + 4x + 2)\,dx.$$

Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y e a expressão à direita em relação a x, obtemos

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \tag{18}$$

onde c é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, fazemos $x = 0$ e $y = -1$ na Eq. (18), obtendo $c = 3$. Logo a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \tag{19}$$

Para obter a solução explícita, precisamos resolver a Eq. (19) para y em função de x. Isso é fácil neste caso, já que a Eq. (19) é do segundo grau em y; obtemos então

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \tag{20}$$

A Eq. (20) nos fornece duas soluções da equação diferencial, mas apenas uma delas satisfaz a condição inicial. Essa é a solução correspondente ao sinal de menos na Eq. (20), de modo que, finalmente, obtemos

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \tag{21}$$

como solução do problema de valor inicial (17). Note que, se o sinal de mais fosse escolhido erradamente na Eq. (20), obteríamos a solução da mesma equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0) = 3$. Finalmente, para determinar o intervalo no qual a solução (21) é válida, precisamos encontrar o intervalo no qual a expressão dentro da raiz quadrada é positiva. O único zero real dessa expressão é $x = -2$, de modo que o intervalo desejado é $x > -2$. A solução do problema de valor inicial e algumas outras curvas integrais da equação diferencial estão ilustradas na Figura 2.2.2. Observe que a fronteira do intervalo de validade da solução (21) é determinado pelo ponto $(-2,1)$ no qual a reta tangente é vertical.

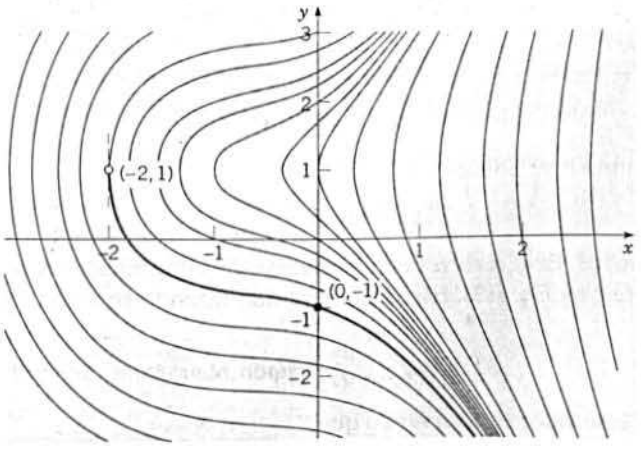


FIGURA 2.2.2 Curvas integrais para $y' = (3x^2 + 4x + 2)/[2(y-1)]$.

EXEMPLO 3

Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \tag{22}$$

e desenhe gráficos de diversas curvas integrais. Encontre, também, a solução que contém o ponto (0,1) e determine seu intervalo de validade.

Colocando a Eq. (22) na forma

$$(4 + y^3)\,dy = (4x - x^3)\,dx,$$

integrando, multiplicando por 4 e arrumando os termos, obtemos

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, \tag{23}$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (23) é uma solução da equação diferencial (22). A Figura 2.2.3 mostra gráficos da Eq. (23) para diversos valores de c.

Para encontrar a solução particular que contém o ponto (0,1), fazemos $x = 0$ e $y = 1$ na Eq. (23), obtendo $c = 17$. Logo, a solução em pauta é dada implicitamente por

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \tag{24}$$

Ela corresponde à curva mais grossa na Figura 2.2.3. O intervalo de validade dessa solução estende-se dos dois lados do ponto inicial enquanto a função permanecer diferenciável. Da figura, vemos que o intervalo termina quando encontramos pontos onde a tangente é vertical. Segue da equação diferencial (22) que esses pontos correspondem a $4 + y^3 = 0$, ou $y = (-4)^{1/3} \cong -1{,}5874$. Da Eq. (24), os valores correspondentes de x são $x \cong \pm 3{,}3488$. Esses pontos estão marcados na Figura 2.2.3.

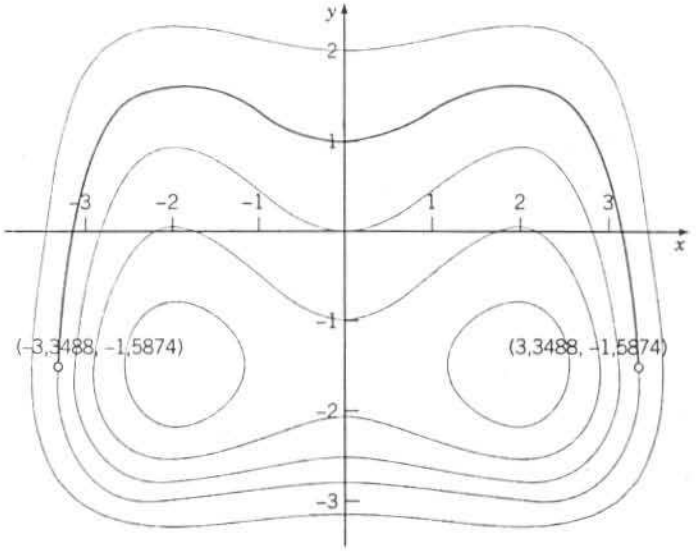


FIGURA 2.2.3 Curvas integrais para $y' = (4x - x^3)/(4 + y^3)$. A curva mais grossa corresponde à solução contendo o ponto (0, 1).

Nota 1: Algumas vezes uma equação da forma (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

tem uma solução constante $y = y_0$. Em geral, tal solução é fácil de encontrar porque, se $f(x,y_0) = 0$ para algum valor de y_0 e para todo x, então a função constante $y = y_0$ é solução da equação diferencial (2). Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y - 3)\cos x}{1 + 2y^2} \tag{25}$$

tem a solução constante $y = 3$. Outras soluções dessa equação podem ser obtidas separando-se as variáveis e integrando-se.

Nota 2: A investigação de uma equação não linear de primeira ordem pode ser facilitada, algumas vezes, considerando-se tanto x quanto y como funções de uma terceira variável t. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{26}$$

Se a equação diferencial é

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}, \tag{27}$$

então, comparando os numeradores e denominadores nas Eqs. (26) e (27) obtemos o sistema

$$dx/dt = G(x,y), \qquad dy/dt = F(x,y). \tag{28}$$

À primeira vista pode parecer estranho que um problema possa ser simplificado substituindo-se uma única equação por duas, mas de fato o sistema (28) pode ser mais simples de analisar do que a Eq. (27). O Capítulo 9 trata de sistemas não lineares da forma (28).

Nota 3: Não foi difícil, no Exemplo 2, resolver explicitamente para y em função de x. No entanto, essa situação é excepcional e, muitas vezes, é melhor deixar a solução em forma implícita, como nos Exemplos 1 e 3. Assim, nos problemas a seguir e em outras seções onde aparecem equações não lineares as palavras "resolva a equação diferencial a seguir" significam encontrar a solução explicitamente se for conveniente, mas, caso contrário, encontrar uma equação que defina a solução implicitamente.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1))(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 20:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado em forma explícita.

(b) Desenhe o gráfico da solução.

(c) Determine (pelo menos aproximadamente) o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1-2x)y^2, \quad y(0) = -1/6$
10. $y' = (1-2x)/y, \quad y(1) = -2$
11. $x\,dx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2y), \quad y(0) = -2$
14. $y' = xy^3(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1+2y), \quad y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2+1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5), \quad y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$
19. $\operatorname{sen} 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1-x^2)^{1/2}dy = \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos Problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação dada analiticamente ou gerando-se gráficos de aproximações numéricas das soluções. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \qquad y(0) = 1$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

22. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \qquad y(1) = 0$$

e determine o intervalo de validade da solução.

Sugestão: Para encontrar o intervalo de validade, procure pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.

23. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2y^2 + xy^2, \qquad y(0) = 1$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

24. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \qquad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

25. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2\cos 2x/(3 + 2y), \qquad y(0) = -1$$

e determine onde a solução atinge seu valor máximo.

26. Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \qquad y(0) = 0$$

e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/3, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Determine o comportamento da solução em função do valor inicial y_0 quando t aumenta.

(b) Suponha que $y_0 = 0{,}5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t), \qquad y(0) = y_0 > 0.$$

(a) Determine o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

(b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.

(c) Encontre o intervalo de valores iniciais para os quais a solução fica no intervalo $3{,}99 < y < 4{,}01$ no instante $t = 2$.

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a função f na equação $dy/dx = f(x, y)$ puder ser expressa como uma função só de y/x, então a equação é dita homogênea[1]. Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações homogêneas de primeira ordem.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}. \tag{i}$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser colocada na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)}; \tag{ii}$$

logo, a Eq. (i) é homogênea.

(b) Introduza uma nova variável dependente v de modo que $v = y/x$, ou $y = xv(x)$. Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx.

[1]A palavra "homogênea" tem significados diferentes em contextos matemáticos distintos. As equações homogêneas consideradas aqui não têm nada a ver com as equações homogêneas que aparecerão no Capítulo 3 e em outros lugares.

(c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões no item (b) envolvendo v e dv/dx. Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v-4}{1-v},$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-4}{1-v}. \tag{iii}$$

Note que a Eq. (iii) é separável.

(d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente como função de x.

(e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).

(f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) depende, de fato, apenas da razão y/x. Isso significa que as curvas integrais têm a mesma inclinação em todos os pontos pertencentes a uma mesma reta contendo a origem, embora essa inclinação varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricos em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente em seus gráficos?

O método esboçado no Problema 30 pode ser usado em qualquer equação homogênea. Isto é, a substituição $y = xv(x)$ transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Essa última equação pode ser resolvida por integração direta e depois a substituição de v por y/x fornece a solução da equação original. Em cada um dos Problemas de 31 a 38:

(a) Mostre que a equação dada é homogênea.

(b) Resolva a equação diferencial.

(c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Elas são simétricas em relação à origem?

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2}$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x+3y}{2x+y}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3y}{x-y}$

36. $(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$

37. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2-3y^2}{2xy}$

38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2-x^2}{2xy}$

2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem

Equações diferenciais são de interesse para não matemáticos, principalmente por causa da possibilidade de serem usadas para investigar uma variedade de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e os parâmetros no problema. Essas equações permitem, muitas vezes, fazer previsões sobre como os processos naturais se comportarão em diversas circunstâncias. Muitas vezes é fácil permitir a variação dos parâmetros no modelo matemático em um amplo intervalo, enquanto isso poderia levar muito tempo ou ser muito caro, se não impossível, em um ambiente experimental. De qualquer modo, a modelagem matemática e a experimentação ou observação são criticamente importantes e têm papéis um tanto complementares nas investigações científicas. Modelos matemáticos são validados comparando-se suas previsões com resultados experimentais. Por outro lado, análises matemáticas podem sugerir as direções mais promissoras para exploração experimental e podem indicar, com boa precisão, que dados experimentais serão mais úteis.

Nas Seções 1.1 e 1.2 formulamos e investigamos alguns modelos matemáticos simples. Vamos começar recordando e expandindo algumas das conclusões a que chegamos naquelas seções. Independente do campo específico de aplicação, existem três passos identificáveis que estão sempre presentes na modelagem matemática.

Construção do Modelo. Neste estágio você traduz a situação física em expressões matemáticas, muitas vezes usando os passos listados no final da Seção 1.1. Talvez o ponto mais crítico neste estágio seja enunciar claramente o(s) princípio(s) físico(s) que, acredita-se, governam o processo. Por exemplo, foi observado em algumas circunstâncias que o calor passa de um corpo mais quente para um mais frio a uma taxa proporcional à diferença de temperaturas, que objetos se movem de acordo com a lei do movimento de Newton e que populações isoladas de insetos crescem a uma taxa proporcional à população atual. Cada uma dessas afirmações envolve uma taxa de variação (derivada) e, em consequência, quando expressas matematicamente levam a uma equação diferencial. A equação diferencial é um modelo matemático do processo.

É importante compreender que as equações matemáticas são, quase sempre, apenas uma descrição aproximada do processo real. Por exemplo, corpos movimentando-se a velocidades próximas à velocidade da luz não são governados pelas leis de Newton, as populações de insetos não crescem indefinidamente como enunciado devido a limitações de comida ou de espaço, e a transferência de calor é afetada por outros fatores além da diferença de temperatura. Assim, você deve estar sempre atento às limitações do modelo, de modo a só usá-lo quando for razoável acreditar em sua precisão. De maneira alternativa, você poderia adotar o ponto de vista de que as equações matemáticas descrevem exatamente as operações de um modelo físico simplificado ou ideal, que foi construído (ou imaginado) de maneira a incorporar as características mais importantes do processo real. Algumas vezes o processo de modelagem matemática envolve a substituição conceitual de um processo discreto por um contínuo. Por exemplo, o número de elementos em uma população de insetos varia em quantidades discretas; no entanto, se a população for muito grande, pode parecer razoável considerá-la como uma variável contínua e até falar de sua derivada.

Análise do Modelo. Uma vez formulado matematicamente o problema, você encontra, muitas vezes, o problema de resolver equações diferenciais ou, se não for possível, descobrir tudo que for possível sobre as propriedades da solução. Pode acontecer que o problema matemático seja muito difícil e, nesse caso, podem ser necessárias outras aproximações neste estágio que tornem o problema tratável matematicamente. Por exemplo, uma equação não linear pode ser aproximada por uma linear, ou um coeficiente que varia vagarosamente pode ser substituído por uma constante. É claro que tais aproximações também têm que ser examinadas sob o ponto de vista físico, para se ter certeza de que o problema matemático simplificado ainda reflete as características essenciais do processo físico que está sendo investigado. Ao mesmo tempo, um conhecimento profundo da física do problema pode sugerir aproximações matemáticas razoáveis que tornarão o problema matemático mais suscetível a análises. Esse jogo entre a compreensão do fenômeno físico e o conhecimento das técnicas matemáticas e de suas limitações é característico da matemática aplicada em sua melhor forma e é indispensável na construção de modelos matemáticos úteis e de sucesso para processos físicos complicados.

Comparação com Experimentos ou Observações. Finalmente, tendo obtido a solução (ou, pelo menos, alguma informação sobre ela) você precisa interpretar essa informação no contexto do problema. Em particular, você sempre deve verificar se a solução matemática parece ser fisicamente razoável. Se possível, calcule os valores da solução em pontos selecionados e compare-os com valores observados experimentalmente. Ou pergunte se o comportamento da solução depois de um longo período de tempo é consistente com as observações. Ou examine as soluções correspondentes a determinados valores particulares dos parâmetros do problema. É claro que o fato de que a solução matemática parece ser razoável não garante que está correta. No entanto, se as previsões do modelo matemático estão seriamente inconsistentes com as observações do sistema físico que o modelo supostamente deve descrever, isso sugere que foram cometidos erros na resolução do problema matemático, que o modelo matemático propriamente dito precisa ser refinado ou que as observações devem ser feitas com mais cuidado.

Os exemplos nesta seção são típicos de aplicações nas quais aparecem equações diferenciais de primeira ordem.

EXEMPLO 1
Mistura

No instante $t = 0$ um tanque contém Q_0 libras de sal dissolvidos em 100 galões de água; veja a Figura 2.3.1. Suponha que está entrando no tanque, a uma taxa de r galões por minuto, água contendo ¼ de libra de sal por galão[†] e que a mistura bem mexida está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer instante t e encontre, tam-

[†] Uma libra é da ordem de 435,5 gramas e um galão americano corresponde a 3,785 litros, de modo que essa taxa corresponde a aproximadamente 0,3 g/L. (N.T.)

bém, a quantidade limite Q_L presente após um período de tempo bem longo. Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_L. Encontre, também, a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não seja maior do que 45 minutos.

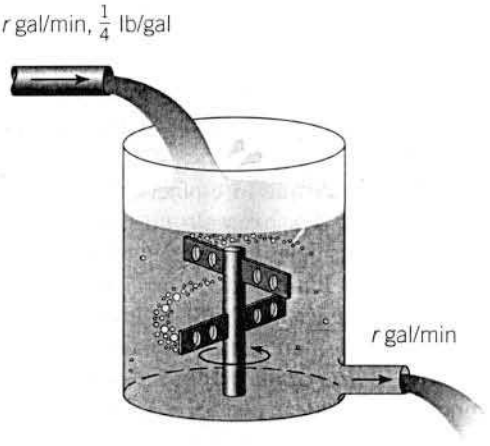


FIGURA 2.3.1 O tanque de água do Exemplo 1.

Vamos supor que o sal não é criado nem destruído no tanque. Portanto, as variações na quantidade de sal são devidas somente aos fluxos de entrada e de saída do tanque. Mais precisamente, a taxa de variação de sal no tanque, dQ/dt, é igual à taxa segundo a qual o sal está entrando menos a taxa segundo a qual ele está saindo. Em símbolos,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}. \tag{1}$$

A taxa de entrada de sal no tanque é a concentração $\frac{1}{4}$ lb/gal (libra por galão) vezes a taxa de fluxo r gal/min (galões por minuto), ou $(r/4)$ lb/min. Para encontrar a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo, r gal/min. Como as taxas de fluxo de saída e de entrada são iguais, o volume de água no tanque permanece constante e igual a 100 gal: como a mistura está "bem mexida", a concentração é uniforme no tanque, a saber, $[Q(t)/100]$ lb/gal. Portanto, a taxa de saída do sal no tanque é $[rQ(t)/100]$ lb/min. Logo, a equação diferencial que governa esse processo é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}. \tag{2}$$

A condição inicial é

$$Q(0) = Q_0. \tag{3}$$

Pensando no problema fisicamente, poderíamos antecipar que em alguma hora a mistura original será essencialmente substituída pela mistura que está entrando, cuja concentração é $\frac{1}{4}$ lb/gal. Em consequência, poderíamos esperar que a quantidade de sal no tanque finalmente devesse ficar bem próxima de 25 lb. Também podemos encontrar a quantidade limite $Q_L = 25$ fazendo dQ/dt igual a zero na Eq. (2) e resolvendo a equação algébrica resultante para Q.

Para resolver o problema de valor inicial (2), (3) analiticamente, note que a Eq. (2) é tanto linear quanto separável. Colocando-a na forma-padrão para uma equação linear, temos

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}. \tag{4}$$

Assim, o fator integrante é $e^{rt/100}$ e a solução geral é

$$Q(t) = 25 + ce^{-rt/100}, \tag{5}$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (3) precisamos escolher $c = Q_0 - 25$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (2), (3) é

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}, \tag{6}$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0e^{-rt/100}. \tag{7}$$

Da Eq. (6) ou da (7) você pode ver que $Q(t) \to 25$ (lb) quando $t \to \infty$, de modo que o valor limite Q_L é 25, confirmando nossa intuição física. Além disso, $Q(t)$ se aproxima desse limite mais rapidamente quando r aumenta. Ao interpretar a solução (7), note que a segunda parcela à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no tanque no instante t, enquanto a primeira parcela fornece a quantidade de sal no tanque devida à ação dos fluxos. Gráficos das soluções para $r = 3$ e diversos valores de Q_0 estão ilustrados na Figura 2.3.2.

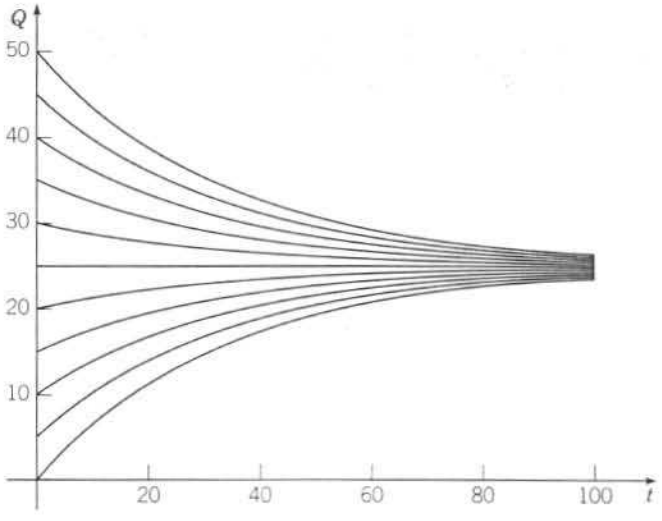


FIGURA 2.3.2 Soluções do problema de valor inicial (2), (3) para $r = 3$ e diversos valores de Q_0.

Suponha agora que $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L = 50$; então a Eq. (6) fica

$$Q(t) = 25 + 25e^{-0.05t}. \tag{8}$$

Como 2% de 25 é 0,5, queremos encontrar o instante T no qual $Q(t)$ tem o valor 25,5. Fazendo $t = T$ e $Q = 25{,}5$ na Eq. (8) e resolvendo para T, obtemos

$$T = (\ln 50)/0{,}03 \cong 130{,}4 \text{ (min)}. \tag{9}$$

Para determinar r de modo que $T = 45$, vamos voltar à Eq. (6), fazer $t = 45$, $Q_0 = 50$, $Q(t) = 25{,}5$ e resolver para r. O resultado é

$$r = (100/45) \ln 50 \cong 8{,}69 \text{ gal/min}. \tag{10}$$

Como esse exemplo é hipotético, a validade do modelo não está em discussão. Se as taxas de fluxo são como enunciadas e se a concentração de sal no tanque é uniforme, então a equação diferencial (1) é uma descrição precisa do processo de fluxo. Embora esse exemplo particular não tenha significado especial, modelos desse tipo são usados muitas vezes em problemas envolvendo poluentes em um lago ou um remédio em um órgão do corpo, por exemplo, em vez de um tanque com água salgada. Nesses casos, as taxas de fluxo podem não ser fáceis de determinar ou podem variar com o tempo. De maneira semelhante, a concentração pode estar longe de ser uniforme em alguns casos. Finalmente, as taxas de fluxo de entrada e de saída podem ser diferentes, o que significa que a variação de líquido no problema também tem que ser levada em consideração.

EXEMPLO 2 **Juros Compostos**

Suponha que é depositada uma quantia em dinheiro em um banco que paga juros a uma taxa anual r. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros quanto da taxa de juros. As instituições financeiras têm políticas variadas em relação à capitalização: em algumas a capitalização é mensal, em outras é semanal e algumas até capitalizam diariamente. Se supusermos que a capitalização é feita *continuamente*, podemos montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt, e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r vezes o valor atual do investimento $S(t)$. Então,

$$dS/dt = rS \tag{11}$$

é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos também o valor do investimento em algum instante particular, digamos

$$S(0) = S_0. \tag{12}$$

Então a solução do problema de valor inicial (11), (12) fornece o saldo total $S(t)$ na conta em qualquer instante t. Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial (11) é linear e separável. Logo, resolvendo as Eqs. (11) e (12), encontramos

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \tag{13}$$

Portanto, uma conta bancária com juros capitalizados continuamente cresce exponencialmente.

Vamos agora comparar os resultados desse modelo contínuo com a situação em que a capitalização acontece em intervalos finitos de tempo. Se os juros são capitalizados uma vez por ano, depois de t anos

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

Se os juros são capitalizados duas vezes por ano, ao final de seis meses o valor do investimento é $S_0[1 + (r/2)]$, e ao final do primeiro ano é $S_0[1 + (r/2)]^2$. Então, depois de t anos temos

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

Em geral, se os juros são capitalizados m vezes por ano, então

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{14}$$

A relação entre as fórmulas (13) e (14) fica mais clara se lembrarmos do cálculo que

$$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

O mesmo modelo também pode ser aplicado a investimentos mais gerais, onde podem ser acumulados dividendos e ganhos de capital, além dos juros. Em reconhecimento desse fato, vamos nos referir a r como sendo a taxa de retorno.

A Tabela 2.3.1 mostra o efeito da mudança na frequência da capitalização para uma taxa de retorno r de 8%. As segunda e terceira colunas foram calculadas da Eq. (14) para capitalização trimestral e diária, respectivamente, enquanto a quarta coluna foi calculada da Eq. (13) para capitalização contínua. Os resultados mostram que a frequência de capitalização não é tão importante na maioria dos casos. Por exemplo, durante um período de 10 anos a diferença entre capitalização trimestral e diária é de R$17,50 por R$1.000,00 investidos, ou menos de R$2,00 por ano. A diferença seria um pouco maior para taxas de retorno maiores e menor para taxas menores. Da primeira linha na tabela, vemos que para uma taxa de retorno de 8% o rendimento anual com capitalização trimestral é de 8,24%, e com capitalização diária ou contínua é de 8,33%.

TABELA 2.3.1 Crescimento de Capital para uma Taxa de Retorno $r = 8\%$ para Diversos Tipos de Capitalização

	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (14)		$S(t)/S(t_0)$
Anos	$m = 4$	$m = 365$	da Eq. (13)
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Retornando ao caso de capitalização contínua, vamos supor que podem existir depósitos ou retiradas, além do acúmulo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se supusermos que os depósitos ou retiradas ocorrem a uma taxa constante k, então a Eq. (11) é substituída por

$$dS/dt = rS + k,$$

ou, em forma-padrão,

$$dS/dt - rS = k, \tag{15}$$

onde k é positivo para depósitos e negativo para retiradas.

A Eq. (15) é linear com fator integrante e^{-rt}, de modo que sua solução geral é

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (12), precisamos escolher $c = S_0 + (k/r)$. Logo, a solução do problema de valor inicial (15), (12) é

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \tag{16}$$

A primeira parcela na expressão (16) é a parte devida à acumulação de retornos na quantidade inicial S_0, e a segunda parcela é a parte referente a depósitos ou retiradas a uma taxa k.

A vantagem de enunciar o problema desse modo geral, sem valores específicos para S_0, r ou k, é a generalidade da fórmula resultante (16) para $S(t)$. Com essa fórmula, podemos imediatamente comparar resultados de diferentes programas de investimento ou taxas de retorno diferentes.

Por exemplo, suponha que alguém abre uma conta para um plano de previdência privada (PPP) aos 25 anos com investimentos anuais de R$2.000,00 continuamente. Supondo uma taxa de retorno de 8%, qual será o saldo no PPP aos 65 anos? Temos $S_0 = 0$, $r = 0{,}08$, k = R$2.000,00 e queremos determinar $S(40)$. Da Eq. (16), temos

$$S(40) = (25.000)(e^{3,2} - 1) = \text{R\$588.313,00}. \tag{17}$$

É interessante notar que a quantidade total investida é R$80.000,00, de modo que a quantia restante de R$508.313,00 resulta do retorno acumulado do investimento. O saldo depois de 40 anos também é bastante sensível à taxa. Por exemplo, $S(40)$ = R$508.948,00 se $r = 0{,}075$ e $S(40)$ = R$681.508,00 se $r = 0{,}085$.

Vamos examinar as hipóteses que foram usadas no modelo. Primeiro, supusemos que o retorno é capitalizado continuamente e que o capital adicional é investido continuamente. Nenhuma dessas hipóteses é verdadeira em uma situação financeira real. Também supusemos que a taxa de retorno r é constante por todo o período envolvido, quando, de fato, ela provavelmente flutuará bastante. Embora não possamos prever taxas futuras com confiança, podemos usar a expressão (16) para determinar o efeito aproximado de projeções de taxas diferentes. Também é possível considerar r e k na Eq. (15) como funções de t, em vez de constantes; nesse caso, é claro que a solução pode ser muito mais complicada do que a Eq. (16).

O problema de valor inicial (15), (12) e a solução (16) também podem ser usados para analisar diversas outras situações financeiras, incluindo financiamentos para a casa própria, hipotecas e financiamentos para a compra de carros.

EXEMPLO 3

Produtos Químicos em uma Lagoa

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10 milhões de galões de água fresca. A água de um rio contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de galões por ano, e a mistura sai da lagoa através de um canal à mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$ g/gal (gramas por galão). Construa um modelo matemático desse fluxo e determine a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante. Desenhe o gráfico da solução e descreva em palavras o efeito da variação na concentração da água que entra na lagoa.

Como os fluxos de entrada e de saída de água são iguais, a quantidade de água na lagoa permanece constante, com 10^7 galões. Vamos denotar o tempo por t, medido em anos, e a massa do produto químico por $Q(t)$, medida em gramas. Este exemplo é semelhante ao Exemplo 1, e o mesmo princípio de entrada/saída pode ser aplicado. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída},$$

onde "taxa de entrada" e "taxa de saída" referem-se às taxas segundo as quais o produto químico flui para dentro e para fora da lagoa, respectivamente. A taxa segundo a qual o produto químico entra na lagoa é dada por

$$\text{taxa de entrada} = (5 \times 10^6)\ \text{gal/ano}\,(2 + \text{sen}\,2t)\ \text{g/gal}. \tag{18}$$

A concentração de produto químico na lagoa é de $Q(t)/10^7$ g/gal, de modo que a taxa de saída é

$$\text{taxa de saída} = (5 \times 10^6)\ \text{gal/ano}\,[Q(t)/10^7]\ \text{g/gal} = Q(t)/2\ \text{g/ano}. \tag{19}$$

Obtemos, então, a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \times 10^6)(2 + \text{sen}\,2t) - \frac{Q(t)}{2}, \tag{20}$$

onde cada termo tem unidades de g/ano.

Para tornar os coeficientes mais facilmente administráveis, é conveniente introduzir uma nova variável dependente definida por $q(t) = Q(t)/10^6$ ou $Q(t) = 10^6q(t)$. Isso significa que $q(t)$ é medida em milhões de grama, ou megagramas (toneladas). Se fizermos essa substituição na Eq. (20), então cada termo contém o fator 10^6, que pode ser cancelado. Se também transpusermos o termo envolvendo $q(t)$ para o lado esquerdo do sinal de

igualdade, temos, finalmente,

$$\frac{dq}{dt} + \tfrac{1}{2}q = 10 + 5\,\text{sen}\,2t. \tag{21}$$

Originalmente não havia produto químico na lagoa, de modo que a condição inicial é

$$q(0) = 0. \tag{22}$$

A Eq. (21) é linear e, embora a expressão à direita do sinal de igualdade seja uma função de t, o coeficiente de q é constante. Logo, o fator integrante é $e^{t/2}$. Multiplicando a Eq. (21) por esse fator e integrando a equação resultante, obtemos a solução geral

$$q(t) = 20 - \tfrac{40}{17}\cos 2t + \tfrac{10}{17}\,\text{sen}\,2t + ce^{-t/2}. \tag{23}$$

A condição inicial (22) obriga $c = -300/17$, de modo que a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

$$q(t) = 20 - \tfrac{40}{17}\cos 2t + \tfrac{10}{17}\,\text{sen}\,2t - \tfrac{300}{17}e^{-t/2}. \tag{24}$$

A Figura 2.3.3 mostra um gráfico da solução (24), junto com a reta $q = 20$. O termo exponencial na solução é importante para valores pequenos de t, mas diminui rapidamente quando t aumenta. Mais tarde, a solução vai consistir em uma oscilação, devido aos termos sen$(2t)$ e cos$(2t)$, em torno do nível constante $q = 20$. Note que se o termo sen$(2t)$ não estivesse presente na Eq. (21), então $q = 20$ seria a solução de equilíbrio daquela equação.

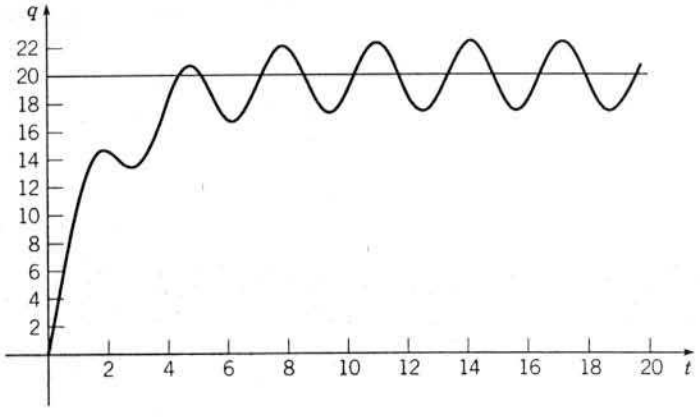


FIGURA 2.3.3 Solução do problema de valor inicial (21), (22).

Vamos considerar, agora, o quão adequado é o modelo matemático para esse problema. O modelo baseia-se em diversas hipóteses que ainda não foram enunciadas explicitamente. Em primeiro lugar, a quantidade de água na lagoa é inteiramente controlada pelas taxas de entrada e saída—nada se perde por evaporação ou por absorção pelo solo, e nada se ganha com a chuva. O mesmo é verdade do produto químico; ele entra e sai da lagoa, mas nada é absorvido por peixes ou outros organismos que vivem na lagoa. Além disso, supusemos que a concentração do produto químico é uniforme em toda a lagoa. Se os resultados obtidos com esse modelo são precisos ou não vai depender fortemente da validade dessas hipóteses simplificadoras.

EXEMPLO 4 Velocidade de Escape

Um corpo de massa constante m é projetado da Terra em uma direção perpendicular à superfície da Terra com uma velocidade inicial v_0. Supondo que não há resistência do ar, mas levando em consideração a variação do campo gravitacional da terra com a distância, encontre uma expressão para a velocidade durante o movimento resultante. Encontre, também, a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude máxima ξ acima da superfície da Terra e encontre a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retornará à superfície; esta última é a **velocidade de escape**.

Coloque o semieixo positivo dos x apontando para fora do centro da Terra ao longo da linha de movimento, com $x = 0$ correspondendo à superfície da Terra; veja a Figura 2.3.4. A figura está desenhada horizontalmente para lembrar você de que a gravidade está direcionada para o centro da terra, que não é necessariamente para baixo se olhado de uma perspectiva de longe da superfície da Terra. A força gravitacional agindo no corpo (isto é, seu peso) é inversamente proporcional ao quadrado da distância do centro da Terra e é dada por $w(x) = -k/(x + R)^2$, onde k é uma constante, R é o raio da Terra e o sinal de menos significa que $w(x)$ está orientada no sentido negativo do eixo dos x. Sabemos que na superfície da Terra $w(0)$ é dada por $-mg$, onde g é a aceleração devida à gravidade no nível do mar. Portanto $k = mgR^2$ e

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}. \tag{25}$$

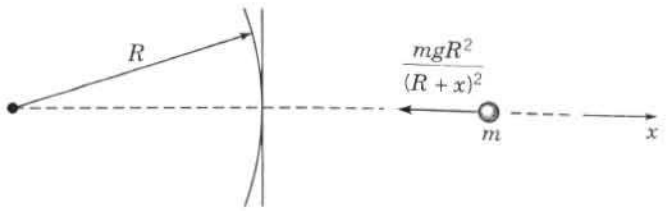


FIGURA 2.3.4 Um corpo no campo gravitacional da Terra.

Como não há outras forças agindo sobre o corpo, a equação de movimento é

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \tag{26}$$

e a condição inicial é

$$v(0) = v_0. \tag{27}$$

Infelizmente, a Eq. (26) envolve variáveis demais, já que depende de t, x e v. Para consertar essa situação vamos eliminar t da Eq. (26) pensando em x, em vez de t, como a variável independente. Então, podemos expressar dv/dt em função de dv/dx pela regra da cadeia; portanto,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

e a Eq. (26) é substituída por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \tag{28}$$

A Eq. (28) é separável, mas não linear, de modo que, separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. \tag{29}$$

Como $x = 0$ quando $t = 0$, a condição inicial (27) em $t = 0$ pode ser substituída pela condição $v = v_0$ quando $x = 0$. Logo $c = (v_0^2/2) - gR$ e

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}. \tag{30}$$

Note que a Eq. (30) fornece a velocidade como função da altitude, em vez do tempo. Deve-se escolher o sinal de mais se o corpo está subindo e o sinal de menos se está caindo.

Para determinar a altitude máxima ξ que o corpo alcança, fazemos $v = 0$ e $x = \xi$ na Eq. (30), e depois resolvemos para ξ, obtendo

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \tag{31}$$

Resolvendo a Eq. (31) para v_0, encontramos a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até a altitude ξ, a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{\xi}{R+\xi}}. \tag{32}$$

A velocidade de escape v_e é encontrada, então, fazendo $\xi \to \infty$. Logo,

$$v_e = \sqrt{2gR}. \tag{33}$$

O valor numérico de v_e é aproximadamente 6,9 mi/s (milhas por segundo), ou 11,1 km/s.

O cálculo precedente da velocidade de escape não leva em consideração o efeito da resistência do ar, de modo que a velocidade de escape real (incluindo o efeito da resistência do ar) é um pouco maior. Por outro lado, a velocidade de escape efetiva pode ser significativamente reduzida se o corpo for transportado a uma altura considerável acima do nível do mar antes de ser lançado. Ambas as forças, gravitacional e de atrito, são reduzidas; a resistência do ar, em particular, diminui muito rapidamente com o aumento da altitude. Você deve ter em mente, também, que pode muito bem ser impraticável dar uma velocidade inicial instantaneamente muito grande; veículos espaciais, por exemplo, recebem sua aceleração inicial durante alguns minutos.

PROBLEMAS

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto, e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ. Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.
3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, para-se o processo e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração-limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças[1] de sal. Água contendo uma concentração de sal de $(\frac{1}{4})[1 + (\frac{1}{2})\text{sen}t]$ onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
   (a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
   (b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
   (c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem uma saída perto do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t. O princípio de Torricelli[2] diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h.
   (a) Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
   (b) Igualando a taxa de saída à taxa de variação de líquido no tanque, mostre que $h(t)$ satisfaz a equação
   $$A(h)\frac{dh}{dt} = -\alpha a\sqrt{2gh}, \tag{i}$$
   onde $A(h)$ é a área da seção reta do tanque na altura h e a é a área da saída. A constante α é um coeficiente de contração responsável pelo fato observado de que a seção reta do fluxo (suave) de saída é menor do que a. O valor de α para a água é cerca de 0,6.
   (c) Considere um tanque de água em forma de um cilindro circular reto 3 m (metros) acima da saída. O raio do tanque é 1 m e o raio da saída circular é 0,1 m. Se o tanque está inicialmente cheio de água, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível da saída.
7. Suponha que determinada quantia S_0 está investida a uma taxa anual de retorno r capitalizada continuamente.
   (a) Encontre o tempo T necessário para a soma original dobrar de valor em função de r.
   (b) Determine T se $r = 7\%$.
   (c) Encontre a taxa de retorno que precisa ser alcançada se o investimento inicial deve dobrar em 8 anos.
8. Uma pessoa jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de retorno r. Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o retorno é capitalizado continuamente.
   (a) Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t.

[1] Uma onça tem aproximadamente 28 gramas, de modo que 50 onças têm aproximadamente 1417g. (N.T.)

[2] Evangelista Torricelli (1608-1647), sucessor de Galileu como matemático da corte em Florença, publicou esse resultado em 1644. Ele também é conhecido por ter construído o primeiro barômetro de mercúrio e por contribuições importantes em geometria.

(b) Se $r = 7{,}5\%$, determine k de modo que 1 milhão de reais esteja disponível para a aposentadoria em 40 anos.

(c) Se k = R$ 2.000,00 por ano, determine qual deve ser a taxa de retorno r para se ter 1 milhão de reais em 40 anos.

9. Um determinado universitário pede um empréstimo de R$8.000,00 para comprar um carro. A financeira cobra juros de 10% ao ano. Supondo que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos são feitos continuamente a uma taxa anual constante k, determine a taxa de pagamento necessária para quitar o empréstimo em 3 anos. Determine, também, quanto é pago de juros durante esses 3 anos.

10. O comprador de uma casa não pode gastar mais de R$ 800,00 por mês pelo seu financiamento. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é em 20 anos. Suponha que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.

(a) Determine a quantia máxima que esse comprador pode financiar.

(b) Determine os juros totais pagos durante o financiamento.

11. Um recém-formado pegou emprestados R$ 100.000,00 a uma taxa de juros de 9% ao ano para comprar um apartamento. Prevendo constantes aumentos de salário, ele espera pagar a uma taxa mensal de $800(1 + t/120)$, onde t é o número de meses desde o início do empréstimo.

(a) Supondo que o programa de pagamento pode ser mantido, quando o empréstimo estará quitado?

(b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual deve ser a quantia emprestada para que seja paga em exatamente 20 anos?

12. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby[3]. Esse é um meio para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, portanto de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5730 anos[4]), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório pode-se determinar com precisão a *proporção* da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(t)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.

(a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.

(b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t se $Q(0) = Q_0$.

(c) Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é de 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

13. A população de mosquitos em determinada área aumenta a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Inicialmente há 200.000 mosquitos na área e predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

14. Suponha que determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dy/dt = (0{,}5 + \operatorname{sen} t)y/5.$$

(a) Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobrou. Escolha outras condições iniciais e determine se o tempo de duplicação τ depende da população inicial.

(b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio 1/10. Determine o tempo de duplicação τ neste caso.

(c) Suponha que o termo sen t na equação diferencial é substituído por $\operatorname{sen}(2\pi t)$; ou seja, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente mais alta. Que efeito isso tem no tempo de duplicação τ?

(d) Faça o gráfico das soluções obtidas nos itens (a), (b) e (c) em um único conjunto de eixos.

---

[3]Willard F. Libby (1908-1980) nasceu na zona rural do estado de Colorado, nos Estados Unidos, e recebeu sua educação na Universidade da Califórnia em Berkeley. Desenvolveu o método de datação por carbono radioativo a partir de 1947, quando estava na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de química em 1960 por esse trabalho.

[4]*McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology* (8th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1997), Vol. 5, p. 48.

15. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$dy/dt = r(t)y - k, \qquad y(0) = y_0,$$

onde a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \text{sen}t)/5$ e k representa a taxa predatória.

(a) Suponha que $k = 1/5$. Faça gráficos de y em função de t para diversos valores de y_0 entre 1/2 e 1.

(b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população será extinta.

(c) Escolha outros valores de k e encontre a população crítica correspondente y_c para cada um deles.

(d) Use os dados encontrados nos itens (b) e (c) para fazer o gráfico de y_c em função de k.

16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café está a uma temperatura de 200°F† quando colocado na xícara e 1 minuto depois esfriou e está a 190°F em uma sala à temperatura de 70°F, determine quando o café alcança a temperatura de 150°F.

17. O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzman[5], é descrito pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \tag{i}$$

onde $u(t)$ é a temperatura absoluta do corpo no instante t, T é a temperatura absoluta do ambiente e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se u for muito maior do que T, as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas por soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \tag{ii}$$

Suponha que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000 K, está em um meio à temperatura de 300 K e que $\alpha = 2{,}0 \times 10^{-12}\,\text{K}^{-3}/s$.

(a) Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer resolvendo a Eq. (ii).

(b) Faça o gráfico de u em função de t.

(c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, ou seja, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro ao se usar a Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.

18. Considere uma caixa isolada termicamente (um prédio, talvez) com temperatura interna $u(t)$. De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \tag{i}$$

onde $T(t)$ é a temperatura do ambiente (externo). Suponha que $T(t)$ varia como uma senoide; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

(a) Resolva a Eq. (i) e expresse $u(t)$ em termos de t, k, T_0, T_1 e ω. Observe que parte de sua solução tende a zero quando t fica muito grande; essa é chamada de parte transiente. O restante da solução é chamado de estado estacionário; denote-o por $S(t)$.

(b) Suponha que t está medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para $T(t)$. Além disso, sejam $T_0 = 60°\text{F}$, $T_1 = 15°\text{F}$ e $k = 0.2/\text{h}$. Desenhe gráficos de $S(t)$ e de $T(t)$ em função de t nos mesmos eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de $S(t)$. Estime, também, a diferença de tempo τ entre os máximos correspondentes de $T(t)$ e de $S(t)$.

(c) Sejam k, T_0, T_1 e ω não especificados. Escreva a parte oscilatória de $S(t)$ na forma $R\cos[\omega(t - \tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para R e τ. Suponha que T_1 e ω têm os valores dados no item (b) e desenhe gráficos de R e τ em função de k.

19. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t, uma quantidade $Q(t)$ de poluentes distribuídos uniformemente em todo o lago com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que está entrando no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que está saindo água do lago à mesma taxa. Suponha também que são adicionados poluentes diretamente no lago a uma taxa constante P. Note que as hipóteses feitas não consideram uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos—por exemplo, a água que é adicionada ou perdida devido à precipitação, à absorção ou à evaporação; a estratificação em consequência das diferenças de temperatura em um lago profundo; a produção de baías protegidas, por causa de irregularidades na borda; e o fato de que os poluentes não

†A fórmula para conversão de Fahrenheit para Celsius é (F − 32)/9 = C/5. Então 200°F é, aproximadamente, 93°C. (N.T.)

[5]Jozef Stefan (1835-1893), professor de física em Viena, enunciou a lei de radiação empiricamente em 1879. Seu aluno Ludwig Boltzman (1844-1906) deduziu-a teoricamente dos princípios da termodinâmica em 1884. Boltzman é mais conhecido por seu trabalho pioneiro em mecânica estatística.

são depositados uniformemente em todo o lago (em geral), mas em pontos isolados em sua periferia. Os resultados a seguir têm que ser interpretados levando em consideração que não foram contemplados esses fatores.

(a) Se a concentração de poluentes no instante $t = 0$ é c_0, encontre uma expressão para a concentração $c(t)$ em qualquer instante t. Qual a concentração limite quando $t \to \infty$?

(b) Se a adição de poluentes no lago termina ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.

(c) A Tabela 2.3.2 contém dados[6] para os Grandes Lagos[†]. Usando esses dados, determine a partir do item (b) o tempo T necessário para reduzir a contaminação desses lagos a 10% de seu valor original.

TABELA 2.3.2 Dados sobre Volume e Fluxo dos Grandes Lagos

Lago	V ($km^3 \times 10^3$)	r (km^3/ano)
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

20. Uma bola com a massa de 0,15 kg é jogada para cima com velocidade inicial de 20 m/s do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.

(a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.

(b) Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.

(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.

21. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $|v|/30$, onde v é medida em m/s.

(a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.

(b) Encontre o instante em que ela bate no chão.

(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes no Problema 20.

22. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $v^2/1325$, onde v é medida em m/s.

(a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.

(b) Encontre o instante em que ela bate no chão.

(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes nos Problemas 20 e 21.

23. Um paraquedista pesando 180 lb (incluindo o equipamento) cai verticalmente de uma altura de 5000 pés[††] e abre o paraquedas depois de 10 s de queda livre. Suponha que a força de resistência do ar é de $0{,}75|v|$ quando o paraquedas está fechado e de $12|v|$ quando está aberto, onde a velocidade v está em pés/s.

(a) Encontre a velocidade do paraquedista quando o paraquedas abre.

(b) Encontre a distância percorrida até o paraquedas abrir.

(c) Qual a velocidade limite v_L depois que o paraquedas abre?

(d) Determine quanto tempo o paraquedista fica no ar depois que o paraquedas abre.

(e) Desenhe o gráfico da velocidade em função do tempo desde o início da queda até o paraquedista atingir o solo.

24. Um trenó-foguete, com velocidade inicial de 150 milhas/h, é freado por um canal de água. Suponha que, enquanto está sendo freado, a aceleração a do trenó é dada por $a(v) = -\mu v^2$, onde v é a velocidade e μ é uma constante.

(a) Como no Exemplo 4 do texto, use a relação $dv/dt = v(dv/dx)$ para escrever a equação de movimento em termos de v e de x.

---

[6]Esse problema baseia-se no artigo "*Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes*", de R. H. Rainey, publicado em *Science 155*(1967), pp.1242–1243; a informação na tabela foi tirada dessa fonte.

[†]Esses lagos ficam na fronteira entre os Estados Unidos e o Canadá. (N.T.)

[††]Um pé é da ordem de 30,5 centímetros, de modo que 5000 pés é aproximadamente 1524 m. (N.T.)

(b) Se for necessária uma distância de 2000 pés para diminuir a velocidade do trenó para 15 milhas/h, determine o valor de μ.

(c) Encontre o tempo τ necessário para diminuir a velocidade do trenó para 15 milhas/h.

25. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é constante. Não leve em consideração variações na força gravitacional.

(a) Encontre a altura máxima x_m alcançada pelo corpo e o instante t_m no qual essa altura máxima é atingida.

(b) Mostre que, se $kv_0/mg < 1$, então t_m e x_m podem ser expressos como

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right].$$

(c) Mostre que a quantidade kv_0/mg é adimensional.

26. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é constante. Suponha que a atração gravitacional da Terra é constante.

(a) Encontre a velocidade $v(t)$ do corpo em qualquer instante t.

(b) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $k \to 0$, ou seja, quando a resistência tende a zero. Esse resultado é igual à velocidade de uma massa m projetada para cima com uma velocidade inicial v_0 no vácuo?

(c) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $m \to 0$, isso é, quando a massa se aproxima de zero.

27. Um corpo caindo em um fluido relativamente denso, óleo, por exemplo, está sob a ação de três forças (veja a Figura 2.3.5): uma força de resistência R, um empuxo B e seu peso w devido à gravidade. O empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Para um corpo esférico de raio a se movimentando lentamente, a força de resistência é dada pela lei de Stokes, $R = 6\pi\mu a|v|$, onde v é a velocidade do corpo e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido[7].

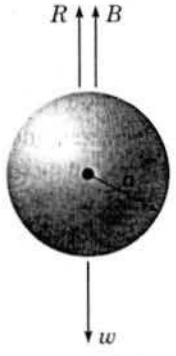


FIGURA 2.3.5 Um corpo caindo em um fluido denso.

(a) Encontre a velocidade limite de uma esfera sólida de raio a e densidade ρ caindo livremente em um meio de densidade ρ' e coeficiente de viscosidade μ.

(b) Em 1910, R. A. Millikan[8] estudou o movimento de gotículas de óleo caindo em um campo elétrico. Um campo de intensidade E exerce uma força Ee em uma gotícula com carga e. Suponha que E foi ajustado de modo que a gotícula é mantida estacionária ($v = 0$) e que w e B são dados como acima. Encontre uma expressão para e. Millikan repetiu esse experimento muitas vezes e, a partir dos dados coletados, deduziu a carga de um elétron.

---

[7]George Gabriel Stokes (1819-1903), professor em Cambridge, foi um dos primeiros matemáticos aplicados do século XIX. As equações básicas da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) são nomeadas em parte em sua homenagem, e um dos teoremas fundamentais do cálculo vetorial leva seu nome. Ele também foi um dos pioneiros na utilização de séries divergentes (assintóticas), um assunto de grande interesse e importância hoje em dia.

[8]Robert A. Millikan (1868-1953) estudou na Faculdade de Oberlin e na Universidade de Columbia. Mais tarde foi professor na Universidade de Chicago e no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Publicou em 1910 um trabalho contendo a determinação da carga do elétron. Recebeu o Prêmio Nobel em 1923 por esse trabalho e por outros estudos sobre o efeito fotoelétrico.

28. Uma massa de 0,25 kg cai a partir do repouso em um meio que oferece uma resistência de $0{,}2|v|$, onde v está em m/s.
    (a) Se a massa cai de uma altura de 30 m, encontre sua velocidade ao atingir o solo.
    (b) Se a massa não pode atingir uma velocidade maior do que 10 m/s, encontre a altura máxima da qual ela pode ser largada.
    (c) Suponha que a força de resistência é $k|v|$, onde v está em m/s e k é constante. Se a massa cai de uma altura de 30 m e tem que atingir o solo com uma velocidade menor ou igual a 10 m/s, determine o coeficiente de resistência k necessário.

29. Suponha que um foguete é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, onde R é o raio da Terra. Não considere a resistência do ar.
    (a) Encontre uma expressão para a velocidade v em função da distância x da superfície da Terra.
    (b) Encontre o tempo necessário para o foguete atingir 240.000 milhas (a distância aproximada da Terra à Lua). Suponha que $R = 4000$ milhas.

30. Sejam $v(t)$ e $w(t)$ as componentes horizontal e vertical, respectivamente, da velocidade de uma bola de beisebol rebatida (ou lançada). Na ausência de resistência do ar, v e w satisfazem as equações

$$dv/dt = 0, \qquad dw/dt = -g.$$

    (a) Mostre que

$$v = u\cos A, \qquad w = -gt + u\operatorname{sen} A,$$

    onde u é a velocidade escalar inicial da bola e A é o ângulo inicial de elevação.
    (b) Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical da bola no instante t. Se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$, encontre $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante t.
    (c) Sejam $g = 32$ pés/s^2, $u = 125$ pés/s e $h = 3$ pés. Desenhe a trajetória da bola para diversos valores do ângulo A, ou seja, faça os gráficos de $x(t)$ e $y(t)$ parametricamente.
    (d) Suponha que o muro que delimita o campo está a uma distância L e tem altura H. Encontre uma relação entre u e A que tem que ser satisfeita se a bola passa por cima do muro.
    (e) Suponha que $L = 350$ pés e $H = 10$ pés. Usando a relação no item (d), encontre (ou estime a partir de um gráfico) o intervalo de valores de A que correspondem a uma velocidade escalar inicial $u = 110$ pés/s.
    (f) Para $L = 350$ e $H = 10$, encontre a velocidade escalar mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima do muro.

31. Um modelo mais realista (do que o no Problema 30) para a trajetória de uma bola de beisebol inclui o efeito da resistência do ar. Nesse caso as equações de movimento são

$$dv/dt = -rv, \qquad dw/dt = -g - rw,$$

    onde r é o coeficiente de resistência.
    (a) Determine $v(t)$ e $w(t)$ em termos da velocidade escalar inicial u e do ângulo inicial de elevação A.
    (b) Encontre $x(t)$ e $y(t)$ se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$.
    (c) Desenhe as trajetórias da bola para $r = 1/5$, $u = 125$, $h = 3$ e para diversos valores de A. Como essas trajetórias diferem das do Problema 31 com $r = 0$?
    (d) Supondo $r = 1/5$ e $h = 3$, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima de um muro a uma distância de 350 pés com 10 pés de altura. Compare esse resultado com o do Problema 30(f).

32. **O Problema da Braquistócrona.** Um dos problemas famosos na história da matemática é o problema da braquistócrona[9]: encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até outro ponto Q, onde o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente debaixo (veja a Figura 2.3.6). Este problema foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio para os matemáticos da época. Johann Bernoulli e seu irmão Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e o Marquês de L'Hospital encontraram soluções corretas. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

    Ao resolver este problema, é conveniente colocar a origem no ponto superior P e orientar os eixos conforme ilustrado na Figura 2.3.6. O ponto mais baixo Q tem coordenadas (x_0, y_0). É possível mostrar, então, que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

[9]A palavra "braquistócrona" vem das palavras gregas *brachisto*, que significa a mais curta, e *chronos*, que significa tempo.

$$(1 + y'^2)y = k^2, \tag{i}$$

onde k^2 é uma certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

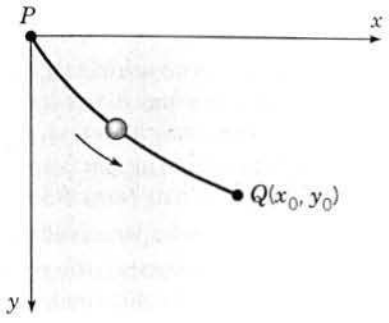


FIGURA 2.3.6 A braquistócrona.

(a) Resolva a Eq. (i) para y'. Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?

(b) Introduza uma nova variável t pela relação

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \tag{ii}$$

Mostre que a equação encontrada no item (a) fica, então, na forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t\, dt = dx. \tag{iii}$$

(c) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (iii) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

$$x = k^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)/2, \qquad y = k^2(1 - \cos\theta)/2. \tag{iv}$$

As Equações (iv) são equações paramétricas da solução da Eq. (i), que contém o ponto (0,0). O gráfico das Eq. (iv) é chamado de **cicloide**.

(d) Se fizermos uma escolha apropriada da constante k, então a cicloide também contém o ponto (x_0, y_0) e é a solução do problema da braquistócrona. Encontre k se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não Lineares

Até agora estivemos basicamente interessados em mostrar que equações de primeira ordem podem ser usadas para investigar muitos tipos diferentes de problemas nas ciências naturais e em apresentar métodos para resolver tais equações se forem lineares ou separáveis. Agora está na hora de considerar algumas questões mais gerais de equações diferenciais e explorar com mais detalhes algumas diferenças importantes entre equações lineares e não lineares.

Existência e Unicidade de Soluções. Até agora discutimos uma série de problemas de valor inicial, cada um dos quais tinha uma solução e, aparentemente, apenas uma. Isso levanta a questão sobre se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações de primeira ordem. Em outras palavras, todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução? Esse é um ponto importante até para não-matemáticos. Se você encontrar um problema de valor inicial ao investigar algum problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar muito tempo e esforço tentando resolvê-lo. Além disso, se você encontrar uma solução você pode estar interessado em saber se deve continuar a busca por outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. Para equações lineares, as respostas para essas questões são dadas pelo teorema fundamental a seguir.

Teorema 2.4.1 Se as funções p e q são contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t) \tag{1}$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário dado.

Observe que o Teorema 2.4.1 diz que o problema de valor inicial dado *tem* uma solução e também que o problema tem *apenas uma* solução. Em outras palavras, o teorema afirma tanto a *existência* quanto a *unicidade* da solução do problema de valor inicial (1), (2). Além disso, ele diz que a solução existe em qualquer intervalo I contendo o ponto inicial t_0 e no qual os coeficientes p e q são contínuos. Isto é, a solução pode ser descontínua ou deixar de existir apenas em pontos onde pelo menos uma das funções p ou q é descontínua. Frequentemente tais pontos podem ser identificados de modo fácil.

A demonstração desse teorema está parcialmente contida na discussão na Seção 2.1 que nos levou à fórmula [Eq. (32) na Seção 2.1]

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + c, \tag{3}$$

onde [Eq. (30) na Seção 2.1]

$$\mu(t) = \exp \int p(t)\,dt. \tag{4}$$

A dedução dessas fórmulas na Seção 2.1 mostra que se a Eq. (1) tem solução, então ela tem que ser dada pela Eq. (3). Analisando um pouco melhor aquela dedução, também podemos concluir que a equação diferencial (1) tem que ter, de fato, uma solução. Como p é contínua para $\alpha < t < \beta$, segue que μ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável que nunca se anula. Multiplicando a Eq. (1) por $\mu(t)$, obtemos

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \tag{5}$$

Como μ e g são contínuas, a função μg é integrável e a Eq. (3) segue da Eq. (5). Além disso, a integral de μg é diferenciável, de modo que y dado pela Eq. (3) existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo a expressão para y da Eq. (3) na Eq. (1) ou (5), você pode verificar que essa expressão satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < t < \beta$. Finalmente, a condição inicial (2) determina a constante c unicamente, de modo que o problema de valor inicial só tem uma solução, o que completa a demonstração.

A Eq. (4) determina o fator integrante $\mu(t)$ a menos de um fator multiplicativo que depende do limite inferior de integração. Se escolhermos esse limite como sendo t_0, então

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^{t} p(s)\,ds, \tag{6}$$

e segue que $\mu(t_0) = 1$. Usando o fator integrante dado pela Eq. (6) e escolhendo também como t_0 o limite inferior de integração na Eq. (3), obtemos a solução geral da Eq. (1) na forma

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds + c\right]. \tag{7}$$

Para satisfazer a condição inicial (2), precisamos escolher $c = y_0$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (1), (2) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds + y_0\right], \tag{8}$$

onde $\mu(t)$ é dado pela Eq. (6).

Voltando nossa atenção para equações diferenciais não lineares, precisamos substituir o Teorema 2.4.1 por um teorema mais geral, como a seguir.

Teorema 2.4.2 Suponha que as funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em algum retângulo $\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0). Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$ existe uma única solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{9}$$

Observe que as hipóteses no Teorema 2.4.2 se reduzem às do Teorema 2.4.1 se a equação diferencial for linear. De fato, $f(t,y) = -p(t)y + g(t)$ e $\partial f/\partial y = -p(t)$, de modo que a continuidade de f e de $\partial f/\partial y$ é equivalente à continuidade de p e de g nesse caso. A demonstração do Teorema 2.4.1 foi relativamente simples porque se baseou na expressão (3), que fornece a solução de uma equação linear arbitrária. Não existe expressão correspondente para a solução da equação diferencial em (9), de modo que a demonstração do Teorema 2.4.2 é muito mais difícil. Ela é discutida até certo ponto na Seção 2.8 e, em mais profundidade, em livros mais avançados de equações diferenciais.

Observamos aqui que as condições enunciadas no Teorema 2.4.2 são suficientes para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial (9) em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$, mas elas não são necessárias. Em outras palavras, a conclusão permanece verdadeira sob hipóteses ligeiramente mais fracas sobre a função f. De fato, a existência de uma solução (mas não sua unicidade) pode ser estabelecida supondo-se apenas a continuidade de f.

Uma consequência geométrica importante da unicidade nos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente no ponto de interseção, em violação do Teorema 2.4.1 ou 2.4.2.

Vamos ver alguns exemplos.

EXEMPLO 1 Use o Teorema 2.4.1 para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \tag{10}$$

$$y(1) = 2 \tag{11}$$

tem uma única solução.

Colocando a Eq. (10) na forma-padrão (1), temos

$$y' + (2/t)y = 4t,$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Logo, para essa equação g é contínua para todo t, enquanto p só é contínua para $t < 0$ ou $t > 0$. O intervalo $t > 0$ contém o ponto inicial; portanto, o Teorema 2.4.1 garante que o problema (10), (11) tem uma única solução no intervalo $0 < t < \infty$. No Exemplo 3 da Seção 2.1, vimos que a solução desse problema de valor inicial é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0. \tag{12}$$

Suponha agora que mudamos a condição inicial (11) para $y(-1) = 2$. Então o Teorema 2.4.1 afirma que existe uma única solução para $t < 0$. Como você pode verificar facilmente, a solução é dada, de novo pela Eq. (12), só que agora no intervalo $-\infty < t < 0$.

EXEMPLO 2 Aplique o Teorema 2.4.2 ao problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{13}$$

Note que o Teorema 2.4.1 não é aplicável neste caso, já que a equação diferencial não é linear. Para aplicar o Teorema 2.4.2, observe que

$$f(x,y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}.$$

Assim, cada uma dessas funções é contínua em toda parte, exceto na reta $y = 1$. Logo, podemos desenhar um retângulo em torno do ponto inicial $(0,-1)$ no qual as funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas. Portanto, o Teorema 2.4.2 garante que o problema de valor inicial tem uma única solução em algum intervalo em torno de $x = 0$. No entanto, embora o retângulo possa ser esticado indefinidamente para x positivo e negativo isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo x. De fato, o problema de valor inicial (13) foi resolvido no Exemplo 2 da Seção 2.2, e a solução só existe para $x > -2$.

Suponha que mudamos a condição inicial para $y(0) = 1$. O ponto inicial agora está na reta $y = 1$, de modo que não podemos desenhar nenhum retângulo em torno dele no qual f e $\partial f/\partial y$ sejam contínuas. Então o Teorema 2.4.2 não diz nada sobre soluções possíveis para esse problema modificado. No entanto, se separarmos as variáveis e integrarmos, como na Seção 2.2, veremos que

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

Além disso, se $x = 0$ e $y = 1$, então $c = -1$. Finalmente, resolvendo para y, obtemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. \tag{14}$$

A Eq. (14) nos dá duas funções que satisfazem a equação diferencial para $x > 0$ e também satisfazem a condição inicial $y(0) = 1$.

EXEMPLO 3

Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{15}$$

para $t \geq 0$. Aplique o Teorema 2.4.2 a este problema de valor inicial e depois resolva o problema.

A função $f(t, y) = y^{1/3}$ é contínua em toda a parte, mas $\partial f/\partial y$ não existe quando $y = 0$, logo não é contínua aí. Assim, o Teorema 2.4.2 não pode ser aplicado a este problema, e não podemos tirar nenhuma conclusão a partir dele. No entanto, pela observação após o Teorema 2.4.2 a continuidade de f garante a existência de soluções, mas não sua unicidade.

Para compreender melhor a situação, vamos resolver o problema, o que é fácil, já que a equação é separável. Temos

$$y^{-1/3}dy = dt,$$

de modo que

$$\tfrac{3}{2}y^{2/3} = t + c$$

e

$$y = \left[\tfrac{2}{3}(t + c)\right]^{3/2}.$$

A condição inicial é satisfeita se $c = 0$, logo

$$y = \phi_1(t) = \left(\tfrac{2}{3}t\right)^{3/2}, \qquad t \geq 0 \tag{16}$$

satisfaz ambas as Eqs. (15). Por outro lado, a função

$$y = \phi_2(t) = -\left(\tfrac{2}{3}t\right)^{3/2}, \qquad t \geq 0 \tag{17}$$

também é solução do problema de valor inicial. Além disso, a função

$$y = \psi(t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{18}$$

é mais uma solução. De fato, para qualquer t_0 positivo, as funções

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < t_0, \\ \pm\left[\tfrac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \tag{19}$$

são contínuas, diferenciáveis (em particular em $t = t_0$) e são soluções do problema de valor inicial (15). Portanto, este problema tem uma família infinita de soluções; veja a Figura 2.4.1, onde estão ilustradas algumas dessas soluções.

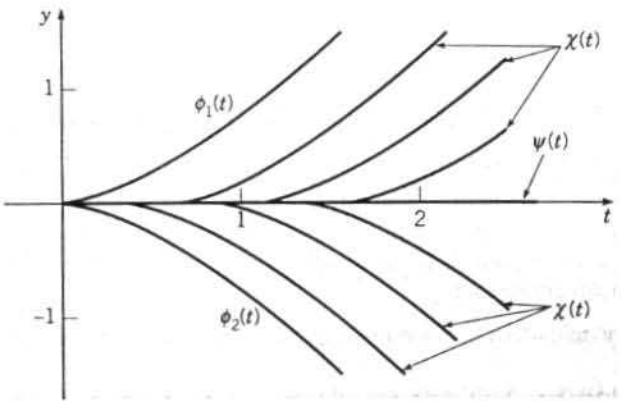


FIGURA 2.4.1 Diversas soluções do problema de valor inicial $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$.

Como já observamos, a falta de unicidade de soluções do problema (15) não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que ele não é aplicável se o ponto inicial pertencer ao eixo dos t. Se (t_0, y_0) é qualquer ponto que não pertence ao eixo dos t, no entanto, o teorema garante que existe uma única solução da equação diferencial $y' = y^{1/3}$ que contém o ponto (t_0, y_0).

Intervalo de Definição. De acordo com o Teorema 2.4.1, a solução de uma equação linear (1)

$$y' + p(t)y = g(t),$$

sujeita à condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe em qualquer intervalo em torno de t_0 no qual as funções p e q são contínuas. Assim, assíntotas verticais ou outras descontinuidades da solução só podem ocorrer em pontos de descontinuidade de p ou de q. Por exemplo, as soluções no Exemplo 1 (com uma exceção) são assintóticas ao eixo dos y, correspondendo à descontinuidade em $t = 0$ do coeficiente $p(t) = 2/t$, mas nenhuma das soluções tem outro ponto onde ela não existe ou não é diferenciável. A solução excepcional mostra que as soluções podem permanecer contínuas, às vezes, mesmo em pontos de descontinuidade dos coeficientes.

Por outro lado, para um problema de valor inicial não linear satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.4.2, o intervalo onde a solução existe pode ser difícil de determinar. A solução $y = \phi(t)$ certamente existe enquanto o ponto $[t,\phi(t)]$ permanece em uma região na qual as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas. Isso é o que determina o valor de h no teorema. No entanto, como $\phi(t)$ não é conhecida em geral, pode ser impossível localizar o ponto $[t,\phi(t)]$ em relação a essa região. De qualquer modo, o intervalo de existência da solução pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial $y' = f(t, y)$. Isso está ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 4

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1, \tag{20}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

O Teorema 2.4.2 garante que este problema tem uma única solução, já que $f(t, y) = y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em toda parte. Para encontrar a solução, separamos as variáveis e integramos, com o resultado que

$$y^{-2}\,dy = dt \tag{21}$$

e

$$-y^{-1} = t + c.$$

Então, resolvendo para y, temos

$$y = -\frac{1}{t + c}. \tag{22}$$

Para satisfazer a condição inicial, precisamos escolher $c = -1$, de modo que

$$y = \frac{1}{1 - t} \tag{23}$$

é a solução do problema de valor inicial dado. É claro que a solução torna-se ilimitada quando $t \to 1$; portanto, a solução só existe no intervalo $-\infty < t < 1$. Não há nenhuma indicação na equação diferencial propriamente dita, entretanto, que mostre que o ponto $t = 1$ é diferente de alguma maneira. Além disso, se a condição inicial for substituída por

$$y(0) = y_0, \tag{24}$$

então a constante c na Eq. (22) tem que ser igual a $c = -1/y_0$ e segue que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \tag{25}$$

é a solução do problema de valor inicial com condição inicial (24). Observe que a solução (25) torna-se ilimitada quando $t \to 1/y_0$, de modo que o intervalo de existência da solução é $-\infty < t < 1/y_0$ se $y_0 > 0$ e é $1/y_0 < t < \infty$ se $y_0 < 0$. Este exemplo ilustra outra característica de problemas de valor inicial para equações não lineares, a saber, que as singularidades da solução podem depender, de maneira essencial, tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

Solução Geral. Outro aspecto no qual as equações lineares e não lineares diferem está relacionado ao conceito de solução geral. Para uma equação linear de primeira ordem é possível obter uma solução contendo uma constante arbitrária, de onde podem ser obtidas todas as soluções possíveis atribuindo-se valores a essa constante. Isso pode não ocorrer para equações não lineares; mesmo que seja possível encontrar uma solução contendo uma constante arbitrária, podem existir outras soluções que não podem ser obtidas atribuindo-se valores a essa constante. Por exemplo, para a equação diferencial $y' = y^2$ no Exemplo 4, a expressão na Eq. (22) contém uma constante arbitrária, mas não inclui todas as soluções da

equação diferencial. Para mostrar isso, observe que a função $y = 0$ para todo t é, certamente, uma solução da equação diferencial, mas não pode ser obtida da Eq. (22) atribuindo-se um valor para c. Poderíamos prever, nesse exemplo, que algo desse tipo poderia ocorrer porque, para colocar a equação diferencial original na forma (21), tivemos que supor que y não se anula. Entretanto, a existência de soluções "adicionais" não é incomum para equações não lineares; um exemplo menos óbvio é dado no Problema 22. Assim, só usaremos a expressão "solução geral" quando discutirmos equações lineares.

Soluções Implícitas. Lembre-se novamente de que, para um problema de valor inicial para uma equação linear de primeira ordem, a Eq. (8) fornece uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Desde que seja possível encontrar as primitivas necessárias, o valor da solução em qualquer ponto pode ser determinado substituindo-se simplesmente o valor apropriado de t na equação. A situação para equações não lineares é muito menos satisfatória. Em geral, o melhor que podemos esperar é encontrar uma equação da forma

$$F(t, y) = 0 \tag{26}$$

envolvendo t e y que é satisfeita pela solução $y = \phi(t)$. Mesmo isso só pode ser feito para equações de certos tipos particulares, entre as quais as equações separáveis são as mais importantes. A Eq. (26) é chamada uma integral, ou primeira integral, da equação diferencial, e (como já observamos) seu gráfico é uma curva integral ou, talvez, uma família de curvas integrais. A Eq. (26), supondo que possa ser encontrada, define a solução implicitamente; isto é, para cada valor de t, precisamos resolver a Eq. (26) para encontrar o valor correspondente de y. Se a Eq. (26) for suficientemente simples, pode ser possível resolvê-la analiticamente para y, obtendo assim uma fórmula explícita para a solução. No entanto, com maior frequência isso não será possível, e você terá que recorrer a cálculos numéricos para determinar o valor (aproximado) de y para um valor dado de t. Uma vez calculados diversos pares de valores de t e de y, muitas vezes é útil colocá-los em um gráfico e depois esboçar a curva integral que os contém. Você deveria usar um computador para isso, se possível.

Os Exemplos 2, 3 e 4 são problemas não lineares nos quais é fácil encontrar uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Por outro lado, os Exemplos 1 e 3 na Seção 2.2 são casos nos quais é melhor deixar a solução em forma implícita e usar métodos numéricos para calculá-la para valores particulares da variável independente. Essa última situação é mais típica; a menos que a relação implícita seja quadrática em y ou tenha alguma outra forma particularmente simples, provavelmente não será possível resolvê-la exatamente por métodos analíticos. De fato, com frequência é impossível até encontrar uma expressão implícita para a solução de uma equação não linear de primeira ordem.

Construção Gráfica ou Numérica de Curvas Integrais. Devido à dificuldade em obter soluções analíticas exatas de equações não lineares, métodos que geram soluções aproximadas ou outras informações qualitativas sobre as soluções acabam tendo uma importância maior. Já descrevemos, na Seção 1.1, como o campo de direções de uma equação diferencial pode ser construído. O campo de direções pode mostrar, muitas vezes, a forma qualitativa das soluções, e também pode ser útil na identificação das regiões no plano ty onde as soluções exibem propriedades interessantes, que merecem uma investigação mais detalhada, analítica ou numérica. Métodos gráficos para equações de primeira ordem são mais discutidos na Seção 2.5. Uma introdução a métodos de aproximação numérica para equações de primeira ordem é dada na Seção 2.7, e uma discussão mais sistemática de métodos numéricos aparece no Capítulo 8. Entretanto, não é necessário estudar os algoritmos numéricos propriamente ditos para usar eficazmente um dos muitos pacotes de programas que geram e fazem gráficos de aproximações numéricas de soluções de problemas de valor inicial.

Sumário. A equação linear $y' + p(t)y = g(t)$ tem diversas propriedades boas que podem ser resumidas nas afirmações a seguir:

1. Supondo que os coeficientes são contínuos, existe uma solução geral, contendo uma constante arbitrária, que inclui todas as soluções da equação diferencial. Uma solução particular que satisfaz uma condição inicial dada pode ser encontrada escolhendo-se o valor apropriado para a constante arbitrária.
2. Existe uma expressão para a solução, a saber, Eq. (7) ou (8). Além disso, embora envolva duas integrações, a expressão fornece uma solução explícita para a solução $y = \phi(t)$, em vez de implícita.
3. Os possíveis pontos de descontinuidade, ou singularidades, da solução podem ser identificados (sem resolver o problema) simplesmente encontrando os pontos de descontinuidade dos coeficientes. Assim, se os coeficientes forem contínuos para todo t, a solução também existe e é contínua para todo t.

Nenhuma das afirmações acima é verdadeira, em geral, para equações não lineares. Embora uma equação não linear possa ter uma solução envolvendo uma constante arbitrária, também podem existir outras

soluções. Não existe fórmula geral para soluções de equações não lineares. Se você for capaz de integrar uma equação não linear, provavelmente vai obter uma equação definindo soluções implicitamente, em vez de explicitamente. Finalmente, as singularidades das soluções de equações não lineares só podem ser encontradas, em geral, resolvendo-se a equação e examinando-se a solução. É provável que as singularidades dependam tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t, \quad y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0, \quad y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t, \quad y(2) = 3$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, diga onde, no plano ty, as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas.

7. $y' = \dfrac{t-y}{2t+5y}$
8. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
9. $y' = \dfrac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$
10. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$
11. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+t^2}{3y-y^2}$
12. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(\cot t)y}{1+y}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0.

13. $y' = -4t/y, \quad y(0) = y_0$
14. $y' = 2ty^2, \quad y(0) = y_0$
15. $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$
16. $y' = t^2/y(1+t^3), \quad y(0) = y_0$

Em cada um dos Problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e desenhe (ou esboce) o gráfico de diversas soluções da equação diferencial dada. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t aumenta e como seus comportamentos dependem do valor inicial y_0 quando $t = 0$.

17. $y' = ty(3-y)$
18. $y' = y(3-ty)$
19. $y' = -y(3-ty)$
20. $y' = t - 1 - y^2$

21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}, y(0) = 0$, do Exemplo 3 no texto.
    (a) Existe uma solução que contém o ponto (1,1)? Se existe, encontre-a.
    (b) Existe uma solução que contém o ponto (2,1)? Se existe, encontre-a.
    (c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções têm em $t = 2$.
22. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1 - t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2+4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

    Onde essas soluções são válidas?
    (b) Explique por que a existência de duas soluções para o problema dado não contradiz a unicidade no Teorema 2.4.2.
    (c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c = -1$, a condição inicial também é satisfeita e obtemos a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que fornece a segunda solução $y = y_2(t)$.
23. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c.
    (b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação, a menos que $c = 0$ ou $c = 1$. Note que a equação no item (b) é não linear, enquanto a no item (a) é linear.
24. Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c.
25. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y + 0, \tag{i}$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t). \tag{ii}$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da Eq. (ii).

26. (a) Mostre que a solução (7) da equação linear geral (1) pode ser colocada na forma

$$y = cy_1(t) + y_2(t), \tag{i}$$

onde c é uma constante arbitrária. Identifique as funções y_1 e y_2.

(b) Mostre que y_1 é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(t)y = 0, \tag{ii}$$

correspondente a $g(t) = 0$.

(c) Mostre que y_2 é solução da equação linear geral (1). Veremos mais tarde (por exemplo, na Seção 3.5) que soluções de equações lineares de ordem mais alta têm um padrão semelhante ao da Eq. (i).

Equações de Bernoulli. Algumas vezes é possível resolver uma equação não linear fazendo uma mudança da variável dependente que a transforma em uma equação linear. O exemplo mais importante de tal equação é da forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli em honra a Jakob Bernoulli. Os Problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$ e $n = 1$.

(b) Mostre que, se $n \neq 0$ e $n \neq 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Em cada um dos Problemas de 28 a 31 é dada uma equação de Bernoulli. Em cada caso, resolva-a usando a substituição mencionada no Problema 27(b).

28. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \qquad t > 0$

29. $y' = ry - ky^2$, $r > 0$ e $k > 0$. Esta equação é importante em dinâmica populacional, e é discutida em detalhes na Seção 2.5.

30. $y' = \varepsilon y - \sigma y^3$, $\varepsilon > 0$ e $\sigma > 0$. Esta equação aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, onde Γ e T são constantes. Esta equação também aparece no estudo da estabilidade do fluxo de fluidos.

Coeficientes Descontínuos. Algumas vezes ocorrem equações diferenciais lineares com uma ou ambas as funções p e g tendo descontinuidades do tipo salto. Se t_0 é tal ponto de descontinuidade, é necessário resolver a equação separadamente para $t < t_0$ e para $t > t_0$. Depois, junta-se as duas soluções de modo que y seja contínua em t_0. Isso é feito por uma escolha apropriada das constantes arbitrárias. Os dois problemas a seguir ilustram essa situação. Note em cada caso que é impossível fazer y' contínua em t_0.

32. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 2y = g(t), \qquad y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

33. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + p(t)y = 0, \qquad y(0) = 1,$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Uma classe importante de equações de primeira ordem consiste naquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas **autônomas**, e têm a forma

$$dy/dt = f(y). \tag{1}$$

Vamos discutir essas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie dada, um assunto importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global. Algumas outras aplicações são mencionadas em alguns dos problemas. Lembre-se de que consideramos, nas Seções 1.1 e 1.2, o caso especial da Eq. (1) no qual $f(y) = ay + b$.

A Eq. (1) é separável, de modo que podemos aplicar a discussão feita na Seção 2.2, mas o objetivo principal desta seção é mostrar como métodos geométricos podem ser usados para se obter informação qualitativa importante sobre as soluções diretamente da equação diferencial sem resolvê-la. Os conceitos de estabilidade e instabilidade de soluções de equações diferenciais são fundamentais nesse esforço. Essas ideias foram introduzidas informalmente no Capítulo 1, mas sem usar essa terminologia. Vamos discuti-las mais aqui, e examiná-las em maior profundidade e em um contexto mais geral no Capítulo 9.

Crescimento Exponencial. Seja $y = \phi(t)$ a população de uma determinada espécie no instante t. A hipótese mais simples em relação à variação de população é que a taxa de variação de y é proporcional[10] ao valor atual de y; ou seja,

$$dy/dt = ry, \tag{2}$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada de **taxa de crescimento ou declínio**, dependendo se é positiva ou negativa. Vamos supor aqui que $r > 0$, de modo que a população está crescendo.

Resolvendo a Eq. (2) sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0, \tag{3}$$

obtemos

$$y = y_0 e^{rt}. \tag{4}$$

Assim, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (2), (3) com $r > 0$ prevê que a população vai crescer exponencialmente todo o tempo, como mostra a Figura 2.5.1 para diversos valores de y_0. Sob condições ideais, observou-se que a Eq. (4) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. Entretanto, é claro que tais condições ideais não podem continuar indefinidamente; alguma hora um fator como limitações de espaço, suprimento de comida ou de outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e terminará com o crescimento exponencial ilimitado.

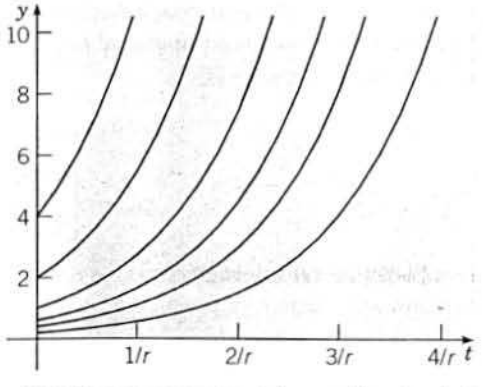


FIGURA 2.5.1 Crescimento exponencial: y em função de t para $dy/dt = ry$.

Crescimento Logístico. Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento da população depende, de fato, da população, substituímos a constante r na Eq. (2) por uma função $h(y)$ e obtivemos, então, a equação modificada

[10] Aparentemente, foi o economista inglês Thomas Malthus (1766-1834) quem observou primeiro que muitas populações biológicas aumentam a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.

$$dy/dt = h(y)y. \tag{5}$$

Agora queremos escolher $h(y)$ tal que $h(y) \cong r > 0$ quando y é pequeno, $h(y)$ diminui quando y aumenta e $h(y) < 0$ quando y é suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a também é uma constante positiva. Usando essa função na Eq. (5), obtemos

$$dy/dt = (r - ay)y. \tag{6}$$

A Eq. (6) é conhecida como a equação de Verhulst[11] ou **equação logística**. É muitas vezes conveniente escrever a equação logística na forma equivalente

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{7}$$

onde $K = r/a$. A constante r é chamada de **taxa de crescimento intrínseca**, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A interpretação de K ficará clara em breve.

Iremos investigar as soluções da Eq. (7) em detalhe mais tarde nesta seção. Antes disso, no entanto, vamos mostrar como você pode desenhar facilmente um esboço *qualitativamente correto* das soluções. Os mesmos métodos também se aplicam à equação mais geral (1).

Vamos primeiro procurar soluções da Eq. (7) do tipo mais simples possível, ou seja, funções constantes. Para tal solução, $dy/dt = 0$ para todo t, de modo que qualquer solução constante da Eq. (7) tem que satisfazer a equação algébrica

$$r(1 - y/K)y = 0.$$

Logo, as soluções constantes são $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$. Essas soluções são chamadas de **soluções de equilíbrio** da Eq. (7), já que não há variação ou mudança no valor de y quando t aumenta. Da mesma forma, soluções de equilíbrio da equação mais geral (1) podem ser encontradas localizando-se as raízes de $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ também são chamados de **pontos críticos**.

Para visualizar outras soluções da Eq. (7) e esboçar seus gráficos rapidamente podemos começar desenhando o gráfico de $f(y)$ em função de y. No caso da Eq. (7), $f(y) = r(1 - y/K)y$, logo o gráfico é a parábola ilustrada na Figura 2.5.2. As interseções com os eixos são $(0, 0)$ e $(K, 0)$, correspondendo aos pontos críticos da Eq. (7), e o vértice da parábola está em $(K/2, rK/4)$. Note que $dy/dt > 0$ para $0 < y < K$; portanto y é uma função crescente de t quando y está nesse intervalo; isso está indicado na Figura 2.5.2 pelas setas próximas ao eixo dos y apontando para a direita. Analogamente, se $y > K$, então $dy/dt < 0$, logo y é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na Figura 2.5.2.

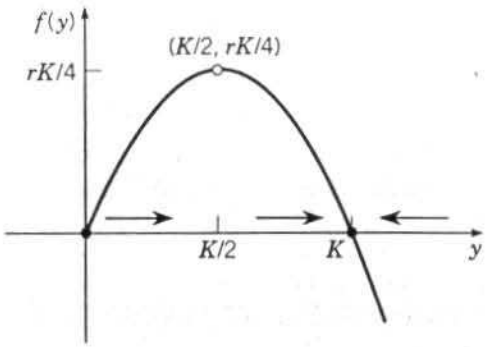


FIGURA 2.5.2 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

Nesse contexto, o eixo dos y é chamado muitas vezes de **reta de fase** e está reproduzido em sua orientação vertical usual na Figura 2.5.3*a*. Os pontos em $y = 0$ e $y = K$ são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio. As setas indicam novamente que y é crescente sempre que $0 < y < K$ e que y é decrescente quando $y > K$.

[11] P. F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu a Eq. (6) como um modelo para o crescimento populacional em 1838. Ele referiu-se a ele como crescimento logístico; por isso a Eq. (6) é chamada muitas vezes de equação logística. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. R. Pearl (1930) demonstrou concordância razoável com dados experimentais para populações de *drosophila melanogaster* (mosca da fruta), e G. F. Gause (1935) fez o mesmo para populações de *paramecium* e de *tribolium* (besouro castanho).

Além disso, da Figura 2.5.2 note que se y está próximo de zero ou de K, então a inclinação $f(y)$ está próxima de zero, de modo que as curvas-solução têm tangentes próximas da horizontal. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de y fica mais longe de zero ou de K.

Para esboçar os gráficos das soluções da Eq. (7) no plano ty, começamos com as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = K$; depois desenhamos outras curvas que são crescentes quando $0 < y < K$, decrescentes quando $y > K$ e cujas tangentes se aproximam da horizontal quando y se aproxima de 0 ou de K. Logo, os gráficos das soluções da Eq. (7) devem ter a forma geral ilustrada na Figura 2.5.5*b*, independentemente dos valores de r e de K.

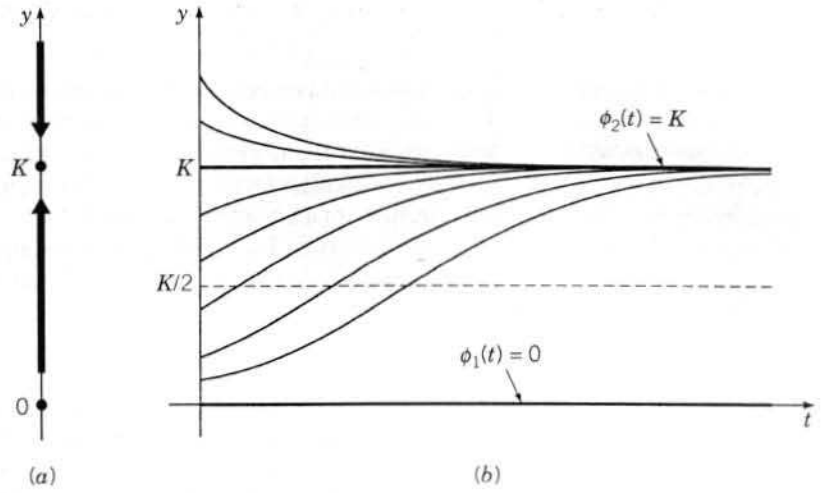


FIGURA 2.5.3 Crescimento logístico: $dy/dt = r(1 - y/K)y$. (a) A reta de fase. (b) Gráficos de y em função de t.

A Figura 2.5.3*b* parece mostrar que outras soluções intersectam a solução de equilíbrio $y = K$, mas isso é possível? Não, a parte de unicidade do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade, diz que apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano ty. Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$, elas não podem intersectá-la em tempo finito.

Para ir um pouco mais fundo na investigação, podemos determinar a concavidade das curvas-solução e a localização dos pontos de inflexão calculando d^2y/dt^2. Da equação diferencial (1), obtemos (usando a regra da cadeia)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \tag{8}$$

O gráfico de y em função de t é convexo quando $y'' > 0$, isto é, quando f e f' têm o mesmo sinal, e é côncavo quando $y'' < 0$, o que ocorre quando f e f' têm sinais contrários. Os sinais de f e de f' podem ser identificados facilmente do gráfico de $f(y)$ em função de y. Podem ocorrer pontos de inflexão quando $f'(y) = 0$.

No caso da Eq. (7), as soluções são convexas para $0 < y < K/2$, onde f é positiva e crescente (veja a Figura 2.5.2), de modo que f e f' são positivas. As soluções também são convexas para $y > K$, onde f é negativa e decrescente (f e f' são negativas). Para $K/2 < y < K$, as soluções são côncavas, já que f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. Toda vez que o gráfico de y em função de t cruza a reta $y = K/2$, aí há um ponto de inflexão. Os gráficos na Figura 2.5.3*b* exibem essas propriedades.

Finalmente, note que K é a cota superior que é aproximada, mas nunca excedida, por populações crescentes começando abaixo desse valor. Então, é natural nos referirmos a K como sendo o **nível de saturação**, ou **capacidade de sustentação ambiental**, para a espécie em questão.

Uma comparação entre as Figuras 2.5.1 e 2.5.3*b* revela que soluções da equação não linear (7) são muito diferentes das soluções da equação linear (1), pelo menos para valores grandes de t. Independentemente do valor de K, isto é, não importa quão pequeno seja o termo não linear na Eq. (7), as soluções dessa equação tendem a um valor finito quando $t \to \infty$, enquanto as soluções da Eq. (1) crescem (exponencialmente) sem limite quando $t \to \infty$. Assim, mesmo um termo não linear minúsculo na equação diferencial (7) tem um efeito decisivo na solução para valores grandes de t.

Em muitas situações, basta obter a informação qualitativa ilustrada na Figura 2.5.3*b* sobre uma solução $y = \phi(t)$ da Eq. (7). Essa informação foi inteiramente obtida a partir do gráfico de $f(y)$ como função de y, sem resolver a equação diferencial (7). Entretanto, se quisermos ter uma descrição mais detalhada

do crescimento logístico – por exemplo, se quisermos saber o número de elementos na população em um instante particular – então precisaremos resolver a Eq. (7) sujeita à condição inicial (3). Se $y \neq 0$ e $y \neq K$, podemos escrever (7) na forma

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = r\,dt.$$

Usando uma expansão em frações parciais na expressão à esquerda do sinal de igualdade, obtemos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right) dy = r\,dt.$$

Integrando, temos

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c, \tag{9}$$

onde c é uma constante arbitrária de integração a ser determinada da condição inicial $y(0) = y_0$. Já observamos que, se $0 < y_0 < K$, então y permanece nesse intervalo para todo o tempo. Então, nesse caso, podemos remover as barras de módulo na Eq. (9) e, calculando a exponencial de todos os termos na Eq. (9), vemos que

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = Ce^{rt}, \tag{10}$$

onde $C = e^c$. Para que a condição inicial $y(0) = y_0$ seja satisfeita, precisamos escolher $C = y_0/[1 - (y_0/K)]$. Usando esse valor de C na Eq. (10) e resolvendo para y, obtemos

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \tag{11}$$

Deduzimos a solução (11) sob a hipótese de que $0 < y_0 < K$. Se $y_0 > K$, os detalhes ao tratar com a Eq. (9) ficam ligeiramente diferentes, e deixamos a cargo do leitor mostrar que a Eq. (11) também é válida nesse caso. Finalmente, note que a Eq. (11) também contém as soluções de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$ correspondendo às condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_0 = K$, respectivamente.

Todas as conclusões qualitativas a que chegamos anteriormente por raciocínios geométricos podem ser confirmadas examinando-se a solução (11). Em particular, se $y_0 = 0$, então a Eq. (11) confirma que $y(t) = 0$ para todo t. Se $y_0 > 0$ e se fizermos $t \to \infty$ na Eq. (11), obteremos

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_0 K/y_0 = K.$$

Assim, para cada $y_0 > 0$ a solução tende à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = K$ assintoticamente quando $t \to \infty$. Portanto, a solução constante $\phi_2(t) = K$ é dita uma **solução assintoticamente estável** da Eq. (7), ou o ponto $y = K$ é dito um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico, assintoticamente estável. Depois de muito tempo a população está próxima de seu nível de saturação K, independentemente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo. Outras soluções tendem à solução de equilíbrio mais rapidamente quando r aumenta.

Por outro lado, a situação para a solução de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ é bem diferente. Mesmo soluções que começam muito próximas de zero crescem quanto t aumenta e, como vimos, tendem a K quando $t \to \infty$. Dizemos que $\phi_1(t) = 0$ é uma **solução de equilíbrio instável** ou que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio, ou ponto crítico, instável. Isso significa que a única maneira de garantir que a solução permaneça próxima de zero é fazer com que seu valor inicial seja *exatamente* igual a zero.

EXEMPLO 1

O modelo logístico tem sido aplicado ao crescimento natural da população de linguados gigantes em determinadas áreas do Oceano Pacífico.[12] Seja y, medido em quilogramas, a massa total, ou biomassa, da população de linguado gigante no instante t. Estima-se que os parâmetros na equação logística tenham os valores $r = 0{,}71$ por ano e $K = 80{,}5 \times 10^6$ kg. Se a biomassa inicial é $y_0 = 0{,}25K$, encontre a biomassa dois anos depois. Encontre, também, o instante τ para o qual $y(\tau) = 0{,}75K$.

[12]Uma boa fonte de informação sobre dinâmica populacional e economia envolvidas no uso eficiente de um recurso renovável, com ênfase em pesca, é o livro de Clark listado nas referências ao final deste capítulo. Os valores dos parâmetros usados aqui estão na página 53 daquele livro e foram obtidos de um estudo de H. S. Mohring.

É conveniente mudar a escala da solução (11), dividindo-a pela capacidade de sustentação K; assim, colocamos a Eq. (11) na forma

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{(y_0/K) + [1 - (y_0/K)]e^{-rt}}. \tag{12}$$

Usando os dados do problema, encontramos

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}75e^{-1{,}42}} \cong 0{,}5797.$$

Em consequência, $y(2) \cong 46{,}7 \times 10^6$ kg.

Para encontrar τ, resolvemos primeiro a Eq. (12) para t. Obtemos

$$e^{-rt} = \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]};$$

logo,

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]}. \tag{13}$$

Usando os valores dados para r e y_0/K e fazendo $y/K = 0{,}75$, encontramos

$$\tau = -\frac{1}{0{,}71} \ln \frac{(0{,}25)(0{,}25)}{(0{,}75)(0{,}75)} = \frac{1}{0{,}71} \ln 9 \cong 3{,}095 \text{ anos}.$$

A Figura 2.5.4 mostra os gráficos de y/K em função de t para os valores dados dos parâmetros e diversas condições iniciais.

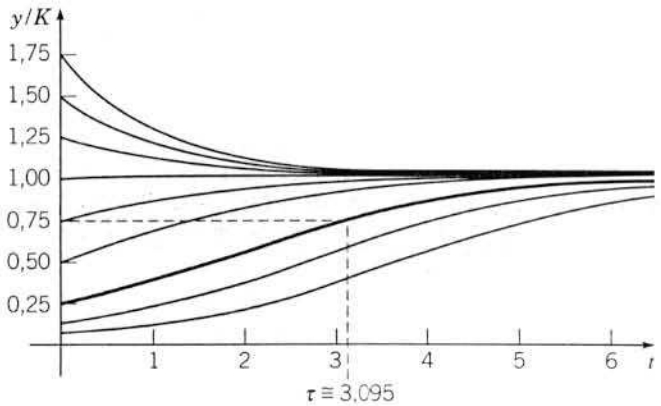


FIGURA 2.5.4 y/K em função de t para o modelo populacional de linguados gigantes no Oceano Pacífico.

Um Limiar Crítico. Vamos considerar agora a equação

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y, \tag{14}$$

onde r e T são constantes positivas dadas. Observe que (exceto pela substituição de K por T) essa equação só difere da equação logística (7) pela presença do sinal de menos na expressão à direita do sinal de igualdade. No entanto, como veremos, o comportamento das soluções da Eq. (14) é muito diferente do das soluções da Eq. (7).

Para a Eq. (14) o gráfico de $f(y)$ em função de y é a parábola ilustrada na Figura 2.5.5. As interseções com o eixo dos y são os pontos críticos $y = 0$ e $y = T$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0$ e $\phi_2(t) = T$. Se $0 < y < T$, então $dy/dt < 0$ e y é decrescente como função de t. Por outro lado, se $y > T$, então $dy/dt > 0$ e y é crescente como função de t. Assim, $\phi_1(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável e $\phi_2(t) = T$ é instável. Além disso, $f'(y)$ é negativa para $0 < y < T/2$ e positiva para $T/2 < y < T$, de modo que o gráfico de y em função de t é, respectivamente, convexo e côncavo nesses intervalos. Temos que $f'(y)$ é positiva para $y > T$, de modo que o gráfico de y em função de t também é convexo aqui.

A Figura 2.5.6*a* mostra a reta de fase (o eixo dos y) para a Eq. (14). Os pontos em $y = 0$ e $y = T$ são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio, e as setas indicam onde as soluções são crescentes ou decrescentes.

As curvas-solução da Eq. (14) agora podem ser esboçadas rapidamente. Primeiro desenhe as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = T$. Depois esboce curvas na faixa $0 < y < T$ decrescentes e mude a concavidade

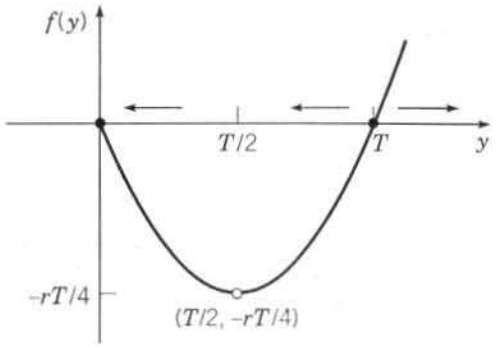


FIGURA 2.5.5 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)y$.

quando y cruza a reta $y = T/2$. A seguir, desenhe curvas acima de $y = T$ que aumentam cada vez mais rapidamente quando y e t aumentam. Certifique-se de que todas as curvas têm tangentes próximas da horizontal quando t está próximo de zero ou de T. O resultado é a Figura 2.5.6*b*, que é um esboço qualitativamente preciso de soluções da Eq. (14) para quaisquer valores de r e T. Dessa figura, parece que quando t aumenta y tende a zero ou cresce sem limite, dependendo se o valor inicial y_0 é menor ou maior do que T. Assim, T é um **limiar**, abaixo do qual não há crescimento.

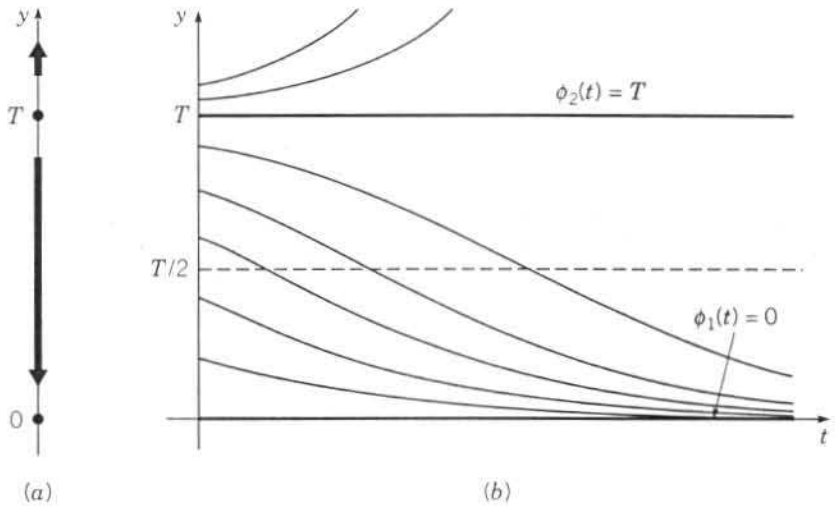


FIGURA 2.5.6 Crescimento com um limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)y$. (*a*) A reta de fase. (*b*) Gráficos de y em função de t.

Podemos confirmar as conclusões a que chegamos por meios geométricos resolvendo a equação diferencial (14). Isso pode ser feito por separação de variáveis e integração, exatamente como fizemos para a Eq. (7). Entretanto, se notarmos que a Eq. (14) pode ser obtida da Eq. (7) substituindo-se K por T e r por $-r$, podemos fazer as mesmas substituições na solução (11) para obter

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}, \tag{15}$$

que é a solução da Eq. (14) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

Se $0 < y_0 < T$, segue da Eq. (15) que $y \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso está de acordo com nossa análise geométrica qualitativa. Se $y_0 > T$, então o denominador na expressão à direita do sinal de igualdade da Eq. (15) se anula para um determinado valor finito de t. Vamos denotar esse valor por t^* e calculá-lo da fórmula

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

que nos dá

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{y_0}{y_0 - T}. \tag{16}$$

Assim, se a população inicial y_0 está acima do limiar T, o modelo com limiar prevê que o gráfico de y em função de t tem uma assíntota vertical em $t = t^*$. Em outras palavras, a população torna-se ilimitada em um tempo finito que depende de y_0, T e r. A existência e a localização dessa assíntota não apareceram na nossa análise geométrica, de modo que nesse caso a solução explícita forneceu uma informação importante qualitativa, e não só quantitativa.

A população de algumas espécies exibe o fenômeno de existência de limiar. Se estiverem presentes muito poucos, então a espécie não pode se propagar com sucesso e a população é extinta. No entanto, se uma população é maior do que o limiar, ela cresce ainda mais. É claro que a população não pode ficar ilimitada, de modo que alguma hora a Eq. (14) tem que ser modificada para levar isso em consideração.

Limiares críticos também ocorrem em outras circunstâncias. Por exemplo, em mecânica dos fluidos as equações da forma (7) ou (14) muitas vezes governam pequenos distúrbios y em um fluxo *laminar* (ou suave). Por exemplo, se a Eq. (14) é válida e $y < T$, então o distúrbio é amortecido e o fluxo laminar persiste. No entanto, se $y > T$, então o distúrbio aumenta e o fluxo laminar torna-se turbulento. Nesse caso, T é chamado de *amplitude crítica*. Pesquisadores falam em manter o nível de distúrbio em um túnel de vento suficientemente baixo para que possam estudar o fluxo laminar em um aerofólio, por exemplo.

Crescimento Logístico com Limiar. Como mencionamos na última subseção, o modelo com limiar (14) pode precisar ser modificado de modo a evitar crescimento ilimitado quando y está acima do limiar T. A maneira mais simples de fazer isso é introduzir outro fator que tornará dy/dt negativo para y grande. Vamos considerar, então,

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{17}$$

onde $r > 0$ e $0 < T < K$.

A Figura 2.5.7 mostra o gráfico de $f(y)$ em função de y. Neste problema existem três pontos críticos, $y = 0$, $y = T$ e $y = K$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = T$ e $\phi_3(t) = K$, respectivamente. É claro da Figura 2.5.7 que $dy/dt > 0$ para $T < y < K$ e, portanto, y é crescente aí. Temos $dy/dt < 0$ para $y < T$ e para $y > K$, logo y é decrescente nesses intervalos. Em consequência, as soluções de equilíbrio $\phi_1(t)$ e $\phi_3(t)$ são assintoticamente estáveis, enquanto que a solução $\phi_2(t)$ é instável.

A reta de fase para a Eq. (17) está ilustrada na Figura 2.5.8*a*, e os gráficos de algumas soluções estão esboçados na Figura 2.5.8*b*. Você deve se certificar de que compreende a relação entre essas duas figuras, assim como a relação entre as Figuras 2.5.7 e 2.5.8*a*. Da Figura 2.5.8*b* vemos que se y começa abaixo do limiar T, então y declina até à extinção. Por outro lado, se y começa acima de T, então y acaba, finalmente, se aproximando da capacidade de sustentação K. Os pontos de inflexão nos gráficos de y em função de t na Figura 2.5.8*b* correspondem aos pontos de máximo e mínimo relativos, y_1 e y_2, respectivamente, no gráfico de $f(y)$ em função de y na Figura 2.5.7. Esses valores podem ser obtidos diferenciando-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) em relação a y, igualando o resultado a zero e resolvendo para y. Obtemos

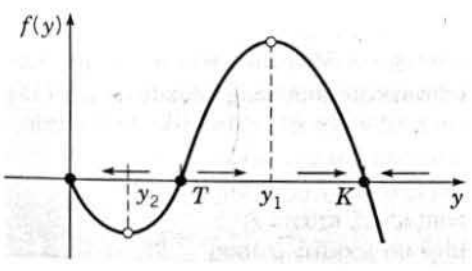


FIGURA 2.5.7 $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$.

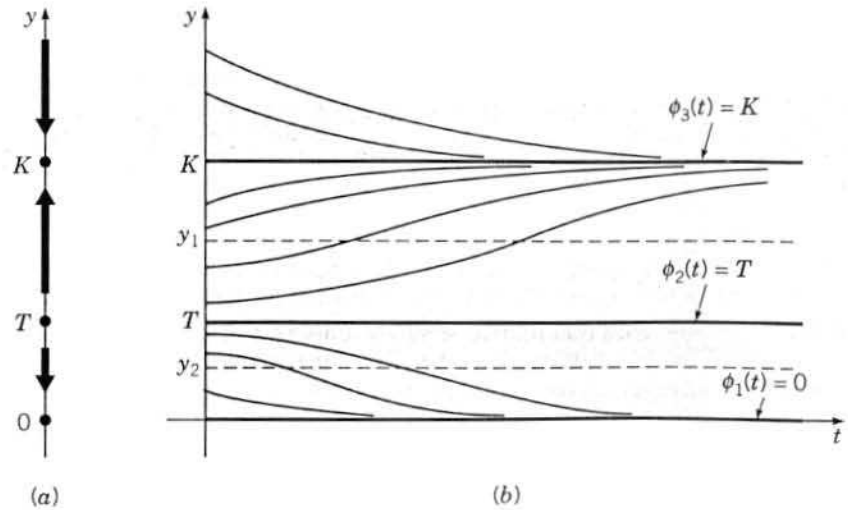


FIGURA 2.5.8 Crescimento logístico com limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$. (*a*) A reta de fase. (*b*) Gráficos de y em função de t.

$$y_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2})/3, \tag{18}$$

onde o sinal de mais corresponde a y_1 e o de menos a y_2.

Aparentemente, um modelo desse tipo descreve a população dos pombos viajantes,[13] presentes nos Estados Unidos em vastas quantidades até o final do século XIX. Foram muito caçados para comida e como esporte e, em consequência, por volta de 1880 seu número estava drasticamente reduzido. Parece que infelizmente os pombos viajantes só podiam se reproduzir quando presentes em uma grande concentração, correspondendo a um limiar relativamente alto T. Embora ainda existisse um número razoavelmente grande de pássaros no final da década de 1880, não havia uma quantidade suficiente em um único lugar para permitir a reprodução, e a população declinou rapidamente até a extinção. O último sobrevivente morreu em 1914. O declínio precipitado na população de pombos viajantes de números enormes até a extinção em poucas décadas foi um dos fatores iniciais que contribuíram para a preocupação com a conservação naquele país.

PROBLEMAS

Os Problemas de 1 a 6 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um como sendo assintoticamente estável ou instável. Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos de soluções no plano ty.

1. $dy/dt = ay + by^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad y_0 \geq 0$
2. $dy/dt = ay + by^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < y_0 < \infty$
3. $dy/dt = y(y-1)(y-2), \quad y_0 \geq 0$
4. $dy/dt = e^y - 1, \quad -\infty < y_0 < \infty$
5. $dy/dt = e^{-y} - 1, \quad -\infty < y_0 < \infty$
6. $dy/dt = -2(\arctan y)/(1+y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
7. **Soluções de Equilíbrio Semiestável.** Algumas vezes uma solução de equilíbrio constante tem a propriedade de que soluções de um lado da solução de equilíbrio tendem a se aproximar dela, enquanto soluções do outro lado tendem a se afastar (veja a Figura 2.5.9). Nesse caso, a solução de equilíbrio é dita **semiestável**.

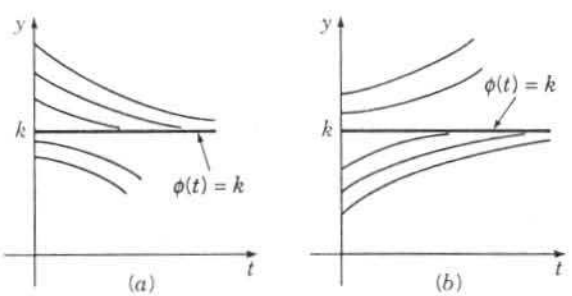


FIGURA 2.5.9 Em ambos os casos a solução de equilíbrio $\phi(t) = k$ é semiestável. (*a*) $dy/dt \leq 0$; (*b*) $dy/dt \geq 0$.

(a) Considere a equação

$$dy/dt = k(1-y)^2, \tag{i}$$

onde k é uma constante positiva. Mostre que $y = 1$ é o único ponto crítico, correspondendo à solução de equilíbrio $\phi(t) = 1$.

(b) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y. Mostre que y é uma função crescente de t para $y < 1$ e para $y > 1$. A reta de fase tem setas apontando tanto acima quanto abaixo de $y = 1$. Assim, soluções abaixo da solução de equilíbrio aproximam-se dela, enquanto as soluções acima se afastam dela. Portanto, $\phi(t) = 1$ é semiestável.

(c) Resolva a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$ e confirme as conclusões do item (b).

Os Problemas de 8 a 13 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um como sendo assintoti-

[13] Veja, por exemplo, Oliver L. Austin Jr., *Birds of the World* (New York: Golden Press, 1983), pp. 143-145.

camente estável, instável ou semiestável (veja o Problema 7). Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos de soluções no plano ty.

8. $dy/dt = -k(y-1)^2, \quad k > 0, \quad -\infty < y_0 < \infty$
9. $dy/dt = y^2(y^2-1), \quad -\infty < y_0 < \infty$
10. $dy/dt = y(1-y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
11. $dy/dt = ay - b\sqrt{y}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad y_0 \geq 0$
12. $dy/dt = y^2(4-y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
13. $dy/dt = y^2(1-y)^2, \quad -\infty < y_0 < \infty$
14. Considere a equação $dy/dt = f(y)$ e suponha que y_1 é um ponto crítico, isto é, $f(y_1) = 0$. Mostre que a solução de equilíbrio $\phi(t) = y_1$ é assintoticamente estável se $f'(y_1) < 0$ e é assintoticamente instável se $f'(y_1) > 0$.
15. Suponha que determinada população obedece à equação logística $dy/dt = ry[1 - (y/K)]$.
    (a) Se $y_0 = K/3$, encontre o instante τ no qual a população inicial dobrou. Encontre o valor de τ para $r = 0{,}025$ por ano.
    (b) Se $y_0/K = \alpha$, encontre o instante T no qual $y(T)/K = \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < 1$. Observe que $T \to \infty$ quando $\alpha \to 0$ ou $\beta \to 1$. Encontre o valor de T para $r = 0{,}025$ por ano, $\alpha = 0{,}1$ e $\beta = 0{,}9$.
16. Outra equação usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz[14]

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

onde r e K são constantes positivas.
    (a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, encontre os pontos críticos e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável.
    (b) Para $0 \leq y \leq K$, determine onde o gráfico de y em função de t é convexo e onde é côncavo.
    (c) Para cada y tal que $0 < y \leq K$, mostre que dy/dt, como dado pela equação de Gompertz, nunca é menor do que dy/dt, como dado pela equação logística.
17. (a) Resolva a equação de Gompertz

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.
    Sugestão: você pode querer definir $u = \ln(y/K)$.
    (b) Para os dados no Exemplo 1 do texto ($r = 0{,}71$ por ano, $K = 80{,}5 \times 10^6$ kg, $y_0/K = 0{,}25$), use o modelo de Gompertz para encontrar o valor previsto de $y(2)$.
    (c) Para os mesmo dados do item (b), use o modelo de Gompertz para encontrar o instante τ no qual $y(\tau) = 0{,}75K$.
18. Um lago é formado quando a água se acumula em uma depressão cônica de raio a e profundidade h. Suponha que a água flui para dentro a uma taxa constante k e é perdida por evaporação a uma taxa proporcional à área de superfície.
    (a) Mostre que o volume $V(t)$ de água no lago em qualquer instante t satisfaz a equação diferencial

$$dV/dt = k - \alpha\pi(3a/\pi h)^{2/3}V^{2/3},$$

onde α é o coeficiente de evaporação.
    (b) Encontre a profundidade de equilíbrio de água no lago. Esse equilíbrio é assintoticamente estável?
    (c) Encontre uma condição que tem que ser satisfeita para o lago não transbordar.
19. Considere um tanque de água cilíndrico de seção reta constante A. Água é bombeada para o tanque a uma taxa constante k e sai através de um pequeno furo de área a no fundo do tanque. Do princípio de Torricelli em hidrodinâmica (veja o Problema 6 na Seção 2.3), segue que a taxa de fluxo da água através do furo é $\alpha a\sqrt{2gh}$, onde h é a profundidade atual da água, g é a aceleração devido à gravidade e α é um coeficiente de contração que satisfaz $0{,}5 \leq \alpha \leq 1{,}0$.
    (a) Mostre que a profundidade de água no tanque em qualquer instante satisfaz a equação

$$dh/dt = (k - \alpha a\sqrt{2gh})/A.$$

    (b) Determine a profundidade de equilíbrio h_e da água e mostre que ela é assintoticamente estável. Observe que h_e não depende de A.

[14] Benjamin Gompertz (1779-1865) foi um atuário inglês. Ele desenvolveu seu modelo de crescimento populacional, publicado em 1825, durante a construção de tabelas de mortalidade para sua companhia de seguros.

Administrando um Recurso Renovável. Suponha que a população y de determinada espécie de peixe (por exemplo, atum ou linguado gigante) em certa área do oceano é descrita pela equação logística

$$dy/dt = r(1 - y/K)y.$$

Embora seja desejável utilizar essa fonte de alimento, intuitivamente é claro que a população de peixes pode ser reduzida a um nível abaixo do útil, se forem pescados peixes demais, podendo até ser levada à extinção. Os Problemas 20 e 21 exploram algumas das questões envolvidas na formulação de uma estratégia racional para administrar a pescaria.[15]

20. Para determinado nível de empenho, é razoável supor que a taxa segundo a qual são pegos os peixes depende da população y: quanto mais peixes existirem, mais fácil será pegá-los. Vamos supor então que a taxa segundo a qual os peixes são pegos é dada por Ey, onde E é uma constante positiva, com unidades iguais ao inverso do tempo, que mede o empenho total feito para administrar a espécie de peixe em consideração. Para incluir esse efeito, a equação logística é substituída por

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - Ey. \tag{i}$$

Essa equação é conhecida como **modelo de Schaefer**, em honra ao biologista M. B. Schaefer, que a aplicou a populações de peixes.

(a) Mostre que, se $E < r$, então existem dois pontos de equilíbrio, $y_1 = 0$ e $y_2 = K(1 - E/r) > 0$.

(b) Mostre que $y = y_1$ é instável e que $y = y_2$ é assintoticamente estável.

(c) Uma produção sustentável Y de pescaria é uma taxa segundo a qual os peixes podem ser pescados indefinidamente. É o produto do empenho E com a população assintoticamente estável y_2. Encontre Y em função do esforço E; o gráfico desta função é conhecido como a curva produção-empenho.

(d) Determine E de modo a maximizar Y encontrando, assim, a **produção máxima sustentável** Y_m.

21. Neste problema vamos supor que os peixes são pegos a uma taxa constante h independentemente do tamanho da população. Então y satisfaz

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - h. \tag{i}$$

A hipótese de que a taxa de pesca h é constante pode ser razoável quando y é muito grande, mas torna-se menos razoável quando y é pequeno.

(a) Se $h < rK/4$, mostre que a Eq. (i) tem dois pontos de equilíbrio y_1 e y_2 com $y_1 < y_2$; determine esses pontos.

(b) Mostre que y_1 é instável e que y_2 é assintoticamente estável.

(c) Analisando o gráfico de $f(y)$ em função de y, mostre que se a população inicial $y_0 > y_1$, então $y \to y_2$ quando $t \to \infty$, mas se $y_0 < y_1$ então y diminui quando t aumenta. Note que $y = 0$ não é um ponto de equilíbrio, de modo que se $y_0 < y_1$ a população será extinta em um tempo finito.

(d) Se $h > rK/4$, mostre que y diminui até zero quando t aumenta, independentemente do valor de y_0.

(e) Se $h = rK/4$, mostre que existe um único ponto de equilíbrio $y = K/2$ e que este ponto é semiestável (veja o Problema 7). Logo, a produção máxima sustentável é $h_m = rK/4$, correspondendo ao valor de equilíbrio $y = K/2$. Note que h_m tem o mesmo valor que Y_m no Problema 20(d). A pescaria é considerada superexplorada se y se reduzir a um nível abaixo de $K/2$.

Epidemias. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem desde a década de 1760, pelo menos, quando Daniel Bernoulli fez um trabalho relativo à varíola. Em anos mais recentes, muitos modelos matemáticos foram propostos e estudados para diversas doenças diferentes.[16] Os Problemas de 22 a 24 tratam alguns dos modelos mais simples, e as conclusões que podem ser tiradas deles. Modelos semelhantes também têm sido usados para descrever a disseminação de boatos e produtos de consumo.

22. Suponha que uma dada população pode ser dividida em duas partes: os que têm uma determinada doença e podem infectar outros, e os que não têm, mas são suscetíveis. Seja x a proporção de indivíduos suscetíveis e y a proporção de indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença se espalha através do contato entre os elementos doentes da população e os sãos, e que a taxa de disseminação dy/dt é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que os elementos de ambos os grupos movem-se livre-

[15]Um excelente tratamento desse tipo de problema, que vai muito mais longe do esboçado aqui, pode ser encontrado no livro de Clark mencionado anteriormente, em especial nos dois primeiros capítulos. Diversas referências adicionais são citadas ali.

[16]Uma fonte-padrão é o livro de autoria de Bailey, listado nas referências. Os modelos nos Problemas de 22 a 24 estão discutidos neste livro nos Capítulos 5, 10 e 20, respectivamente.

mente, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y. Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \qquad y(0) = y_0, \tag{i}$$

onde α é um fator de proporcionalidade positivo e y_0 é a proporção inicial de indivíduos infectados.

(a) Encontre os pontos de equilíbrio para a equação diferencial (i) e determine se cada um deles é assintoticamente estável, semiestável ou instável.

(b) Resolva o problema de valor inicial (i) e verifique que as conclusões a que você chegou no item (a) estão corretas. Mostre que $y(t) \to 1$ quando $t \to \infty$, o que significa que, finalmente, a população inteira ficará doente.

23. Algumas doenças (como tifo) são disseminadas por *portadores*, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem sintomas aparentes. Sejam x e y, respectivamente, as proporções de suscetíveis e portadores na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β, de modo que

$$dy/dt = -\beta y. \tag{i}$$

Suponha, também, que a doença se espalha a uma taxa proporcional ao produto de x e y; logo,

$$dx/dt = -\alpha xy. \tag{ii}$$

(a) Determine y em qualquer instante de tempo t resolvendo a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

(b) Use o resultado do item (a) para encontrar x em qualquer instante t resolvendo a Eq. (ii) sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$.

(c) Encontre a proporção da população que escapa da epidemia encontrando o valor-limite de x quando $t \to \infty$.

24. O trabalho de Daniel Bernoulli em 1760 tinha como objetivo avaliar o quão efetivo estava sendo um programa controverso de inoculação contra a varíola, que era um grande problema de saúde pública na época. Seu modelo se aplica igualmente bem a qualquer outra doença que, uma vez adquirida, se o paciente sobreviver ganha imunidade para o resto da vida.

Considere o conjunto de indivíduos nascidos em um dado ano ($t = 0$) e seja $n(t)$ o número desses indivíduos que sobrevivem t anos depois. Seja $x(t)$ o número de elementos desse conjunto que ainda não tiveram varíola até o ano t e que são, portanto, suscetíveis. Seja β a taxa segundo a qual indivíduos suscetíveis contraem varíola e seja ν a taxa segundo a qual pessoas que contraem varíola morrem da doença. Finalmente, seja $\mu(t)$ a taxa de morte por qualquer outro motivo diferente da varíola. Então dx/dt, a taxa segundo a qual o número de indivíduos suscetíveis varia, é dada por

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x. \tag{i}$$

O primeiro termo na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) é a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem a doença, e o segundo termo é a taxa segundo a qual eles morrem de outras causas. Temos também

$$dn/dt = -\nu\beta x - \mu(t)n, \tag{ii}$$

onde dn/dt é a taxa de mortandade do conjunto inteiro e os dois termos à direita do sinal de igualdade são devidos à varíola e às outras causas, respectivamente.

(a) Seja $z = x/n$, e mostre que z satisfaz o problema de valor inicial

$$dz/dt = -\beta z(1 - \nu z), \qquad z(0) = 1. \tag{iii}$$

Observe que o problema de valor inicial (iii) não depende de $\mu(t)$.

(b) Encontre $z(t)$ resolvendo a Eq. (iii).

(c) Bernoulli estimou que $\nu = \beta = 1/8$. Usando esses valores, determine a proporção de indivíduos com 20 anos que ainda não tiveram varíola.

Nota: baseado no modelo que acabamos de descrever e nos melhores dados de mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que se as mortes devidas à varíola pudessem ser eliminadas ($\nu = 0$), então se poderia adicionar aproximadamente 3 anos à expectativa média de vida (em 1760) de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de inoculação.

Pontos de Bifurcação. Para uma equação da forma

$$dy/dt = f(a, y), \tag{i}$$

onde a é um parâmetro real, os pontos críticos (soluções de equilíbrio) dependem, em geral, do valor de a. Quando a aumenta ou diminui constantemente, acontece muitas vezes que para um determinado valor de a, chamado de **ponto de bifurcação**, os pontos críticos se juntam ou se separam, e soluções de equilíbrio podem ser perdidas ou podem aparecer. Pontos de bifurcação são de grande interesse em muitas aplicações porque, perto deles, a natureza das soluções da equação diferencial subjacente muda bruscamente. Por exemplo, em mecânica dos fluidos um fluxo suave (laminar) pode se dispersar e se tornar turbulento. Ou uma coluna com carga axial pode empenar, subitamente, e exibir um grande deslocamento lateral. Ou, quando a quantidade de um dos produtos químicos em uma mistura aumentar, podem aparecer subitamente padrões de diversas cores em ondas espirais em um fluido originalmente quieto. Os Problemas de 25 a 27 descrevem três tipos de bifurcação que podem ocorrer em equações simples da forma (i).

25. Considere a equação

$$dy/dt = a - y^2. \tag{ii}$$

(a) Encontre todos os pontos críticos da Eq. (ii). Note que não existem pontos críticos se $a < 0$, existe um ponto crítico se $a = 0$ e existem dois pontos críticos se $a > 0$.

(b) Desenhe a reta de fase em cada caso e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.

(c) Em cada caso, desenhe diversas soluções da Eq. (ii) no plano ty.

(d) Se fizermos o gráfico da localização dos pontos críticos em função de a no plano ay, obteremos a Figura 2.5.10, chamada de **diagrama de bifurcação** para a Eq. (ii). A bifurcação em $a = 0$ é chamada de bifurcação **nó de sela**. Esse nome é mais natural no contexto de sistemas de segunda ordem, que serão discutidos no Capítulo 9.

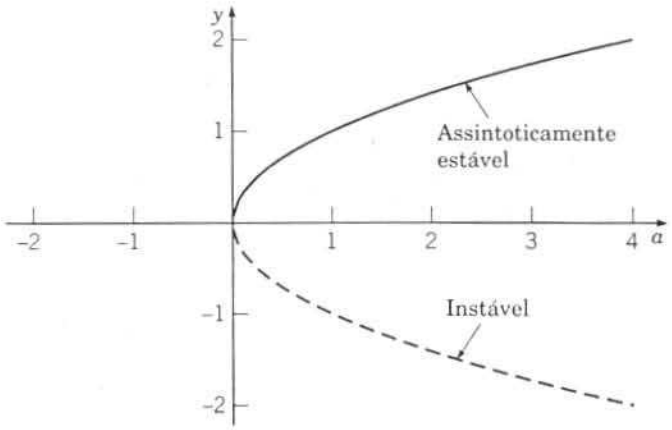


FIGURA 2.5.10 Diagrama de bifurcação para $y' = a - y^2$.

26. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^3 = y(a - y^2). \tag{iii}$$

(a) Considere, novamente, os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.

(b) Em cada caso, esboce diversas soluções da Eq. (iii) no plano ty.

(c) Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iii), isto é, faça o gráfico da localização dos pontos críticos em função de a. Para a Eq. (iii), o ponto de bifurcação em $a = 0$ é chamado de **bifurcação tridente**; seu diagrama pode sugerir porque este nome é apropriado.

27. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^2 = y(a - y). \tag{iv}$$

(a) Considere, novamente, os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semiestável ou instável.

(b) Em cada caso, esboce diversas soluções da Eq. (iv) no plano ty.

(c) Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iv). Note que, para a Eq. (iv), o número de pontos críticos é o mesmo para $a < 0$ e para $a > 0$, mas mudou a estabilidade deles. Para $a < 0$, a solução de equilíbrio $y = 0$ é assintoticamente estável e $y = a$ é instável, enquanto para $a > 0$ a situação se inverte.

Logo, há uma **mudança de estabilidade** quando a passa pelo ponto de bifurcação $a = 0$. Esse tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação transcrítica**.

28. **Reações Químicas.** Uma reação química de segunda ordem envolve a interação (colisão) de uma molécula de uma substância P com uma molécula de uma substância Q para produzir uma molécula de uma nova substância X; isso é denotado por $P + Q \to X$. Suponha que p e q, onde $p \neq q$, são as concentrações iniciais de P e de Q, respectivamente, e seja $x(t)$ a concentração de X no instante t. Então, $p - x(t)$ e $q - x(t)$ são as concentrações de P e de Q no instante t, e a taxa segundo a qual a reação ocorre é dada pela equação

$$dx/dt = \alpha(p - x)(q - x), \tag{i}$$

onde α é uma constante positiva.

(a) Se $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois resolva o problema de valor inicial e encontre $x(t)$ para qualquer t.

(b) Se as substâncias P e Q são idênticas, então $p = q$ e a Eq. (i) é substituída por

$$dx/dt = \alpha(p - x)^2. \tag{ii}$$

Se $x(0) = 0$, determine o valor-limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois resolva o problema de valor inicial e encontre $x(t)$ para qualquer t.

2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

Para equações de primeira ordem existem diversos métodos de integração aplicáveis a várias classes de problemas. As mais importantes são as equações lineares e as separáveis, que discutimos anteriormente. Vamos considerar aqui uma classe de equações, conhecidas como equações exatas, para as quais também existe um método bem definido de solução. Lembre-se, no entanto, de que essas equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por métodos de integração elementares são bastante especiais; a maioria das equações de primeira ordem não pode ser resolvida dessa maneira.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \tag{1}$$

A equação não é linear nem separável, de modo que não podemos aplicar aqui os métodos adequados para esses tipos de equações. Entretanto, note que a função $\psi(x,y) = x^2 + xy^2$ tem a propriedade que

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{2}$$

Portanto, a equação diferencial pode ser escrita como

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3}$$

Supondo que y é uma função de x e usando a regra da cadeia, podemos escrever a Eq. (3) na forma equivalente

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0. \tag{4}$$

Portanto,

$$\psi(x,y) = x^2 + xy^2 = c, \tag{5}$$

onde c é uma constante arbitrária, é uma equação que define as soluções da Eq. (1) implicitamente.

Ao resolver a Eq. (1), o passo-chave foi o reconhecimento de que existe uma função ψ que satisfaz a Eq. (2). Mais geralmente, considere a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{6}$$

Suponha que podemos identificar uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x,y) = M(x,y), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x,y) = N(x,y), \tag{7}$$

e tal que $\psi(x,y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x. Então

$$M(x,y) + N(x,y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)]$$

e a equação diferencial (6) fica

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)] = 0. \tag{8}$$

Nesse caso, a Eq. (6) é dita uma equação diferencial **exata**. Soluções da Eq. (6), ou da equação equivalente (8), são dadas implicitamente por

$$\psi(x,y) = c, \tag{9}$$

onde c é uma constante arbitrária.

No Exemplo 1 foi relativamente fácil ver que a equação diferencial era exata e, de fato, foi fácil encontrar sua solução reconhecendo-se a função desejada ψ. Para equações mais complicadas pode não ser possível fazer isso tão facilmente. O teorema a seguir nos fornece um modo sistemático de determinar se uma determinada equação diferencial é exata.

Teorema 2.6.1 Suponha que as funções M, N, M_y e N_x, onde os índices denotam derivadas parciais, são contínuas em uma região retangular[17] $R: \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então a Eq. (6)

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \tag{10}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7),

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y),$$

se, e somente se, M e N satisfazem a Eq. (10).

A demonstração desse teorema tem duas partes. Primeiro, vamos mostrar que, se existe uma função ψ tal que as Eqs. (7) são verdadeiras, então a Eq. (10) é satisfeita. Calculando M_y e N_x das Eqs. (7), obtemos

$$M_y(x,y) = \psi_{xy}(x,y), \qquad N_x(x,y) = \psi_{yx}(x,y). \tag{11}$$

Como M_y e N_x são contínuas, segue que ψ_{xy} e ψ_{yx} também são. Isso garante a igualdade dessas funções, e a Eq. (10) segue.

Vamos mostrar agora que se M e N satisfazem a Eq. (10), então a Eq. (6) é exata. A demonstração envolve a construção de uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7)

$$\psi_x(x,y) = M(x,y), \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y).$$

Começamos integrando a primeira das Eqs. (7) em relação a x, mantendo y constante. Obtemos

$$\psi(x,y) = Q(x,y) + g(y), \tag{12}$$

onde $Q(x, y)$ é qualquer função diferenciável tal que $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$. Por exemplo, poderíamos escolher

$$Q(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)\,ds, \tag{13}$$

onde x_0 é alguma constante especificada com $\alpha < x_0 < \beta$. A função g na Eq. (12) é uma função diferenciável arbitrária de y, fazendo o papel da constante de integração. Agora precisamos mostrar que sempre

[17]Não é essencial que a região seja retangular, só que seja simplesmente conexa. Em duas dimensões isso significa que não há buracos em seu interior. Assim, por exemplo, regiões circulares ou retangulares são simplesmente conexas, mas regiões anulares não. Maiores detalhes podem ser encontrados na maioria dos livros de cálculo avançado.

é possível escolher $g(y)$ de modo que a segunda das equações em (7) seja satisfeita, isto é, que $\psi_y = N$. Derivando a Eq. (12) em relação a y e igualando o resultado a $N(x,y)$, obtemos

$$\psi_y(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + g'(y) = N(x,y).$$

Então, resolvendo para $g'(y)$, temos

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y). \tag{14}$$

Para que possamos determinar $g(y)$ da Eq. (14), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (14), apesar de sua aparência, tem que ser uma função só de y. Para verificar que isso é verdade, podemos derivar a quantidade em questão em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y). \tag{15}$$

Trocando a ordem das derivadas na segunda parcela da Eq. (15), temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

ou, como $\partial Q/\partial x = M$,

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x,y),$$

que é zero devido à Eq. (10). Logo, apesar de sua forma aparente, a expressão à direita da Eq. (14) não depende, de fato, de x. Assim, encontramos $g(y)$ integrando a Eq. (14); substituindo essa função na Eq. (12), obtemos a função desejada $\psi(x,y)$. Isso completa a demonstração do Teorema 2.6.1.

É possível obter uma expressão explícita para $\psi(x,y)$ em termos de integrais (veja o Problema 17), mas ao resolver equações exatas específicas em geral é mais simples e fácil repetir o procedimento usado na demonstração precedente. Ou seja, integramos $\psi_x = M$ em relação a x, incluímos uma função arbitrária $g(y)$ em vez de uma constante arbitrária, depois diferenciamos o resultado em relação a y e o igualamos a N. Finalmente, usamos essa última equação para resolver para $g(y)$. O próximo exemplo ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 2

Resolva a equação diferencial

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0. \tag{16}$$

Calculando M_y e N_x, vemos que

$$M_y(x,y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x,y),$$

de modo que a equação dada é exata. Então existe uma $\psi(x,y)$ tal que

$$\psi_x(x,y) = y\cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Integrando a primeira dessas equações em relação a x, obtemos

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + g(y). \tag{17}$$

Fazendo $\psi_y = N$, temos

$$\psi_y(x,y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Assim, $g'(y) = -1$ e $g(y) = -y$. A constante de integração pode ser omitida, já que qualquer solução da equação diferencial precedente é satisfatória; não queremos a mais geral possível. Substituindo $g(y)$ na Eq. (17), obtemos

$$\psi(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y.$$

Portanto, as soluções da Eq. (16) são dadas implicitamente por

$$y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y = c. \tag{18}$$

EXEMPLO 3

Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \tag{19}$$

Temos

$$M_y(x, y) = 3x + 2y, \qquad N_x(x, y) = 2x + y;$$

já que $M_y \neq N_x$, a equação dada não é exata. Para ver que ela não pode ser resolvida pelo procedimento descrito aqui, vamos procurar uma função ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \qquad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \tag{20}$$

Integrando a primeira das Eqs. (20) obtemos

$$\psi(x, y) = \tfrac{3}{2}x^2y + xy^2 + g(y), \tag{21}$$

onde g é uma função arbitrária que só depende de y. Para tentar satisfazer a segunda das Eqs. (20), calculamos ψ_y da Eq. (21) e a igualamos a N, obtendo

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y) = x^2 + xy$$

ou

$$g'(y) = -\tfrac{1}{2}x^2 - xy. \tag{22}$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (22) depende tanto de x quanto de y, é impossível resolver a Eq. (22) para $g(y)$. Logo, não há função $\psi(x,y)$ que satisfaça ambas as Eqs. (20).

Fatores Integrantes. Algumas vezes é possível converter uma equação diferencial que não é exata em uma exata multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado. Lembre-se de que esse foi o procedimento que usamos para resolver equações lineares na Seção 2.1. Para investigar a possibilidade de usar essa ideia em um contexto mais geral, vamos multiplicar a equação

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{23}$$

por uma função μ e depois tentar escolher μ de modo que a equação resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \tag{24}$$

seja exata. Pelo Teorema 2.6.1, a Eq. (24) é exata se e somente se

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \tag{25}$$

Como M e N são funções dadas, a Eq. (25) diz que o fator integrante μ tem que satisfazer a equação diferencial parcial de primeira ordem

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{26}$$

Se pudermos encontrar uma função μ satisfazendo a Eq. (26), então a Eq. (24) será exata. A solução da Eq. (24) pode ser obtida, então, pelo método descrito na primeira parte desta seção. A solução encontrada desse modo também satisfaz a Eq. (23), já que podemos dividir a Eq. (24) pelo fator integrante μ.

Uma equação diferencial parcial da forma (26) pode ter mais de uma solução. Nesse caso, qualquer uma delas pode ser usada como um fator integrante para a Eq. (23). Essa possibilidade de não unicidade do fator integrante está ilustrada no Exemplo 4.

Infelizmente, a Eq. (26) que determina o fator integrante μ é, em muitos casos, pelo menos tão difícil de resolver quanto a equação original (23). Portanto, embora em princípio o método de fatores integrantes seja uma ferramenta poderosa para resolver equações diferenciais, na prática só pode ser usado em casos especiais. As situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função de só uma das variáveis x ou y, em vez de ambas. Vamos determinar condições necessárias sobre M e N para que a Eq. (23) tenha um fator integrante que só depende de x. Supondo que μ é uma função só de x, temos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Assim, se $(\mu M)_y$ é igual a $(\mu N)_x$, é necessário que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{27}$$

Se $(M_y - N_x)/N$ é uma função só de x, então existe um fator integrante μ que também só depende de x. Além disso, μ pode ser encontrado resolvendo-se a Eq. (27), que é linear e separável.

Um procedimento semelhante pode ser usado para se determinar uma condição sob a qual a Eq. (23) tenha um fator integrante que depende só de y; veja o Problema 23.

EXEMPLO 4

Encontre um fator integrante para a equação

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{19}$$

e depois resolva a equação.

Mostramos, no Exemplo 3, que esta equação não é exata. Vamos determinar se ela tem um fator integrante que só depende de x. Calculando $(M_y - N_x)/N$, vemos que

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \tag{28}$$

Logo, existe um fator integrante μ que só depende de x e satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \tag{29}$$

Então

$$\mu(x) = x. \tag{30}$$

Multiplicando a Eq. (19) por esse fator integrante, obtemos

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \tag{31}$$

Essa última equação é exata, e é fácil mostrar que suas soluções são dadas implicitamente por

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{32}$$

Soluções explícitas também podem ser encontradas prontamente, já que a Eq. (32) é quadrática em y.

Você pode verificar, também, que um segundo fator integrante para a Eq. (19) é

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

e que a mesma solução é obtida, embora com mais dificuldade, se este fator integrante for usado (veja o Problema 32).

PROBLEMAS

Para cada equação nos Problemas de 1 a 12, determine se é ela exata. Se for, encontre a solução.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
9. $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = 0$
10. $(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0, \qquad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0; \qquad x > 0, \quad y > 0$
12. $\dfrac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0, \qquad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0, \qquad y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e depois a resolva usando este valor de b.

15. $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x + y)x^2\,dy = 0$
16. $ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$
17. Suponha que a Eq. (6) satisfaz as condições do Teorema 2.6.1 em um retângulo R e é, portanto, exata. Mostre que uma função $\psi(x,y)$ possível é

$$\psi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x,t)\,dt,$$

onde (x_0,y_0) é um ponto em R.

18. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

também é exata.

Em cada um dos Problemas de 19 até 22, mostre que a equação dada não é exata, mas torna-se exata quando multiplicada por um fator integrante. Depois resolva a equação.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0, \qquad \mu(x,y) = 1/xy^3$
20. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0, \qquad \mu(x,y) = ye^x$
21. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0, \qquad \mu(x,y) = y$
22. $(x + 2)\operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy = 0, \qquad \mu(x,y) = xe^x$
23. Mostre que, se $(N_x - M_y)/M = Q$, onde Q é uma função só de y, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(y) = \exp\int Q(y)\,dy.$$

24. Mostre que, se $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, onde R só depende do produto xy, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para este fator integrante.

Em cada um dos Problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3)\,dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$
26. $y' = e^{2x} + y - 1$
27. $dx + (x/y - \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
28. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0$
29. $e^x\,dx + (e^x\cot y + 2y\csc y)\,dy = 0$
30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]\,dx + [3(x/y^2) + 4y]\,dy = 0$
31. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

Sugestão: veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x,y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Verifique que a solução é a mesma obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

2.7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler

Lembre dois fatos importantes sobre o problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Primeiro, se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas, então o problema de valor inicial (1) tem uma única solução $y = \phi(t)$ em algum intervalo contendo o ponto inicial $t = t_0$. Segundo, não é possível, em geral, encontrar a solução

ϕ por manipulações simbólicas da equação diferencial. Consideramos, até agora, as principais exceções a essa última afirmação: equações diferenciais que são lineares, separáveis ou exatas, ou que podem ser transformadas em um desses tipos. Apesar disso, ainda é verdade que soluções da grande maioria de problemas de valor inicial de primeira ordem não podem ser encontradas por métodos analíticos como os considerados na primeira parte deste capítulo.

É importante, portanto, ser capaz de abordar o problema de outras maneiras. Como já vimos, uma dessas maneiras é desenhar o campo de direções para a equação diferencial (o que não envolve resolver a equação) e depois visualizar o comportamento das soluções a partir do campo de direções. Esse método tem a vantagem de ser relativamente simples, mesmo para equações diferenciais complicadas. No entanto, não serve para cálculos quantitativos ou comparações, o que é, muitas vezes, uma deficiência crítica.

Por exemplo, a Figura 2.7.1 mostra um campo de direções para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \tfrac{1}{2}y. \tag{2}$$

Do campo de direções você pode visualizar o comportamento de soluções no retângulo ilustrado na figura. Uma solução começando em um ponto no eixo dos y inicialmente aumenta com t, mas logo atinge um valor máximo e começa a diminuir enquanto t continua aumentando.

Você também pode observar na Figura 2.7.1 que muitos segmentos de retas tangentes em valores sucessivos de t quase se tocam. Basta só um pouco de imaginação para, começando em um ponto no eixo dos y e unindo os segmentos para valores sucessivos de t na malha, produzir um gráfico linear por partes. Tal gráfico seria aparentemente uma aproximação de uma solução da equação diferencial. Para transformar essa ideia em um método útil de geração de soluções aproximadas precisamos responder a diversas perguntas, inclusive às seguintes:

1. Podemos efetuar essa união de segmentos de retas tangentes de modo sistemático e direto?
2. Em caso afirmativo, a função linear por partes resultante fornece uma aproximação para a solução de fato da equação diferencial?
3. Em caso afirmativo, podemos descobrir a precisão da aproximação? Ou seja, podemos estimar o quão longe a aproximação está da solução?

Ocorre que a resposta a cada uma dessas perguntas é afirmativa. O método resultante foi desenvolvido por Euler em torno de 1768, e é conhecido como o **método da reta tangente**, ou **método de Euler**. Vamos tratar as duas primeiras perguntas nesta seção, mas adiaremos uma discussão sistemática da terceira pergunta até o Capítulo 8.

Para ver como o método de Euler funciona, vamos considerar como poderíamos usar retas tangentes para aproximar a solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (1) perto de $t = t_0$. Sabemos que a solução contém o ponto inicial (t_0, y_0), e da equação diferencial também sabemos que a inclinação nesse ponto é $f(t_0, y_0)$. Podemos então escrever uma equação para a reta tangente à curva-solução em (t_0, y_0), a saber,

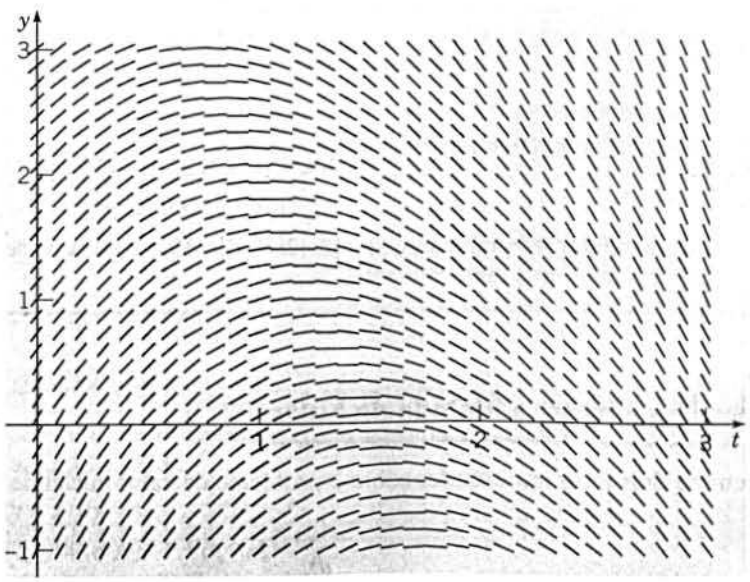


FIGURA 2.7.1 Um campo de direções para a Eq. (2).

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0). \tag{3}$$

A reta tangente é uma boa aproximação da curva-solução em um intervalo suficientemente pequeno, de modo que a inclinação da solução não varie apreciavelmente de seu valor no ponto inicial; veja a Figura 2.7.2. Ou seja, se t_1 está suficientemente próximo de t_0, podemos aproximar $\phi(t_1)$ pelo valor y_1 determinado substituindo-se $t = t_1$ na aproximação pela reta tangente em $t = t_0$; assim,

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0). \tag{4}$$

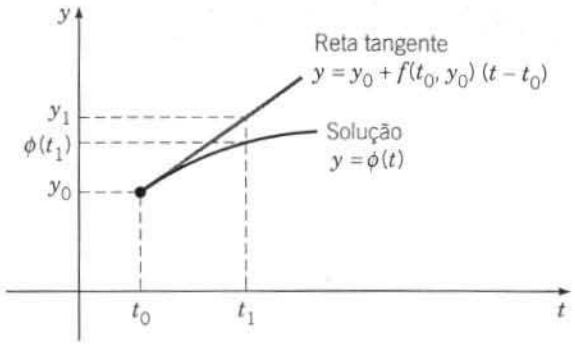


FIGURA 2.7.2 Aproximação pela reta tangente.

Para prosseguir, vamos tentar repetir o processo. Infelizmente não sabemos o valor $\phi(t_1)$ da solução em t_1. O melhor que podemos fazer é usar o valor aproximado y_1. Assim, construímos a reta que contém (t_1, y_1) com coeficiente angular $f(t_1, y_1)$,

$$y = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1). \tag{5}$$

Para aproximar o valor de $\phi(t)$ em um ponto próximo t_2, usamos a Eq. (5), obtendo

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1). \tag{6}$$

Continuando dessa maneira, usamos o valor de y calculado em cada passo para determinar o coeficiente angular para o próximo passo. A expressão geral para a reta tangente começando em (t_n, y_n) é

$$y = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n); \tag{7}$$

portanto, o valor aproximado y_{n+1} em t_{n+1} em termos de t_n, t_{n-1} e y_n é

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

Se introduzirmos a notação $f_n = f(t_n, y_n)$, podemos escrever a Eq. (8) como

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Finalmente, se supusermos que o tamanho do passo h é constante entre os pontos $t_0, t_1, t_2, \ldots$, então $t_{n+1} = t_n + h$ para cada n e obteríamos a fórmula de Euler na forma

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Para usar o método de Euler, simplesmente calcule a Eq. (10) ou a Eq. (9) repetidamente, dependendo se o tamanho do passo é constante ou não, usando o resultado de cada passo para executar o próximo passo. Desse modo, você gera uma sequência de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ que aproximam os valores da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Se você precisa de uma função, em vez de uma sequência de pontos, para aproximar a solução $\phi(t)$, você pode usar a função linear por partes construída da coleção de segmentos de retas tangentes. Ou seja, y é dada no intervalo $[t_0, t_1]$ pela Eq. (7) com $n = 0$, y é dada no intervalo $[t_1, t_2]$ pela Eq. (7) com $n = 1$, e assim por diante.

EXEMPLO 1

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \tfrac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1. \tag{11}$$

Use o método de Euler com passos de tamanho $h = 0{,}02$ para encontrar valores aproximados da solução das Eqs. (11) em $t = 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8$ e 1. Compare-os com os valores correspondentes da solução exata do problema de valor inicial.

Note que a equação diferencial no problema de valor inicial dado é a que está na Eq. (2). Essa equação é linear, de modo que pode ser resolvida, como na Seção 2.1, usando o fator integrante $e^{t/2}$. A solução resultante do problema de valor inicial (11) é

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}. \tag{12}$$

Para aproximar essa solução pelo método de Euler, note que $f(t,y) = 3 - 2t - y/2$ nesse caso. Usando os valores iniciais $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$, encontramos

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 3 - 0 - 0{,}5 = 2{,}5$$

e então, da Eq. (3), a aproximação pela reta tangente perto de $t = 0$ é

$$y = 1 + 2{,}5(t - 0) = 1 + 2{,}5t. \tag{13}$$

Fazendo $t = 0{,}2$ na Eq. (13), encontramos o valor aproximado y_1 da solução em $t = 0{,}2$, a saber,

$$y_1 = 1 + (2{,}5)(0{,}2) = 1{,}5.$$

No próximo passo, temos

$$f_1 = f(0{,}2; 1{,}5) = 3 - 2(0{,}2) - (0{,}5)(1{,}5) = 3 - 0{,}4 - 0{,}75 = 1{,}85.$$

Então a aproximação pela reta tangente perto de $t = 0{,}2$ é

$$y = 1{,}5 + 1{,}85(t - 0{,}2) = 1{,}13 + 1{,}85t. \tag{14}$$

Calculando a expressão na Eq. (14) para $t = 0{,}4$, obtemos

$$y_2 = 1{,}13 + 1{,}85(0{,}4) = 1{,}87.$$

Repetindo esse procedimento mais três vezes, obtemos os resultados na Tabela 2.7.1.

A primeira coluna contém os valores de t que aumentam conforme o tamanho do passo $h = 0{,}2$. A terceira coluna mostra os valores correspondentes de y, calculados pela fórmula de Euler (10). Na quarta coluna estão as aproximações pela reta tangente dadas pela Eq. (7). A segunda coluna contém os valores da solução (12) do problema de valor inicial (11), correta até cinco casas decimais. A solução (12) e a aproximação pela reta tangente também estão desenhadas na Figura 2.7.3.

Da Tabela 2.7.1 e da Figura 2.7.3, vemos que as aproximações dadas pelo método de Euler para este problema são maiores do que os valores correspondentes da solução de fato. Isso ocorre porque o gráfico da solução é côncavo e, portanto, a aproximação pela reta tangente fica acima do gráfico.

TABELA 2.7.1 Resultados do Método de Euler com $h = 0{,}2$ para $y' = 3 - 2t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$

t	Exata	Euler com $h = 0{,}2$	Reta Tangente
0,0	1,00000	1,00000	$y = 1 + 2{,}5t$
0,2	1,43711	1,50000	$y = 1{,}13 + 1{,}85t$
0,4	1,75650	1,87000	$y = 1{,}364 + 1{,}265t$
0,6	1,96936	2,12300	$y = 1{,}6799 + 0{,}7385t$
0,8	2,08584	2,27070	$y = 2{,}05898 + 0{,}26465t$
1,0	2,11510	2,32363	

A precisão das aproximações neste exemplo não é boa o suficiente para ser satisfatória em uma aplicação científica ou de engenharia típica. Por exemplo, em $t = 1$ o erro na aproximação é $2{,}32363 - 2{,}11510 = 0{,}20853$, que é um erro percentual em torno de 9,86% em relação à solução exata. Um modo de obter resultados mais precisos é usar um tamanho de passo menor, com um aumento correspondente no número de passos a serem calculados. Exploraremos essa possibilidade no próximo exemplo.

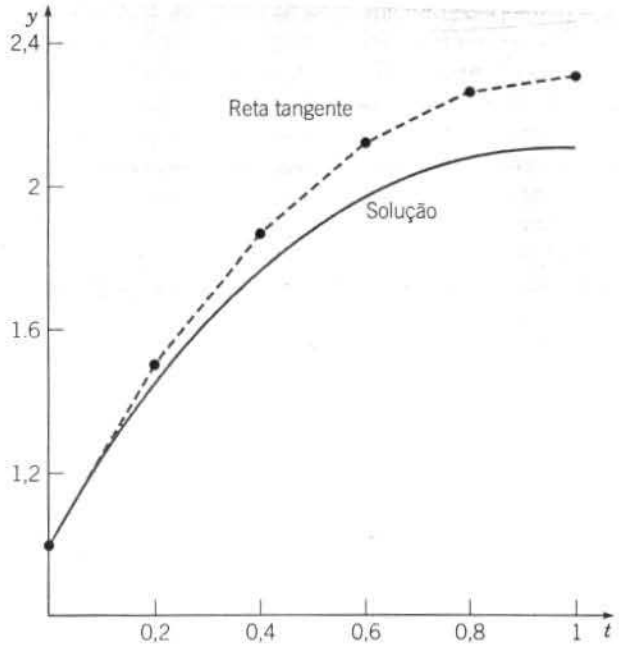


FIGURA 2.7.3 Gráficos da solução e da aproximação pela reta tangente para o problema de valor inicial (11).

É claro que cálculos como os do Exemplo 1 e dos outros exemplos nesta seção são feitos, em geral, em um computador. Alguns pacotes incluem código para o método de Euler, outros não. De qualquer jeito, pode-se escrever facilmente um programa de computador que faça os cálculos necessários para produzir resultados como os da Tabela 2.7.1. Basicamente, o que precisamos é de um laço que calcule a Eq. (10) repetidamente, junto com instruções adequadas para entrada e saída. A saída pode ser uma lista de números, como na Tabela 2.7.1, ou um gráfico, como na Figura 2.7.3. As instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação de alto nível que você conheça.

EXEMPLO 2

Considere novamente o problema de valor inicial (11)

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \tfrac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para calcular valores aproximados da solução para $0 \le t \le 5$. Compare os resultados calculados com os valores correspondentes da solução exata (12)

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}.$$

Usamos passos de tamanho $h = 0{,}1; 0{,}05; 0{,}025$ e $0{,}01$, correspondendo, respectivamente, a 50, 100, 200 e 500 passos para ir de $t = 0$ até $t = 5$. Os resultados desses cálculos estão apresentados na Tabela 2.7.2, junto com os valores da solução exata. Todos os elementos foram arredondados para quatro casas decimais, embora tenham sido utilizadas mais casas decimais nos cálculos intermediários.

TABELA 2.7.2 Comparação entre a Solução Exata e os Resultados do Método de Euler para Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 3 - 2t - \frac{1}{2}y$, $y(0) = 1$

t	Exata	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	2,1151	2,2164	2,1651	2,1399	2,1250
2,0	1,2176	1,3397	1,2780	1,2476	1,2295
3,0	−0,9007	−0,7903	−0,8459	−0,8734	−0,8898
4,0	−3,7594	−3,6707	−3,7152	−3,7373	−3,7506
5,0	−7,0671	−7,0003	−7,0337	−7,0504	−7,0604

Que conclusões podemos tirar dos dados na Tabela 2.7.2? A observação mais importante é que para um valor fixo de t os valores aproximados tornam-se mais precisos quando o tamanho do passo h diminui. Você pode

ver isso lendo uma determinada linha na tabela da esquerda para a direita. É claro que isso é o que esperávamos, mas é encorajador que os dados confirmem nossa expectativa. Por exemplo, para $t = 2$ o valor aproximado com $h = 0{,}1$ é maior por 0,1221 (em torno de 10%), enquanto o valor com $h = 0{,}01$ é maior por apenas 0,0119 (cerca de 1%). Nesse caso, dividir o tamanho do passo por 10 (executando 10 vezes mais cálculos) também divide o erro por cerca de 10. Comparando os erros para outros pares de valores na tabela, você pode verificar que essa relação entre tamanho do passo e erro também é válida para eles: dividir o tamanho do passo por um número também divide o erro por aproximadamente o mesmo número. Isso significa que, para o método de Euler, o erro é aproximadamente proporcional ao tamanho do passo? É claro que um exemplo não estabelece tal resultado geral, mas é uma conjectura interessante, pelo menos.[18]

Uma segunda observação que podemos fazer a partir da Tabela 2.7.2 é que, para um tamanho de passo dado h, as aproximações tornam-se mais precisas quando t aumenta, pelo menos para $t > 2$. Por exemplo, para $h = 0{,}1$, o erro em $t = 5$ é só de 0,0668, pouco mais de metade do erro em $t = 2$. Voltaremos a esse assunto mais tarde, nesta seção.

O método de Euler parece funcionar bem para este problema. São obtidos resultados razoavelmente bons mesmo para um tamanho de passo moderadamente grande $h = 0{,}1$, e a aproximação pode ser melhorada diminuindo-se h.

Vamos ver outro exemplo.

EXEMPLO 3

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y, \qquad y(0) = 1. \tag{15}$$

A solução geral desta equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 da Seção 2.1, e a solução do problema de valor inicial (15) é

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{11}{4}e^{2t}. \tag{16}$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para encontrar valores aproximados da solução no intervalo $0 \le t \le 5$. Compare os resultados com os valores correspondentes da solução (16).

Usando os mesmos tamanhos de passos que no Exemplo 2, obtemos os resultados apresentados na Tabela 2.7.3.

TABELA 2.7.3 Comparação entre a Solução Exata e os Resultados do Método de Euler para Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 4 - t + 2y$, $y(0) = 1$

t	Exata	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,0	19,06990	15,77728	17,25062	18,10997	18,67278
2,0	149,3949	104,6784	123,7130	135,5440	143,5835
3,0	1109,179	652,5349	837,0745	959,2580	1045,395
4,0	8197,884	4042,122	5633,351	6755,175	7575,577
5,0	60573,53	25026,95	37897,43	47555,35	54881,32

Os dados na Tabela 2.7.3 confirmam, novamente, nossa expectativa de que para um valor dado de t a precisão aumenta quando o tamanho do passo é reduzido. Por exemplo, para $t = 1$ o erro percentual diminui de 17,3% quando $h = 0{,}1$ para 2,1% quando $h = 0{,}01$. Entretanto, o erro aumenta razoavelmente rápido quando t aumenta para um h fixo. Mesmo para $h = 0{,}01$, o erro em $t = 5$ é de 9,4% e é muito maior para tamanhos de passos maiores. É claro que a precisão necessária depende dos objetivos, mas os erros na Tabela 2.7.3 são grandes demais para a maioria das aplicações em ciências ou engenharia. Para melhorar a situação, poder-se-ia tentar passos menores ou restringir os cálculos a um intervalo bem curto contendo o ponto inicial. Apesar disso, é claro que o método de Euler é muito menos eficaz neste exemplo do que no Exemplo 2.

Para entender melhor o que está acontecendo nesses exemplos, vamos considerar de novo o método de Euler para o problema de valor inicial geral (1)

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

[18] Uma discussão mais detalhada dos erros ao se utilizar o método de Euler aparece no Capítulo 8.

cuja solução denotaremos por $\phi(t)$. Lembre-se de que uma equação diferencial de primeira ordem tem uma família infinita de soluções, indexada por uma constante arbitrária c, e que a condição inicial seleciona um elemento dessa família, determinando o valor de c. Assim, na família infinita de soluções, $\phi(t)$ é a que satisfaz a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$.

No primeiro passo, o método de Euler usa a aproximação pela reta tangente ao gráfico de $y = \phi(t)$ que contém o ponto inicial (t_0, y_0), e isso produz o valor aproximado y_1 em t_1. Em geral, $y_1 \neq \phi(t_1)$, de modo que, no segundo passo, o método de Euler não usa a reta tangente à solução $y = \phi(t)$, usa a reta tangente a uma solução próxima $y = \phi_1(t)$ que contém o ponto (t_1, y_1). E isso acontece nos passos seguintes. O método de Euler usa uma sucessão de aproximações pelas retas tangentes a uma sequência de soluções diferentes $\phi(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ... da equação diferencial. Em cada passo constrói-se a reta tangente a uma solução contendo o ponto determinado pelo resultado do passo precedente, como ilustrado na Figura 2.7.4. A qualidade da aproximação depois de muitos passos depende fortemente do comportamento do conjunto de soluções contendo os pontos (t_n, y_n) para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

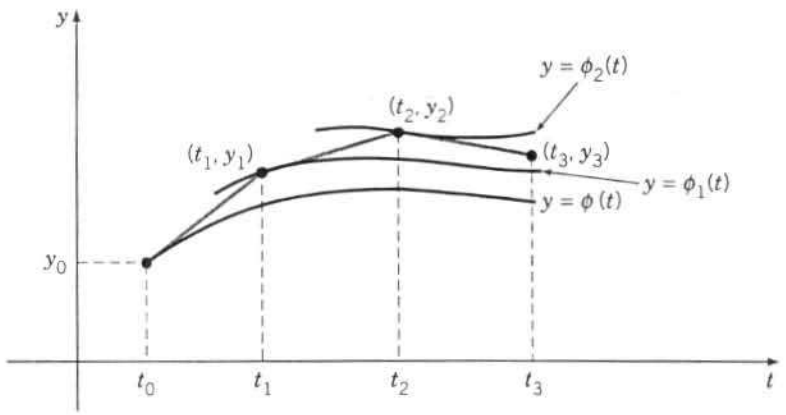


FIGURA 2.7.4 O método de Euler.

No Exemplo 2 a solução geral da equação diferencial era

$$y = 14 - 4t + ce^{-t/2} \tag{17}$$

e a solução do problema de valor inicial (11) correspondia a $c = -13$. A família de soluções (17) é uma família convergente, já que o termo envolvendo a constante arbitrária tende a zero quando $t \to \infty$. Não faz muita diferença quais soluções estão sendo usadas para o cálculo das retas tangentes no método de Euler, já que todas as soluções estão ficando cada vez mais próximas quando t aumenta.

Por outro lado, no Exemplo 3 a solução geral da equação diferencial era

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + ce^{2t}, \tag{18}$$

e essa é uma família divergente. Note que as soluções correspondendo a dois valores próximos de c tornam-se arbitrariamente longe uma da outra quando t aumenta. Tentamos seguir a solução para $c = 11/4$ no Exemplo 3, mas ao usar o método de Euler em cada passo estávamos seguindo outra solução que se afastava da solução desejada cada vez mais rapidamente com o aumento de t. Isso explica por que os erros no Exemplo 3 são tão maiores que os existentes no Exemplo 2.

Ao usar um procedimento numérico como o método de Euler, você tem que sempre ter em mente o problema da precisão da aproximação, se ela é suficientemente boa para ser útil. Nos exemplos precedentes, a precisão do método numérico pôde ser determinada diretamente por comparação com a solução obtida analiticamente. É claro que, em geral, não existe uma solução analítica disponível quando se usa um método numérico, de modo que é necessário obter cotas, ou, pelo menos, estimativas para o erro que não dependam do conhecimento da solução exata. Você também deve se lembrar de que o melhor que podemos esperar de uma aproximação numérica é que ela reflita o comportamento da solução. Assim, um elemento de uma família divergente de soluções será sempre mais difícil de ser aproximado de que um elemento de uma família convergente.

Se quiser saber mais sobre aproximações numéricas de soluções de problemas de valor inicial, você pode ir diretamente para o Capítulo 8. Apresentamos ali alguma informação sobre a análise de erros e discutimos, também, diversos algoritmos muito mais eficientes computacionalmente do que o método de Euler.

PROBLEMAS

Muitos dos problemas nesta seção requerem cálculos numéricos bastante extensos. A quantidade de cálculos razoável para você depende fortemente do tipo de equipamento computacional que tem. Alguns poucos passos dos cálculos necessários podem ser feitos em praticamente todas as calculadoras – ou até à mão, se necessário. Para fazer mais, será desejável pelo menos uma calculadora programável. E para alguns problemas pode ser necessária a utilização de um computador.

Lembre-se também de que resultados numéricos podem variar um pouco, dependendo de como seu programa foi desenvolvido e de como seu computador calcula as operações aritméticas, os arredondamentos, etc. Pequenas variações na última casa decimal podem aparecer por essas causas, e não indicam que alguma coisa está necessariamente errada. As respostas ao final do livro são dadas com seis casas decimais na maioria dos casos, embora os cálculos intermediários tenham sido feitos com mais casas decimais.

Em cada um dos Problemas de 1 a 4:

(a) Encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$ usando o método de Euler com $h = 0{,}1$.

(b) Repita o item (a) com $h = 0{,}05$. Compare os resultados com os encontrados no item (a).

(c) Repita o item (a) com $h = 0{,}025$. Compare os resultados com os encontrados nos itens (a) e (b).

(d) Encontre a solução $y = \phi(t)$ do problema dado e calcule $\phi(t)$ em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$. Compare esses valores com os resultados de (a), (b) e (c).

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
3. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 3\cos t - 2y, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas de 5 a 10, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada e diga se as soluções estão convergindo ou divergindo.

5. $y' = 5 - 3\sqrt{y}$
6. $y' = y(3 - ty)$
7. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2)$
8. $y' = -ty + 0{,}1y^3$
9. $y' = t^2 + y^2$
10. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2)$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, use o método de Euler para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial em $t = 0{,}5; 1; 1{,}5; 2; 2{,}5$ e 3.

(a) Com $h = 0{,}1$.
(b) Com $h = 0{,}05$.
(c) Com $h = 0{,}025$.
(d) Com $h = 0{,}01$.

11. $y' = 5 - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
12. $y' = y(3 - ty), \quad y(0) = 0{,}5$
13. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
14. $y' = -ty + 0{,}1y^3, \quad y(0) = 1$
15. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

(a) Use o método de Euler com $h = 0{,}1$ para obter valores aproximados da solução em $t = 1{,}2; 1{,}4; 1{,}6$ e $1{,}8$.

(b) Repita o item (a) com $h = 0{,}05$.

(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b). Note que eles estão razoavelmente próximos para $t = 1{,}2$; $1{,}4$ e $1{,}6$, mas são muito diferentes para $t = 1{,}8$. Note também (da equação diferencial) que a reta tangente à solução é paralela ao eixo dos y quando $y = \pm 2/\sqrt{3} \approx \pm 1{,}155$. Explique como isso pode acarretar tal diferença nos valores calculados.

16. Considere o problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com $h = 0{,}1; 0{,}05; 0{,}025$ e $0{,}01$ para explorar a solução deste problema para $0 \leq t \leq 1$. Qual sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 0{,}8$? E em $t = 1$? Seus resultados estão consistentes com o campo de direções no Problema 9?

17. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(1) = 2.$$

Use o método de Euler com $h = 0{,}1; 0{,}05; 0{,}025$ e $0{,}01$ para explorar a solução deste problema para $1 \leq t \leq 3$. Qual sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 2{,}5$? E em $t = 3$? Seus resultados estão consistentes com o campo de direções no Problema 10?

18. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -ty + 0{,}1y^3, \qquad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial (ou examine de novo o campo no Problema 8). Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $2 \le \alpha \le 3$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Chame esse valor crítico de α_0.

(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}01$ para estimar α_0. Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$ onde $b - a = 0{,}01$.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - t^2, \qquad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial. Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $0 \le \alpha \le 1$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Chame esse valor crítico de α_0.

(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}01$ para estimar α_0. Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$ onde $b - a = 0{,}01$.

20. **Convergência do Método de Euler.** Pode-se mostrar que, sob condições adequadas para f, a aproximação numérica gerada pelo método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ converge para a solução exata quando o tamanho h do passo diminui. Isso está ilustrado no exemplo a seguir. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + y, \quad y(t_0) = y_0.$$

(a) Mostre que a solução exata é $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{t-t_0} + t$.

(b) Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

(c) Observando que $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$, mostre por indução que

$$y_n = (1 + h)^n(y_0 - t_0) + t_n \tag{i}$$

para cada inteiro positivo n.

(d) Considere um ponto fixo $t > t_0$ e, para n dado, escolha $h = (t - t_0)/n$. Então $t_n = t$ para todo n. Note também que $h \to 0$ quando $n \to \infty$. Substituindo h na Eq. (i) e fazendo $n \to \infty$, mostre que $y_n \to \phi(t)$ quando $n \to \infty$.

Sugestão: $\lim_{n\to\infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

Em cada um dos Problemas de 21 a 23, use a técnica discutida no Problema 20 para mostrar que a aproximação obtida pelo método de Euler converge para a solução exata em qualquer ponto fixo quando $h \to 0$.

21. $y' = y, \qquad y(0) = 1$

22. $y' = 2y - 1, \qquad y(0) = 1 \qquad$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h)/2 + 1/2$

23. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \qquad y(0) = 1 \qquad$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h) + t_1/2$

2.8 O Teorema de Existência e Unicidade

Vamos discutir, nesta seção, a demonstração do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade para problemas de valor inicial de primeira ordem. Este teorema diz que, sob certas condições sobre $f(t, y)$, o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

tem uma única solução em algum intervalo contendo o ponto t_0.

Em alguns casos (por exemplo, se a equação diferencial for linear), a existência de uma solução para o problema de valor inicial (1) pode ser estabelecida diretamente resolvendo-se o problema e exibindo-se uma fórmula para a solução. No entanto, essa abordagem não é factível em geral, pois não existe um método de resolução de equações diferenciais que se aplique a todos os casos. Portanto, para o caso geral

é necessário adotar uma abordagem indireta que demonstre a existência de uma solução para as Eq. (1), mas que, normalmente, não fornece um modo prático para encontrá-la. O ponto crucial desse método é a construção de uma sequência de funções que converge a uma função limite satisfazendo o problema de valor inicial, embora os elementos individuais da sequência não o satisfaçam. Como regra geral, é impossível calcular explicitamente mais do que alguns poucos elementos da sequência; portanto, a função limite só pode ser determinada em casos raros. Apesar disso, sob as restrições sobre $f(t, y)$ enunciadas no Teorema 2.4.2 é possível mostrar que a sequência em questão converge e que a função limite tem as propriedades desejadas. O argumento é razoavelmente complicado e depende, em parte, de técnicas e resultados normalmente encontrados pela primeira vez em cursos de cálculo avançado. Em consequência, não entraremos em todos os detalhes da demonstração aqui; indicaremos, no entanto, suas características principais e apontaremos algumas das dificuldades envolvidas.

Em primeiro lugar, note que é suficiente considerar o problema no qual o ponto inicial (t_0, y_0) é a origem; ou seja, vamos considerar o problema

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = 0. \tag{2}$$

Se for dado algum outro ponto inicial, então sempre podemos fazer uma mudança de variáveis preliminar, correspondendo à translação dos eixos coordenados, que leva o ponto dado (t_0, y_0) para a origem. O teorema de existência e unicidade pode ser enunciado agora da seguinte forma.

Teorema 2.8.1 Se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em um retângulo R: $|t| \le a$, $|y| \le b$, então existe algum intervalo $|t| \le h \le a$ no qual existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (2).

Para provar esse teorema, é necessário colocar o problema de valor inicial (2) em uma forma mais conveniente. Se supusermos, temporariamente, que existe uma função $y = \phi(t)$ que satisfaz o problema de valor inicial, então $f[t, \phi(t)]$ é uma função contínua que só depende de t. Logo, podemos integrar $y' = f(t, y)$ do ponto inicial $t = 0$ até um valor arbitrário de t, obtendo

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\, ds, \tag{3}$$

onde usamos a condição inicial $\phi(0) = 0$. Usamos também s para denotar a variável de integração.

Como a Eq. (3) contém uma integral da função desconhecida ϕ, ela é chamada de **equação integral**. Essa equação integral não é uma fórmula para a solução do problema de valor inicial, mas fornece outra relação que é satisfeita por qualquer solução das Eq. (2). Reciprocamente, suponha que existe uma função contínua $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação integral (3); então essa função também satisfaz o problema de valor inicial (2). Para mostrar isso, substituímos, primeiro, t por zero na Eq. (3), o que mostra que a condição inicial é satisfeita. Além disso, como o integrando na Eq. (3) é contínuo, segue do teorema fundamental do cálculo que ϕ é diferenciável e $\phi'(t) = f[t, \phi(t)]$. Portanto, o problema de valor inicial e a equação integral são equivalentes, no sentido de que qualquer solução de um desses problemas também é solução do outro. É mais conveniente mostrar que existe uma única solução da equação integral em algum intervalo $|t| \le h$. A mesma conclusão será válida, então, para o problema de valor inicial.

Um método para mostrar que a equação integral (3) tem uma única solução é conhecido como **método das aproximações sucessivas** ou **método de iteração** de Picard.[19] Ao usar esse método, começamos escolhendo uma função inicial ϕ_0, arbitrária ou que aproxima, de alguma forma, a solução do problema de valor inicial. A escolha mais simples é

$$\phi_0(t) = 0; \tag{4}$$

então ϕ_0 pelo menos satisfaz a condição inicial nas Eqs. (2), embora, presume-se, não satisfaça a equação diferencial. A próxima aproximação, ϕ_1, é obtida substituindo-se $\phi_0(s)$ por $\phi(s)$ na integral na Eq. (3) e chamando o resultado dessa operação $\phi_1(t)$. Assim,

$$\phi_1(t) = \int_0^t f[s, \phi_0(s)]\, ds. \tag{5}$$

[19]Charles-Émile Picard (1856-1914), talvez o matemático francês mais importante de sua geração, depois de Henri Poincaré, foi professor da Sorbonne antes dos 30 anos. É conhecido por teoremas importantes em variáveis complexas e geometria algébrica, além de equações diferenciais. Um caso particular do método de aproximações sucessivas foi publicado primeiro por Liouville em 1838. No entanto, o crédito do método é dado em geral a Picard, que o estabeleceu em generalidade e de forma amplamente aplicável em uma série de artigos começando em 1890.

Analogamente, ϕ_2 é obtida de ϕ_1:

$$\phi_2(t) = \int_0^t f[s, \phi_1(s)]\, ds, \tag{6}$$

e, em geral,

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{7}$$

Desse modo geramos a sequência de funções $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$. Cada elemento da sequência satisfaz a condição inicial, mas em geral nenhum deles satisfaz a equação diferencial. No entanto, se em algum estágio, por exemplo, para $n = k$, encontrarmos que $\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t)$, então segue que ϕ_k é uma solução da equação integral (3). Portanto, ϕ_k também é solução do problema de valor inicial (2) e a sequência para nesse ponto. Isso não acontece em geral, e é necessário considerar toda a sequência infinita.

Para estabelecer o Teorema 2.8.1, temos que responder a quatro perguntas importantes:

1. Existem todos os elementos da sequência $\{\phi_n\}$, ou o processo pode ter que ser interrompido em algum estágio?
2. A sequência converge?
3. Quais são as propriedades da função limite? Em particular, ela satisfaz a equação integral (3) e, portanto, o problema de valor inicial (2)?
4. Essa é a única solução ou podem existir outras?

Vamos mostrar primeiro como essas perguntas podem ser respondidas em um exemplo específico relativamente simples e comentar, depois, algumas dificuldades que podem ser encontradas no caso geral.

EXEMPLO 1

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2t(1 + y), \qquad y(0) = 0 \tag{8}$$

pelo método de aproximações sucessivas.

Note primeiro que se $y = \phi(t)$, a equação integral correspondente é

$$\phi(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi(s)]\, ds. \tag{9}$$

Se a aproximação inicial for $\phi_0(t) = 0$, temos que

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_0(s)]\, ds = \int_0^t 2s\, ds = t^2. \tag{10}$$

Analogamente,

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_1(s)]\, ds = \int_0^t 2s[1 + s^2]\, ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \tag{11}$$

e

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_2(s)]\, ds = \int_0^t 2s\left[1 + s^2 + \frac{s^4}{2}\right] ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2 \cdot 3}. \tag{12}$$

As Eqs. (10), (11) e (12) sugerem que

$$\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} \tag{13}$$

para cada $n \geq 1$, e esse resultado pode ser estabelecido por indução matemática da seguinte maneira. A Eq. (13) é certamente verdadeira para $n = 1$; veja a Eq. (10). Precisamos mostrar que, se ela for válida para $n = k$, então também será válida para $n = k + 1$. Temos

$$\begin{aligned} \phi_{k+1}(t) &= \int_0^t 2s[1 + \phi_k(s)]\, ds \\ &= \int_0^t 2s\left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \cdots + \frac{s^{2k}}{k!}\right) ds \\ &= t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}, \end{aligned} \tag{14}$$

e a demonstração por indução está completa.

Os gráficos dos quatro primeiros iterados $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ estão ilustrados na Figura 2.8.1. Quando k aumenta, os iterados parecem permanecer próximos em um intervalo gradualmente crescente, sugerindo convergência para uma função limite.

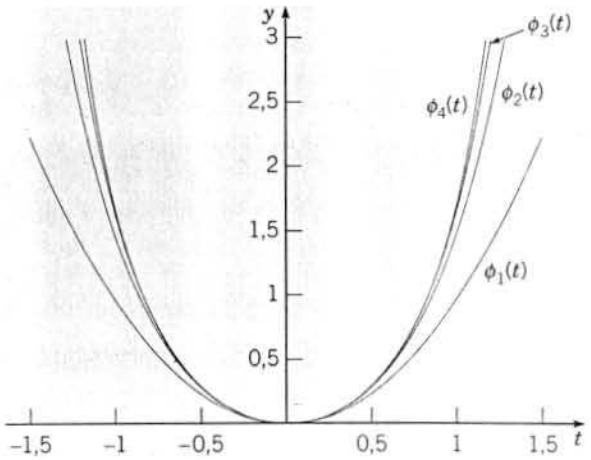


FIGURA 2.8.1 Gráficos de $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ para o Exemplo 1.

Segue da Eq. (13) que $\phi_n(t)$ é a n-ésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}; \tag{15}$$

logo, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ existe se e somente se a série (15) converge. Aplicando o teste da razão, vemos que, para cada t,

$$\left|\frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{t^{2k}}\right| = \frac{t^2}{k+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty. \tag{16}$$

Logo a série (15) converge para todo t, e sua soma $\phi(t)$ é o limite da sequência $\{\phi_n(t)\}$. Além disso, como a série (15) é uma série de Taylor, ela pode ser diferenciada ou integrada termo a termo desde que t permaneça no intervalo de convergência que, nesse caso, é todo o eixo dos t. Portanto, podemos verificar por cálculos diretos que $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k}/k!$ é solução da equação integral (9). De outro modo, substituindo y por $\phi(t)$ nas Eqs. (8) podemos verificar que essa função satisfaz o problema de valor inicial. Nesse exemplo também é possível, a partir da série (15), identificar ϕ em termos de funções elementares, a saber, $\phi(t) = e^{t^2} - 1$. No entanto, isso não é necessário para a discussão de existência e unicidade.

O conhecimento explícito de $\phi(t)$ não torna possível visualizar a convergência da sequência de iterados mais claramente do que fazendo o gráfico de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para diversos valores de k. A Figura 2.8.2 mostra essa diferença para $k = 1, \ldots, 4$. Essa figura mostra claramente o intervalo gradualmente crescente sobre o qual aproximações sucessivas fornecem uma boa aproximação da solução do problema de valor inicial.

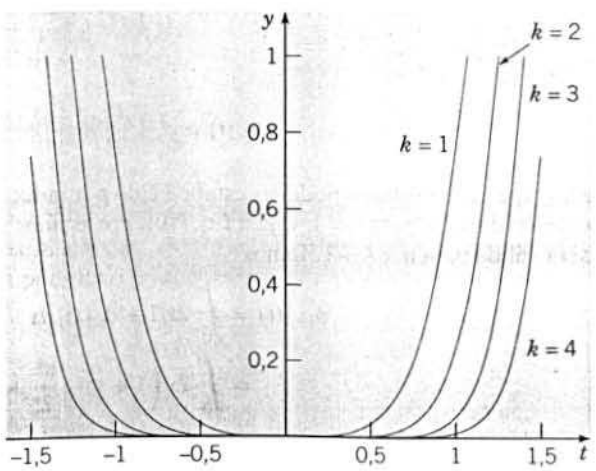


FIGURA 2.8.2 Gráficos de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para o Exemplo 1 com $k = 1, \ldots, 4$.

Finalmente, para tratar a questão de unicidade, vamos supor que o problema de valor inicial tenha duas soluções, ϕ e ψ. Como ambas, ϕ e ψ, satisfazem a equação integral (9), subtraindo, obtemos

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)]\,ds.$$

Tomando valores absolutos, temos, se $t > 0$,

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left| \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)]\,ds \right| \le \int_0^t 2s|\phi(s) - \psi(s)|\,ds.$$

Restringindo t ao intervalo $0 \le t \le A/2$, onde A é arbitrário, temos $2t \le A$ e

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\,ds. \tag{17}$$

Agora é conveniente definir a função U por

$$U(t) = \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\,ds. \tag{18}$$

Então, segue imediatamente que

$$U(0) = 0, \tag{19}$$

$$U(t) \ge 0, \quad \text{para} \quad t \ge 0. \tag{20}$$

Além disso, U é diferenciável e $U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$. Portanto, pela Eq. (17),

$$U'(t) - AU(t) \le 0. \tag{21}$$

A multiplicação da Eq. (21) pela quantidade positiva e^{-At} fornece

$$[e^{-At}U(t)]' \le 0. \tag{22}$$

Então, integrando a Eq. (22) de zero a t e usando a Eq. (19), obtemos

$$e^{-At}U(t) \le 0 \quad \text{para} \quad t \ge 0.$$

Portanto, $U(t) \le 0$ para $t \ge 0$ e, juntando com a Eq. (20), isso implica que $U(t) = 0$ para todo $t \ge 0$. Assim, $U'(t) \equiv 0$ e, então, $\psi(t) \equiv \phi(t)$, o que contradiz a hipótese original. Em consequência, não pode haver duas soluções diferentes do problema de valor inicial para $t \ge 0$. Uma ligeira modificação desse argumento leva à mesma conclusão para $t \le 0$.

Voltando ao problema geral de resolução da equação integral (3), vamos considerar rapidamente cada uma das questões levantadas anteriormente:

1. Existem todos os elementos da sequência $\{\phi_n\}$? No exemplo, f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas em todo o plano ty e cada elemento da sequência podia ser calculado explicitamente. Em contraste, no caso geral supusemos que f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas apenas em um retângulo R: $|t| \le a$, $|y| \le b$ (veja a Figura 2.8.3). Além disso, os elementos da sequência não podem, normalmente, ser calculados de modo explícito. O perigo é que em alguma etapa, por exemplo, $n = k$, o gráfico de $y = \phi_k(t)$ contenha pontos fora do retângulo R. Portanto, no próximo passo – no cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ – seria necessário calcular a função $f(t, y)$ em pontos onde não sabemos se ela é contínua, ou mesmo se existe. Assim, o cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ poderia ser impossível.

   Para evitar esse perigo, pode ser necessário restringir t a um intervalo menor do que $|t| \le a$. Para encontrar tal intervalo, usamos o fato de que uma função contínua em uma região fechada limitada é limitada. Portanto, f é limitada em R; logo, existe um número positivo M tal que

$$|f(t, y)| \le M, \qquad (t, y) \text{ em } R. \tag{23}$$

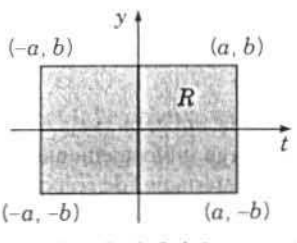


FIGURA 2.8.3 Região de definição para o Teorema 2.8.1.

Mencionamos anteriormente que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Como $f[t, \phi_k(t)]$ é igual a $\phi'_{k+1}(t)$, o coeficiente angular máximo, em valor absoluto, para as retas tangentes ao gráfico da função $y = \phi_{k+1}(t)$ é M. Como esse gráfico contém $(0, 0)$, ele tem que estar contido nas regiões triangulares sombreadas na Figura 2.8.4. Portanto, o ponto $[t, \phi_{k+1}(t)]$ permanece em R, pelo menos enquanto R contiver as regiões triangulares, o que ocorre se $|t| \le b/M$. Daqui para a frente, vamos considerar apenas o retângulo D: $|t| \le h$, $|y| \le b$, onde h é igual ao menor dos números a ou b/M. Com essa restrição, todos os elementos da sequência $\{\phi_n(t)\}$ existem. Note que, sempre que $b/M < a$, você pode tentar obter um valor maior para h encontrando uma cota melhor (isto é, menor) M para $|f(t, y)|$, se possível.

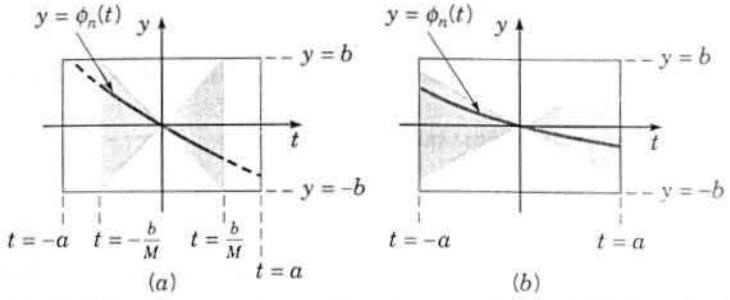


FIGURA 2.8.4 Região na qual estão iterados sucessivos. (*a*) $b/M < a$; (*b*) $b/M > a$.

2. A sequência $\{\phi_n\}$ converge? Como no exemplo, podemos identificar $\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \ldots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$ como a n-ésima soma parcial da série

$$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]. \tag{24}$$

A convergência da sequência $\{\phi_n(t)\}$ é estabelecida mostrando-se que a série (24) converge. Para isso, é necessário estimar o módulo $|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|$ do termo geral. O argumento usado para isso está indicado nos Problemas de 15 a 18 e será omitido aqui. Supondo que a sequência converge, denotamos a função-limite por ϕ, de modo que

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(t). \tag{25}$$

3. Quais as propriedades da função limite ϕ? Em primeiro lugar, gostaríamos de saber que ϕ é contínua. Isso não é, no entanto, uma consequência necessária da convergência da sequência $\{\phi_n(t)\}$, mesmo que cada membro da sequência seja contínuo. Algumas vezes uma sequência de funções contínuas converge a uma função descontínua. Um exemplo simples desse fenômeno é dado no Problema 13. Um modo de provar que ϕ é contínua é mostrar não só que a sequência $\{\phi_n\}$ converge, mas que ela converge de certo modo específico, conhecido como convergência uniforme. Não vamos discutir essa questão aqui; observamos, apenas, que o argumento a que nos referimos no parágrafo 2 é suficiente para estabelecer a convergência uniforme da sequência $\{\phi_n\}$ e, portanto, a continuidade da função limite ϕ no intervalo $|t| \le h$.

Vamos voltar à Eq. (7)

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds.$$

Fazendo n tender a ∞, obtemos

$$\phi(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{26}$$

Gostaríamos de trocar a ordem da integral e do limite na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (26), de modo a obter

$$\phi(t) = \int_0^t \lim_{n\to\infty} f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{27}$$

Tal troca não é permitida, em geral (veja o Problema 14, por exemplo), mas, mais uma vez, o fato de que a sequência $\{\phi_n(t)\}$ converge uniformemente é suficiente para nos permitir colocar o limite dentro do sinal de integral. A seguir, gostaríamos de colocar o limite dentro da função f, o que nos daria

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s)]\, ds \tag{28}$$

e, portanto,

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\, ds. \tag{29}$$

A afirmação

$$\lim_{n\to\infty} f[s, \phi_n(s)] = f[s, \lim_{n\to\infty} \phi_n(s)]$$

é equivalente ao fato de que f é contínua em sua segunda variável, o que é conhecido por hipótese. Logo, a Eq. (29) é válida e a função ϕ satisfaz a equação integral (3). Portanto, ϕ também é solução do problema de valor inicial (2).

4. Existem outras soluções da equação integral (3) além de $y = \phi(t)$? Para mostrar a unicidade da solução $y = \phi(t)$, vamos proceder de maneira semelhante à do exemplo. Primeiro, suponha a existência de outra solução $y = \psi(t)$. Então, é possível mostrar (veja o Problema 19) que a diferença $\phi(t) - \psi(t)$ satisfaz a desigualdade

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\, ds \tag{30}$$

para $0 \le t \le h$ e um número positivo apropriado A. A partir desse ponto o argumento é idêntico ao dado no exemplo, e concluímos que não existe outra solução do problema de valor inicial (2) além da gerada pelo método de aproximações sucessivas.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas 1 e 2, transforme o problema de valor inicial dado em um problema equivalente com ponto inicial na origem.

1. $dy/dt = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2$
2. $dy/dt = 1 - y^3, \quad y(-1) = 3$

Em cada um dos Problemas de 3 a 6, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.

(a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n.

(b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \ldots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.

(c) Expresse $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ em termos de funções elementares, isto é, resolva o problema de valor inicial dado.

(d) Faça o gráfico de $|\phi(t) - \phi_n(t)|$ para $n = 1, \ldots, 4$. Para $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$, estime o intervalo onde cada uma dessas funções é uma aproximação razoavelmente boa para a solução exata.

3. $y' = 2(y + 1), \quad y(0) = 0$
4. $y' = -y - 1, \quad y(0) = 0$
5. $y' = -y/2 + t, \quad y(0) = 0$
6. $y' = y + 1 - t, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 7 e 8, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.

(a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n.

(b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \ldots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.

7. $y' = ty + 1, \quad y(0) = 0$
8. $y' = t^2y - t, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 9 e 10, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para aproximar a solução do problema de valor inicial dado.

(a) Calcule $\phi_1(t), \ldots, \phi_3(t)$.

(b) Faça o gráfico de $\phi_1(t), \ldots, \phi_3(t)$ e observe se os iterados parecem estar convergindo.

9. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 0$
10. $y' = 1 - y^3, \quad y(0) = 0$

Em cada um dos Problemas 11 e 12, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para aproximar a solução do problema de valor inicial dado.

(a) Calcule $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ ou (se necessário) aproximações de Taylor desses iterados. Mantenha termos até a sexta ordem.

(b) Faça o gráfico das funções encontradas em (a) e observe se elas parecem estar convergindo.

11. $y' = -\operatorname{sen} y + 1, \quad y(0) = 0$
12. $y' = (3t^2 + 4t + 2)/2(y - 1), \quad y(0) = 0$

13. Seja $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ e mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

Este exemplo mostra que uma sequência de funções contínuas pode convergir a uma função limite que é descontínua.

14. Considere a sequência $\phi_n(x)=2nxe^{-nx^2}$, $0\le x\le 1$.

(a) Mostre que $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=0$ para $0\le x\le 1$; logo,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)\,dx=0.$$

(b) Mostre que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\,dx=1-e^{-n}$; então,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \phi_n(x)\,dx=1.$$

Assim, nesse exemplo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(x)\,dx\neq\int_a^b \lim_{n\to\infty}\phi_n(x)\,dx,$$

embora $\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)$ exista e seja contínuo.

Nos Problemas de 15 a 18, indicamos como provar que a sequência $\{\phi_n(t)\}$, definida pelas equações de (4) a (7), converge.

15. Se $\partial f/\partial y$ é contínua no retângulo D, mostre que existe uma constante positiva K tal que

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|\le K|y_1-y_2|, \tag{i}$$

onde (t,y_1) e (t,y_2) são dois pontos em D com a mesma coordenada t. Essa desigualdade é conhecida como condição de Lipschitz.[20]

Sugestão: mantenha t fixo e use o teorema do valor médio em f como função só de y. Escolha K como sendo o valor máximo de $|\partial f/\partial y|$ em D.

16. Se $\phi_{n-1}(t)$ e $\phi_n(t)$ são elementos da sequência $\{\phi_n(t)\}$, use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|f[t,\phi_n(t)]-f[t,\phi_{n-1}(t)]|\le K|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|.$$

17. (a) Mostre que, se $|t|\le h$, então

$$|\phi_1(t)|\le M|t|,$$

onde M é escolhido de modo que $|f(t,y)|\le M$ para (t,y) em D.

(b) Use os resultados do Problema 16 e o item (a) deste problema para mostrar que

$$|\phi_2(t)-\phi_1(t)|\le\frac{MK|t|^2}{2}.$$

(c) Mostre, por indução matemática, que

$$|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|\le\frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!}\le\frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

18. Note que

$$\phi_n(t)=\phi_1(t)+[\phi_2(t)-\phi_1(t)]+\cdots+[\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)].$$

(a) Mostre que

$$|\phi_n(t)|\le|\phi_1(t)|+|\phi_2(t)-\phi_1(t)|+\cdots+|\phi_n(t)-\phi_{n-1}(t)|.$$

(b) Use os resultados do Problema 17 para mostrar que

$$|\phi_n(t)|\le\frac{M}{K}\left[Kh+\frac{(Kh)^2}{2!}+\cdots+\frac{(Kh)^n}{n!}\right].$$

(c) Mostre que a soma no item (b) converge quando $n\to\infty$ e, portanto, a soma no item (a) também converge quando $n\to\infty$. Conclua, então, que a sequência $\{\phi_n(t)\}$ converge, já que é a sequência das somas parciais de uma série convergente infinita.

---

[20] Rudolf Lipschitz (1832-1903), professor da Universidade de Bonn por muitos anos, trabalhou em diversas áreas da matemática. A desigualdade (i) pode substituir a hipótese de continuidade de $\partial f/\partial y$ no Teorema 2.8.1; isso resulta em um teorema ligeiramente mais forte.

19. Vamos tratar, neste problema, a questão de unicidade de solução para a equação integral (3)

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\, ds.$$

(a) Suponha que ϕ e ψ são duas soluções da Eq. (3). Mostre que, para $t \geq 0$,

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t \{f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]\}\, ds.$$

(b) Mostre que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \int_0^t |f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]|\, ds.$$

(c) Use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq K \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\, ds,$$

onde K é uma cota superior para $|\partial f/\partial y|$ em D. Essa equação é igual à Eq. (30), e o resto da demonstração pode ser feita como indicado no texto.

2.9 Equações de Diferenças de Primeira Ordem

Enquanto um modelo contínuo que leva a uma equação diferencial é razoável e atraente para muitos problemas, existem alguns casos em que um modelo discreto pode ser mais natural. Por exemplo, o modelo contínuo para juros compostos usado na Seção 2.3 é apenas uma aproximação do processo real, que é discreto. Analogamente, algumas vezes o crescimento populacional pode ser descrito de modo mais preciso por um modelo discreto, em vez de contínuo. Isso é verdade, por exemplo, para espécies cujas gerações não se sobrepõem e que se propagam a intervalos regulares, tais como em épocas específicas do ano. Então a população y_{n+1} da espécie no ano $n + 1$ é uma função de n e da população y_n do ano anterior, ou seja,

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

A Eq. (1) é chamada de **equação de diferenças de primeira ordem**. Ela é de primeira ordem porque o valor de y_{n+1} depende do valor de y_n, mas não de valores anteriores, como y_{n-1}, y_{n-2}, e assim por diante. Como para as equações diferenciais, a equação de diferenças (1) é **linear** se f for uma função linear de y_n; caso contrário, ela é **não linear**. Uma **solução** da equação de diferenças (1) é uma sequência de números $y_0, y_1, y_2, \ldots$ que satisfazem a equação para cada n. Além da equação de diferenças, pode também haver uma **condição inicial**

$$y_0 = \alpha \tag{2}$$

que fornece o valor do primeiro elemento da sequência solução.

Vamos supor, temporariamente, que a função f na Eq. (1) depende apenas de y_n, mas não de n. Nesse caso,

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Se y_0 for dado, então os elementos sucessivos da solução podem ser encontrados pela Eq. (3). Assim,

$$y_1 = f(y_0),$$

e

$$y_2 = f(y_1) = f[f(y_0)].$$

A quantidade $f[f(y_0)]$ é chamada de segunda iterada da equação de diferenças e é, algumas vezes, denotada por $f^2(y_0)$. Analogamente, o terceiro iterado y_3 é dado por

$$y_3 = f(y_2) = f\{f[f(y_0)]\} = f^3(y_0),$$

e assim por diante. Em geral, o n-ésimo iterado y_n é

$$y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0).$$

Referimo-nos a esse procedimento como a iteração da equação de diferenças. É muitas vezes de interesse primordial determinar o comportamento de y_n quando $n \to \infty$; em particular, saber se y_n tende a um limite e, se for o caso, encontrá-lo.

Soluções para as quais y_n tem o mesmo valor para todo n são chamadas de **soluções de equilíbrio**. Elas têm, com frequência, importância especial, como no estudo de equações diferenciais. Se existirem soluções de equilíbrio podemos achá-las fazendo y_{n-1} igual a y_n na Eq. (3) e resolvendo a equação resultante

$$y_n = f(y_n) \tag{4}$$

para y_n.

Equações Lineares. Suponha que a população de determinada espécie em uma dada região no ano $n + 1$, denotada por y_{n+1}, é um múltiplo positivo ρ_n da população y_n no ano n, ou seja,

$$y_{n+1} = \rho_n y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Note que a taxa de reprodução ρ_n pode variar de ano para ano. A equação de diferenças (5) é linear e pode ser facilmente resolvida por iteração. Obtemos

$$y_1 = \rho_0 y_0,$$
$$y_2 = \rho_1 y_1 = \rho_1 \rho_0 y_0,$$

e, em geral,

$$y_n = \rho_{n-1} \cdots \rho_0 y_0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Assim, se a população inicial y_0 é dada, então a população de cada geração subsequente é determinada pela Eq. (6). Embora, para um problema populacional, ρ_n seja intrinsecamente positivo, a solução (6) também é válida se ρ_n for negativo para alguns ou todos os valores de n. Note, no entanto, que se ρ_n for zero para algum n, então y_{n+1} e todos os valores a seguir de y são nulos; em outras palavras, a espécie torna-se extinta.

Se a taxa de reprodução ρ_n tiver o mesmo valor ρ para todo n, então a equação de diferenças (5) fica

$$y_{n+1} = \rho y_n \tag{7}$$

e sua solução é

$$y_n = \rho^n y_0. \tag{8}$$

A Eq. (7) também tem uma solução de equilíbrio, a saber, $y_n = 0$ para todo n, correspondendo ao valor inicial $y_0 = 0$. O comportamento limite de y_n é fácil de determinar da Eq. (8). De fato,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } |\rho| < 1; \\ y_0, & \text{se } \rho = 1; \\ \text{não existe}, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{9}$$

Em outras palavras, a solução de equilíbrio $y_n = 0$ é assintoticamente estável se $|\rho| < 1$ e instável se $|\rho| > 1$.

Vamos modificar, agora, o modelo populacional representado pela Eq. (5) para incluir o efeito de imigração ou emigração. Se b_n é o aumento total da população no ano n devido à imigração, então a população no ano $n + 1$ é a soma dos aumentos devidos à reprodução natural e à imigração. Assim,

$$y_{n+1} = \rho y_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

onde estamos supondo, agora, que a taxa de reprodução ρ é constante. Podemos resolver a Eq. (10) iterando como antes. Temos

$$y_1 = \rho y_0 + b_0,$$
$$y_2 = \rho(\rho y_0 + b_0) + b_1 = \rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1,$$
$$y_3 = \rho(\rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1) + b_2 = \rho^3 y_0 + \rho^2 b_0 + \rho b_1 + b_2,$$

e assim por diante. Em geral, obtemos

$$y_n = \rho^n y_0 + \rho^{n-1} b_0 + \cdots + \rho b_{n-2} + b_{n-1} = \rho^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} b_j. \tag{11}$$

Note que a primeira parcela na Eq. (11) representa os descendentes da população original, enquanto as outras parcelas representam a população no ano n resultante da imigração em todos os anos precedentes.

No caso especial em que $b_n = b \neq 0$ para todo n, a equação de diferenças é

$$y_{n+1} = \rho y_n + b, \tag{12}$$

cuja solução, pela Eq. (11), é

$$y_n = \rho^n y_0 + (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1})b. \tag{13}$$

Se $\rho \neq 1$, podemos escrever essa solução na forma mais compacta

$$y_n = \rho^n y_0 + \frac{1 - \rho^n}{1 - \rho} b, \tag{14}$$

onde, novamente, as duas parcelas na expressão à direita do sinal de igualdade representam os efeitos da população original e da imigração, respectivamente. Reescrevendo a Eq. (14) na forma

$$y_n = \rho^n \left(y_0 - \frac{b}{1 - \rho}\right) + \frac{b}{1 - \rho} \tag{15}$$

fica mais evidente o comportamento de y_n a longo prazo. Segue da Eq. (15) que $y_n \to b/(1 - \rho)$ se $|\rho| < 1$. Se $|\rho| > 1$ ou se $\rho = -1$, então y_n não tem limite a menos que $y_0 = b/(1 - \rho)$. A quantidade $b/(1 - \rho)$, para $\rho \neq 1$, é uma solução de equilíbrio da Eq. (12), como pode ser visto diretamente daquela equação. É claro que a Eq. (14) não é válida para $\rho = 1$. Para tratar esse caso, precisamos voltar à Eq. (13) e fazer $\rho = 1$ aí. Segue que

$$y_n = y_0 + nb, \tag{16}$$

de modo que, nesse caso, y_n torna-se ilimitada quando $n \to \infty$.

O mesmo modelo fornece, também, um arcabouço para resolver muitos problemas de natureza financeira. Em tais problemas, y_n é o saldo na conta no n-ésimo período de tempo, $\rho_n = 1 + r_n$, onde r_n é a taxa de juros para aquele período, e b_n é a quantia depositada ou retirada. O exemplo a seguir é típico.

EXEMPLO 1

Um recém-graduado da faculdade faz um empréstimo de R$10.000 para comprar um carro. Se a taxa de juros é de 12% ao ano, quais os pagamentos mensais necessários para ele pagar o empréstimo em 4 anos?

A equação de diferenças relevante é a Eq. (12), onde y_n é o saldo do empréstimo no n-ésimo mês, $\rho = 1 + r$, onde r é a taxa de juros mensal e b é o efeito do pagamento mensal. Note que $\rho = 1{,}01$, correspondendo a uma taxa de juros de 1% ao mês. Como pagamentos reduzem o saldo do empréstimo, b tem que ser negativo; o pagamento de fato é $|b|$.

A solução da equação de diferenças (12) com esse valor de ρ e a condição inicial $y_0 = 10.000$ é dada pela Eq. (15), ou seja,

$$y_n = (1{,}01)^n(10.000 + 100b) - 100b. \tag{17}$$

O pagamento b necessário para que o empréstimo seja pago em 4 anos é encontrado fazendo-se $y_{48} = 0$ e resolvendo para b. Isso nos dá

$$b = -100\frac{(1{,}01)^{48}}{(1{,}01)^{48} - 1} = -263{,}34. \tag{18}$$

O pagamento total do empréstimo é 48 vezes $|b|$, ou R$12.640,32. Desse total, R$10.000 são o pagamento do principal e os R$2.640,32 restantes correspondem aos juros.

Equações Não Lineares. Equações de diferenças não lineares são muito mais complicadas e têm soluções muito mais variadas do que as equações lineares. Vamos restringir nossa atenção a uma única equação, a equação de diferenças logística

$$y_{n+1} = \rho y_n \left(1 - \frac{y_n}{k}\right), \tag{19}$$

que é análoga à equação diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \tag{20}$$

discutida na Seção 2.5. Note que se a derivada dy/dt na Eq. (20) for substituída pela diferença $(y_{n+1} - y_n)/h$, então a Eq. (20) se reduz à Eq. (19) com $\rho = 1 + hr$ e $k = (1 + hr)K/hr$. Para simplificar a Eq. (19) um pouco

mais, podemos fazer uma mudança de escala na variável y_n definindo uma nova variável $u_n = y_n/k$. Então a Eq. (19) fica

$$u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n), \tag{21}$$

onde ρ é um parâmetro positivo.

Começamos nossa investigação da Eq. (21) procurando as soluções de equilíbrio, ou constantes. Elas podem ser encontradas igualando-se u_{n+1} a u_n na Eq. (21), o que corresponde a fazer dy/dt igual a zero na Eq. (20). A equação resultante é

$$u_n = \rho u_n - \rho u_n^2, \tag{22}$$

de modo que as soluções de equilíbrio da Eq. (21) são

$$u_n = 0, \qquad u_n = \frac{\rho - 1}{\rho}. \tag{23}$$

A próxima pergunta é se as soluções de equilíbrio são assintoticamente estáveis ou instáveis. Ou seja, para uma condição inicial próxima a uma das soluções de equilíbrio, a sequência solução resultante se aproxima ou se afasta da solução de equilíbrio? Um modo de examinar essa questão é aproximar a Eq. (21) por uma equação linear na vizinhança de uma solução de equilíbrio. Por exemplo, próximo à solução de equilíbrio $u_n = 0$ a quantidade u_n^2 é pequena, comparada a u_n, logo podemos supor desprezível a parcela quadrática na Eq. (21) em comparação com as parcelas lineares. Isso nos deixa com uma equação de diferenças linear

$$u_{n+1} = \rho u_n, \tag{24}$$

que é, presume-se, uma boa aproximação para a Eq. (21) para u_n suficientemente próximo de zero. No entanto, a Eq. (24) é igual à Eq. (7) e já concluímos, na Eq. (9), que $u_n \to 0$ quando n $\to \infty$ se e somente se $|\rho| < 1$ ou (como ρ tem que ser positivo) se $0 < \rho < 1$. Assim, a solução de equilíbrio $u_n = 0$ é assintoticamente estável para a aproximação linear (24) para esse conjunto de valores de ρ, logo concluímos que é, também, assintoticamente estável para a equação não linear completa (21). Essa conclusão está correta, embora nosso argumento não esteja completo. O que está faltando é um teorema que diz que as soluções da equação não linear (21) se parecem com as da equação linear (24) próximas à solução de equilíbrio $u_n = 0$. Não vamos discutir essa questão aqui; a mesma questão é tratada, para equações diferenciais, na Seção 9.3.

Vamos considerar agora a outra solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$. Para estudar soluções em uma vizinhança desse ponto, escrevemos

$$u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} + v_n, \tag{25}$$

onde supomos que v_n é pequeno. Substituindo a Eq. (25) na Eq. (21) e simplificando a equação resultante, obtemos, ao final,

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n - \rho v_n^2. \tag{26}$$

Como v_n é pequeno, desprezamos novamente o termo quadrático em comparação com os lineares e obtemos, assim, a equação linear

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n. \tag{27}$$

Referindo-nos, mais uma vez, à Eq. (9), vemos que $v_n \to 0$ quando $n \to \infty$ para $|2 - \rho| < 1$, isso é, $1 < \rho < 3$. Portanto, concluímos que, para esse conjunto de valores de ρ, a solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$ é assintoticamente estável.

A Figura 2.9.1 contém os gráficos das soluções da Eq. (21) para $\rho = 0{,}8$, $\rho = 1{,}5$ e $\rho = 2{,}8$, respectivamente. Observe que a solução converge para zero quando $\rho = 0{,}8$ e converge para a solução de equilíbrio diferente de zero quando $\rho = 1{,}5$ e $\rho = 2{,}8$. A convergência é monótona para $\rho = 0{,}8$ e $\rho = 1{,}5$, e é oscilatória para $\rho = 2{,}8$. Embora estejam ilustrados os gráficos para condições iniciais particulares, os gráficos para outras condições iniciais são semelhantes.

Outra maneira de apresentar a solução de uma equação de diferenças está ilustrada na Fig. 2.9.2. Em cada parte dessa figura aparecem os gráficos da parábola $y = \rho x(1 - x)$ e da reta $y = x$. As soluções de equilíbrio correspondem aos pontos de interseção dessas duas curvas. O gráfico linear por partes, consistindo em segmentos de retas verticais e horizontais sucessivos, é chamado algumas vezes de diagrama-escada, e representa a sequência solução. A sequência começa no ponto u_0 no eixo dos x. O segmento de reta

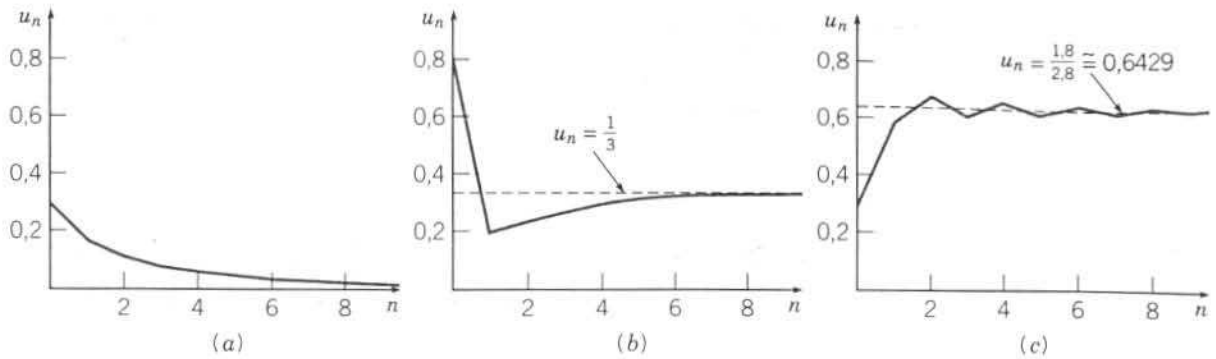


FIGURA 2.9.1 Soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$: (*a*) $\rho = 0,8$; (*b*) $\rho = 1,5$; (*c*) $\rho = 2,8$.

vertical desenhado em u_0 até a parábola corresponde ao cálculo de $\rho u_0(1 - u_0) = u_1$. Esse valor é transferido, então, do eixo dos y para o eixo dos x; esse passo é representado pelo segmento de reta horizontal da parábola à reta $y = x$. O processo é, então, repetido indefinidamente. É claro que a sequência converge para a origem na Figura 2.9.2*a* e para a solução de equilíbrio não nula nos dois outros casos.

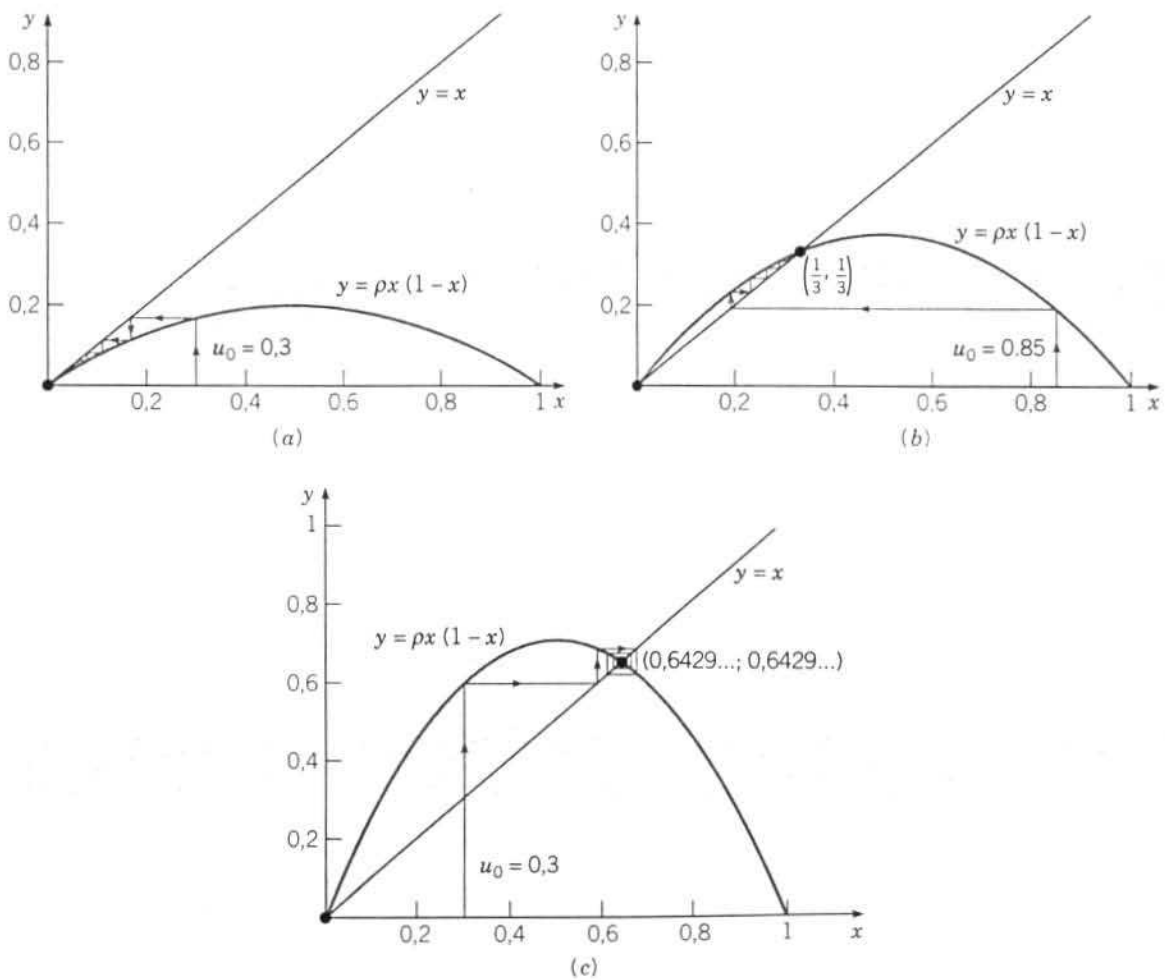


FIGURA 2.9.2 Iterados de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$. (*a*) $\rho = 0,8$; (*b*) $\rho = 1,5$; (*c*) $\rho = 2,8$.

Para resumir nossos resultados até agora: a equação de diferenças (21) tem duas soluções de equilíbrio, $u_n = 0$ e $u_n = (\rho - 1)/\rho$; a primeira é assintoticamente estável para $0 \leq \rho < 1$ e a segunda é assintoticamente estável para $1 < \rho < 3$. Quando $\rho = 1$, as duas soluções de equilíbrio coincidem em $u = 0$; pode-se mostrar que essa solução é assintoticamente estável. O parâmetro ρ na Figura 2.9.3 está no eixo horizontal e u no eixo vertical. Estão ilustradas as soluções de equilíbrio $u = 0$ e $u = (\rho - 1)/\rho$. Os intervalos em que cada

uma delas é estável estão indicados pelas partes sólidas das curvas. Há uma **mudança de estabilidade** de uma solução de equilíbrio para a outra.

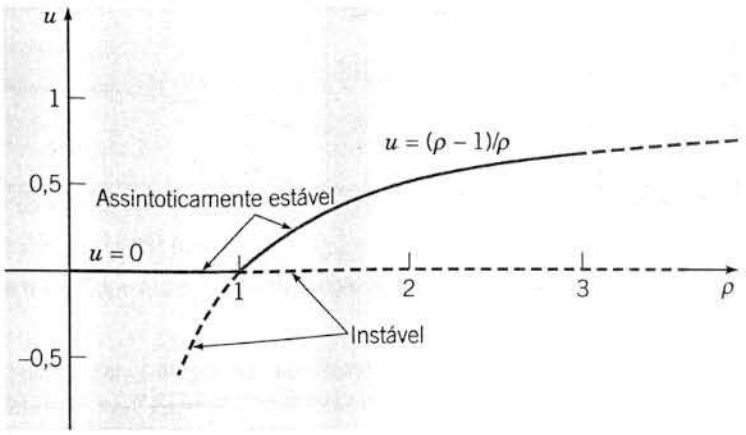
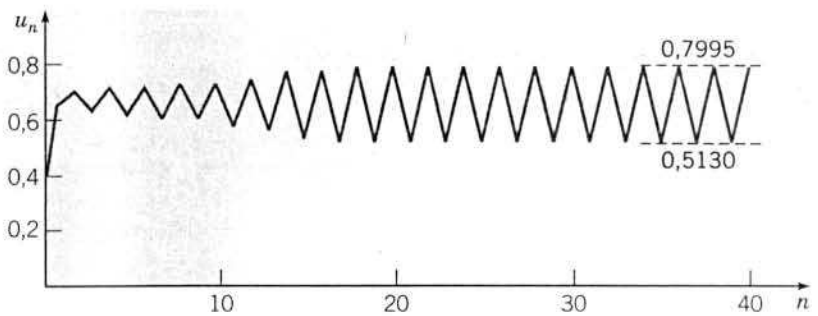
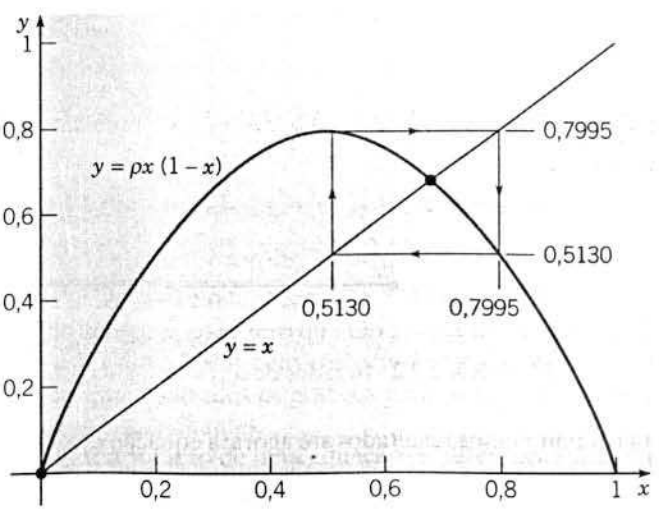


FIGURA 2.9.3 Mudança de estabilidade para $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

Para $\rho > 3$, nenhuma das soluções de equilíbrio é estável, e as soluções da Eq. (21) exibem complexidade cada vez maior quando ρ aumenta. Para ρ um pouco maior do que 3, a sequência u_n aproxima-se rapidamente de uma oscilação estacionária de período 2, isso é, u_n oscila entre dois valores distintos. A Fig. 2.9.4 mostra a solução para $\rho = 3{,}2$. Para n maior do que cerca de 20 os valores da solução se alternam



(*a*)



(*b*)

FIGURA 2.9.4 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}2$; período 2. (*a*) u_n em função de n; (*b*) um ciclo de período 2.

entre 0,5130 e 0,7995. O gráfico foi feito para a condição inicial particular $u_0 = 0{,}3$, mas é semelhante para todos os outros valores iniciais entre 0 e 1. A Figura 2.9.4*b* também mostra a mesma oscilação estacionária como um caminho retangular percorrido repetidamente no sentido horário.

Para ρ aproximadamente igual a 3,449, cada estado na oscilação de período 2 se divide em dois estados distintos e a solução torna-se periódica com período 4; veja a Fig. 2.9.5, que mostra uma solução de período quatro para $\rho = 3{,}5$. Quando ρ continua crescendo, aparecem soluções periódicas com períodos 8, 16, ... A aparição de uma nova solução em um determinado valor do parâmetro é chamada de **bifurcação**.

Os valores de ρ nos quais ocorrem as sucessivas duplicações de período tendem a um limite que é aproximadamente igual a 3,57. Para $\rho > 3{,}57$, as soluções possuem alguma regularidade mas não dá para discernir um padrão detalhado para a maioria dos valores de ρ. Por exemplo, a Fig. 2.9.6 mostra uma solução para $\rho = 3{,}65$. Ela oscila entre 0,3 e 0,9 aproximadamente, mas sua estrutura mais fina é imprevisível. A expressão **caótica** é usada para descrever essa situação. Uma das características de soluções caóticas é sua extrema sensibilidade às condições iniciais. Isso está ilustrado na Fig. 2.9.7, onde aparecem duas soluções da Eq. (21) para $\rho = 3{,}65$. Uma solução é a mesma que aparece na Fig. 2.9.6 e tem valor inicial $u_0 = 0{,}3$, enquanto a outra solução tem valor inicial $u_0 = 0{,}305$. Por aproximadamente 15 iterações as duas soluções permanecem próximas e são difíceis de distinguir uma da outra na figura. Depois disso, embora elas continuem circulando aproximadamente no mesmo conjunto de valores, seus gráficos são bem diferentes. Certamente não seria possível usar uma dessas soluções para estimar o valor da outra para valores de n maiores do que cerca de 15.

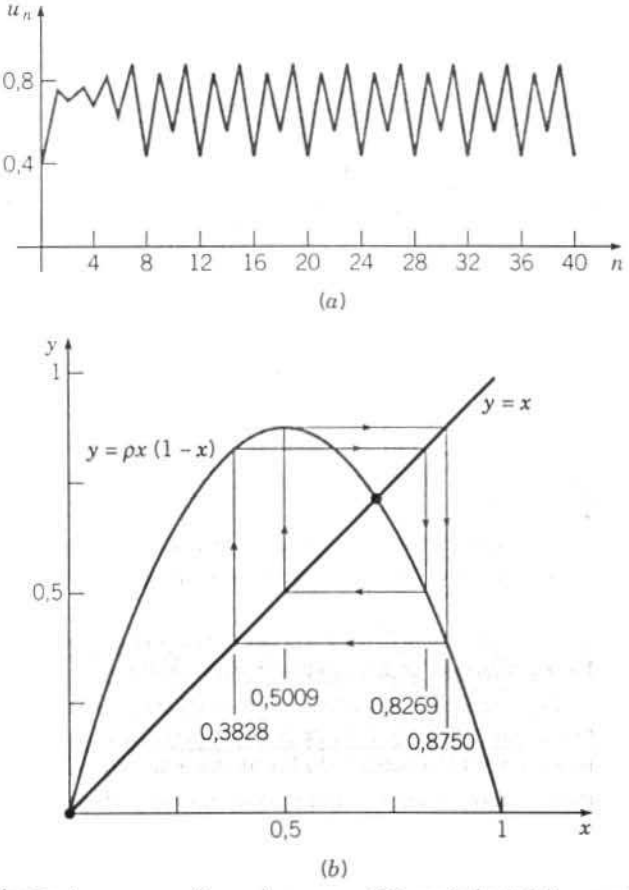


FIGURA 2.9.5 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}5$; período 4. (*a*) u_n em função de n; (*b*) um ciclo de período 4.

Apenas nos últimos anos é que as soluções caóticas de equações de diferenças e diferenciais tornaram-se amplamente conhecidas. A Eq. (20) foi um dos primeiros exemplos de caos matemático a ser encontrado e estudado em detalhe, por Robert May[21] em 1974. Baseado em sua análise dessa equação como um

[21] R. M. May, "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Science 186*(1974) pp. 645–647; "Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Journal of Theoretical Biology 51* (1975) pp. 511–524.

modelo para a população de determinada espécie de inseto, May sugeriu que, se a taxa de crescimento ρ é grande demais, será impossível fazer previsões efetivas em longo prazo sobre essas populações de insetos. A ocorrência de soluções caóticas em problemas simples estimulou uma enorme quantidade de pesquisa em anos recentes, mas muitas perguntas permanecem sem resposta. É cada vez mais claro, no entanto, que soluções caóticas são muito mais comuns do que se suspeitava inicialmente, e podem fazer parte da investigação de um amplo leque de fenômenos.

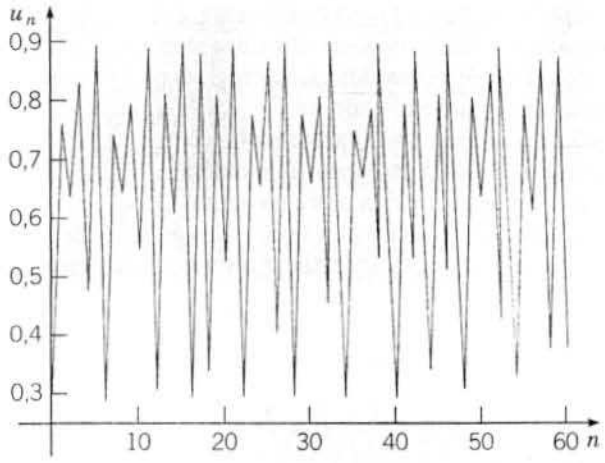


FIGURA 2.9.6 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}65$; uma solução caótica.

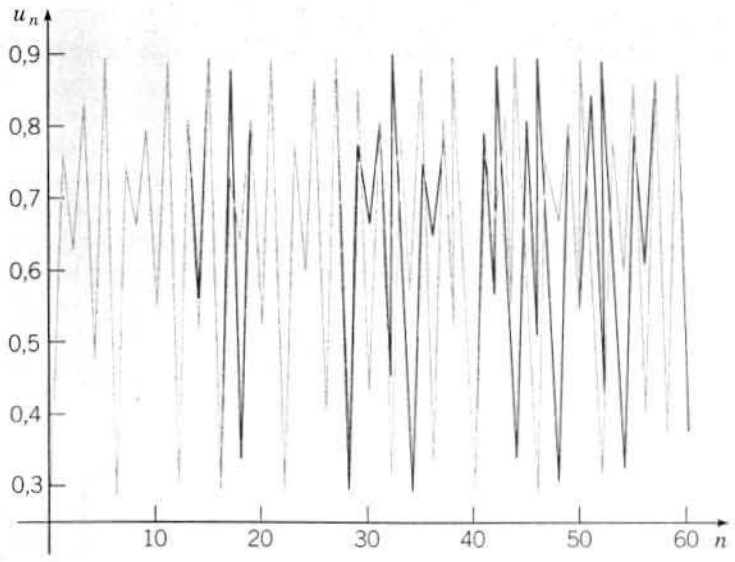


FIGURA 2.9.7 Duas soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}65$; $u_0 = 0{,}3$ e $u_0 = 0{,}305$.

PROBLEMAS

Em cada um dos problemas de 1 a 6, resolva a equação de diferenças dada em função do valor inicial y_0. Descreva o comportamento da solução quando $n \to \infty$.

1. $y_{n+1} = -0{,}9y_n$
2. $y_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}y_n$
3. $y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{n+3}{n+1}}y_n$
4. $y_{n+1} = (-1)^{n+1}y_n$
5. $y_{n+1} = 0{,}5y_n + 6$
6. $y_{n+1} = -0{,}5y_n + 6$
7. Encontre o rendimento efetivo anual de uma conta bancária que paga juros a uma taxa de 7% ao ano composta diariamente, isto é, encontre a razão da diferença entre os saldos final e inicial dividida pelo saldo inicial.
8. Um investidor deposita R$1.000,00 em uma conta que rende juros de 8% ao ano compostos mensalmente e faz, também, depósitos adicionais de R$25,00 por mês. Encontre o saldo na conta após 3 anos.
9. Um recém-formado faz um empréstimo de R$8.000,00 para comprar um carro. O empréstimo é feito com juros anuais de 10%. Que taxa de pagamento mensal é necessária para liquidar o empréstimo em 3 anos? Compare seu resultado com o do Problema 9 da Seção 2.3.
10. Uma pessoa deseja comprar um imóvel com financiamento de R$100.000,00 para ser pago em 30 anos. Qual o pagamento mensal necessário se a taxa de juros anual é (a) 9%, (b) 10%, (c) 12%?
11. Uma pessoa recebe um financiamento de R$100.000,00 para comprar um imóvel com taxa de juros anuais de 9%. Qual o pagamento mensal necessário para quitar o empréstimo em 30 anos? E em 20 anos? Qual a quantia total paga em cada um desses casos?
12. Se a taxa de juros, em um financiamento de 20 anos, permanece fixa em 10% e se um pagamento mensal de R$1.000,00 é o máximo que o comprador pode pagar, qual o empréstimo máximo que pode ser feito sob essas condições?
13. Uma pessoa gostaria de comprar um imóvel com financiamento de R$95.000,00 pagável em 20 anos. Qual a maior taxa de juros que o comprador pode pagar se os pagamentos mensais não podem exceder R$900,00?

A Equação de Diferenças Logística. Os Problemas de 14 a 19 tratam da equação de diferenças (21), $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

14. Faça os detalhes para a análise de estabilidade linear da solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$, isto é, deduza a equação de diferenças (26) no texto para a perturbação v_n.

15. (a) Para $\rho = 3{,}2$, faça o gráfico ou calcule a solução da equação logística (21) para diversas condições iniciais, por exemplo, $u_0 = 0{,}2$; 0,4; 0,6 e 0,8. Observe que em cada caso a solução se aproxima de uma oscilação estacionária entre os mesmos dois valores. Isso ilustra que o comportamento em longo prazo da solução é independente do valor inicial.

    (b) Faça cálculos semelhantes e verifique que a natureza da solução para n grande é independente da condição inicial para outros valores de ρ, como 2,6; 2,8 e 3,4.

16. Suponha que $\rho > 1$ na Eq. (21).

    (a) Desenhe um diagrama-escada qualitativamente correto mostrando, assim, que se $u_0 < 0$, então $u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$.

    (b) De maneira análoga, determine o que acontece quando $n \to \infty$ se $u_0 > 1$.

17. As soluções da Eq. (21) mudam de sequências convergentes para oscilações periódicas de período dois quando o parâmetro ρ passa pelo valor 3. Para ver mais claramente como isso ocorre, efetue os cálculos indicados a seguir.

    (a) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 2{,}9$; 2,95 e 2,99, respectivamente, usando um valor inicial u_0 de sua escolha no intervalo (0, 1). Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para a solução tornar-se "muito próxima" do valor limite. Use qualquer interpretação conveniente para o significado de "muito próxima" na frase anterior.

    (b) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 3{,}01$; 3,05 e 3,1, respectivamente, usando a mesma condição inicial do item (a). Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para se atingir uma solução estado estacionário. Encontre ou estime, também, os dois valores na oscilação estado estacionário.

18. Calculando ou fazendo o gráfico da solução da Eq. (21) para valores diferentes de ρ, estime o valor de ρ para o qual a solução muda de uma oscilação de período dois para uma de período quatro. De modo análogo, estime o valor de ρ para o qual a solução muda de período quatro para período oito.

19. Seja ρ_k o valor de ρ para o qual a solução da Eq. (21) muda do período 2^{k-1} para o período 2^k. Então, como observado no texto, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 \cong 3{,}449$ e $\rho_3 \cong 3{,}544$.

    (a) Usando esses valores para ρ_1, ρ_2 e ρ_3, ou os que você encontrou no Problema 18, calcule $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_2)$.

    (b) Seja $\delta_n = (\rho_n - \rho_{n-1})/(\rho_{n+1} - \rho_n)$. Foi demonstrado que δ_n tende a um limite δ quando $n \to \infty$, onde $\delta \cong 4{,}6692$ é conhecido como número de Feigenbaum.[22] Determine a diferença percentual entre o valor limite δ e δ_2, como calculado no item (a).

    (c) Suponha que $\delta_3 = \delta$ e use essa relação para estimar ρ_4, o valor de ρ para o qual aparecem soluções de período 16.

    (d) Fazendo o gráfico ou calculando soluções próximas para o valor de ρ_4 encontrado no item (c), tente detectar a aparição de uma solução de período 16.

    (e) Observe que

$$\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \cdots + (\rho_n - \rho_{n-1}).$$

Supondo que $(\rho_4 - \rho_3) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-1}$, $(\rho_5 - \rho_4) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-2}$, e assim por diante, expresse ρ_n como uma soma geométrica. Depois encontre o limite de ρ_n quando $n \to \infty$. Isso é uma estimativa do valor de ρ no qual começa a aparecer um comportamento caótico na solução da equação logística (21).

PROBLEMAS

Problemas Variados. Uma das dificuldades em resolver equações de primeira ordem é que existem diversos métodos de resolução, cada um dos quais podendo ser usado em certos tipos de equações. Pode-se levar algum tempo para se adquirir experiência em escolher o método melhor para uma equação. Os 32 primeiros proble-

[22] Esse resultado para a equação de diferenças logística foi descoberto por Mitchell Feigenbaum (1944-) em agosto de 1975, enquanto trabalhava no Laboratório Nacional de Los Alamos. Em um espaço de algumas poucas semanas ele estabeleceu que o mesmo valor limite aparece também em uma grande classe de equações de diferenças com duplicação de períodos. Feigenbaum, que tem doutorado em física pelo M.I.T. (Instituto de Tecnologia de Massachussets), trabalha atualmente na Universidade Rockefeller.

mas a seguir são apresentados de modo que você obtenha alguma prática na identificação do método ou métodos aplicáveis a uma equação dada. Os problemas restantes envolvem certos tipos de equações que podem ser resolvidos por métodos especializados.

Em cada um dos Problemas de 1 a 32, resolva a equação diferencial. Se for dada uma condição inicial, encontre, também, a solução que a satisfaz.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \cos x}{2 - \operatorname{sen} y}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 3 - 6x + y - 2xy$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^3 + 1}{y(2 + 3y)}$

8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2v}$

10. $(x^2y + xy - y)\,dx + (x^2y - 2x^2)\,dy = 0$

11. $(x^2 + y)\,dx + (x + e^y)\,dy = 0$

12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$

14. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-x}\cos y - e^{2y}\cos x}{-e^{-x}\operatorname{sen} y + 2e^{2y}\operatorname{sen} x}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$

18. $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x^2 - 2x}, \quad y(0) = 3$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

20. $y' = e^{x+y}$

21. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y^2 + 6xy - 4}{3x^2 + 4xy + 3y^2} + 0$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$

23. $t\dfrac{dy}{dt} + (t + 1)y = e^{2t}$

24. $2\operatorname{sen} y \operatorname{sen} x \cos x\,dx + \cos y \operatorname{sen}^2 x\,dy = 0$

25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

26. $xy' = y + xe^{y/x}$

27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ *Sugestão:* Defina $u = x^2$.

28. $(2y + 3x)\,dx = -x\,dy$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$

30. $(3y^2 + 2xy)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$

31. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$

32. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0, \quad y(1) = 2$

33. **Equações de Riccati.** A equação

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

é conhecida como equação de Riccati.[23] Suponha que é conhecida alguma solução particular y_1 desta equação. Uma solução mais geral contendo uma constante arbitrária pode ser obtida pela substituição

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

[23] O nome equações de Riccati é em homenagem a Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), um nobre de Veneza que rejeitou propostas de universidades na Itália, na Áustria e na Rússia para fazer seus estudos matemáticos com privacidade em casa. Riccati estudou extensivamente essas equações; no entanto, o resultado enunciado neste problema foi descoberto por Euler (em 1760).

Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação *linear* de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

Note que $v(t)$ vai conter uma única constante arbitrária.

34. Usando o método do Problema 33 e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Riccati a seguir:

(a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$; $\quad y_1(t) = t$

(b) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$; $\quad y_1(t) = \frac{1}{t}$

(c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + y^2}{2\cos t}$; $\quad y_1(t) = \operatorname{sen} t$

35. A propagação de uma única ação em uma população grande (por exemplo, motoristas ligando os faróis ao pôr do sol) muitas vezes depende parcialmente de circunstâncias externas (o escurecer) e parcialmente de uma tendência de imitar os outros que já executaram a ação em questão. Nesse caso, a proporção $y(t)$ de pessoas que já executaram a ação pode ser descrita[24] pela equação

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \tag{i}$$

onde $x(t)$ mede o estímulo externo e b é o coeficiente de imitação.

(a) Note que a Eq. (i) é uma equação de Riccati e que $y_1(t) = 1$ é uma solução. Use a transformação sugerida no Problema 33 e encontre a equação linear satisfeita por $v(t)$.

(b) Encontre $v(t)$ no caso em que $x(t) = at$, onde a é constante. Deixe sua resposta em forma integral.

Algumas Equações de Segunda Ordem Especiais. Equações de segunda ordem envolvem a derivada segunda de uma função desconhecida e têm a forma geral $y'' = f(t, y, y')$. Em geral tais equações não podem ser resolvidas por métodos projetados para equações de primeira ordem. No entanto, existem dois tipos de equações de segunda ordem que podem ser transformados em equações de primeira ordem por uma mudança de variável apropriada. As equações resultantes podem ser resolvidas, algumas vezes, pelos métodos apresentados neste capítulo. Os Problemas de 36 a 51 tratam desses tipos de equações.

Equações sem a Variável Dependente. Para uma equação diferencial de segunda ordem da forma $y'' = f(t, y')$, a substituição $v = y'$, $v' = y''$ leva a uma equação de primeira ordem da forma $v' = f(t, v)$. Se essa equação puder ser resolvida para v, então y pode ser obtida integrando-se $dy/dt = v$. Ao resolver a equação de primeira ordem para v obtém-se uma constante arbitrária, e uma segunda constante é obtida na integração para encontrar y. Em cada um dos Problemas de 36 a 41, use essa substituição para resolver a equação dada.

36. $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0, \quad t > 0$

37. $ty'' + y' = 1, \quad t > 0$

38. $y'' + t(y')^2 = 0$

39. $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty', \quad t > 0$

40. $y'' + y' = e^{-t}$

41. $t^2y'' = (y')^2, \quad t > 0$

Equações sem a Variável Independente. Considere equações diferenciais de segunda ordem da forma $y'' = f(y, y')$, na qual a variável independente t não aparece explicitamente. Se definirmos $v = y'$, obtemos $dv/dt = f(y, v)$. Como a expressão à direita do sinal de igualdade depende de y e v, em vez de t e v, essa equação contém variáveis demais. No entanto, se pensarmos em y como sendo a variável independente, pela regra da cadeia temos $dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v(dv/dy)$. Portanto, a equação diferencial original pode ser escrita como $v(dv/dy) = f(y, v)$. Se essa equação de primeira ordem puder ser resolvida, obtemos v como função de y. Então podemos obter uma relação entre y e t resolvendo $dy/dt = v(y)$, que é uma equação separável. Novamente, o resultado final contém duas constantes arbitrárias. Em cada um dos Problemas de 42 a 47, use esse método para resolver a equação diferencial dada.

42. $yy'' + (y')^2 = 0$

43. $y'' + y = 0$

44. $y'' + y(y')^3 = 0$

45. $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

46. $yy'' - (y')^3 = 0$

47. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Sugestão: no Problema 47 a equação transformada é uma equação de Bernoulli. Veja o Problema 27 na Seção 2.4.

[24] Veja Anatol Rapoport, "Contribution of the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts", *Bulletin of Mathematical Biophysics 14*(1952)159-169 e John Z. Hearon, "Note on the Theory of Mass Behavior', *Bulletin of Mathematical Biophysics 17*(1955)7-13.

Em cada um dos Problemas de 48 até 51, resolva o problema de valor inicial dado usando os métodos dos Problemas de 36 a 47.

48. $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
49. $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$
50. $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$
51. $y'y'' - t = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$

REFERÊNCIAS

Os livros mencionados na Seção 2.5 são

Bailey, N. T. J., *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications* (2nd ed.) (New York: Hafner Press, 1975).

Clark, Colin W., *Mathematical Bioeconomics* (2nd ed.) (New York: Wiley-Interscience, 1990).

Uma boa introdução geral à dinâmica populacional é

Frauenthal, J. C., *Introduction to Population Modeling* (Boston: Birkhauser, 1980).

Uma discussão mais completa da demonstração do teorema fundamental de existência e unicidade pode ser encontrada em livros mais avançados sobre equações diferenciais. Dois que são razoavelmente acessíveis para leitores sem muita bagagem matemática são

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Brauer, F., and Nohel, J., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

Um compêndio valioso de métodos de resolução de equações diferenciais é

Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations* (3rd ed.) (San Diego: Academic Press, 1998).

Para mais discussões e exemplos de fenômenos não lineares, incluindo bifurcações e caos, veja

Strogatz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994).

Uma referência geral sobre equações de diferenças é

Mickens, R. E., *Difference Equations, Theory and Applications* (2nd ed.) (New York: Van Nostrand Reinhold, 1990).

Um tratamento elementar de soluções caóticas de equações de diferenças pode ser encontrado em

Devaney, R. L., *Chaos, Fractals, and Dynamics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990).

CAPÍTULO

3

Equações Lineares de Segunda Ordem

Equações lineares de segunda ordem têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível em um nível matemático relativamente elementar. Para apresentar as ideias fundamentais em um contexto o mais simples possível vamos descrevê-las neste capítulo para equações de segunda ordem. Outra razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. Não se pode progredir muito no estudo de mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos sem esbarrar na necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem. Como exemplo, vamos discutir oscilações de alguns sistemas mecânicos e elétricos básicos no final deste capítulo.

3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \tag{1}$$

onde f é alguma função dada. Em geral, denotaremos a variável independente por t, já que o tempo é, com frequência, a variável independente em fenômenos físicos, mas, algumas vezes, usaremos x em seu lugar. Usaremos y ou, ocasionalmente, outra letra para denotar a variável dependente. A Eq. (1) é dita **linear** se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \tag{2}$$

ou seja, se f é linear em y e dy/dt. Na Eq. (2), g, p e q são funções especificadas da variável independente t, mas não dependem de y. Nesse caso, reescrevemos a Eq. (1), em geral, como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{3}$$

onde a linha denota diferenciação em relação a t. No lugar da Eq. (3) encontramos, com frequência, a equação

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \tag{4}$$

É claro que, se $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Eq. (4) por $P(t)$, obtendo, assim, a Eq. (3) com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \qquad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \qquad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \tag{5}$$

Ao discutir a Eq. (3) e tentar resolvê-la, vamos nos restringir a intervalos nos quais as funções p, q e g sejam contínuas.[1]

Se a Eq. (1) não for da forma (3) ou (4), então ela é dita **não linear**. Investigações analíticas de equações não lineares são relativamente difíceis, de modo que teremos pouco a dizer sobre elas neste livro. Abordagens numéricas ou geométricas são, frequentemente, mais apropriadas, e são discutidas nos Capítulos 8 e 9.

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial, como a Eq. (1), (3) ou (4), junto com um par de condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0', \tag{6}$$

onde y_0 e y_0' são números dados que descrevem os valores de y e de y' no ponto inicial t_0. Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da solução, mas, também, o coeficiente angular y_0' da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, *grosso modo*, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução, e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes.

Uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função $g(t)$ na Eq. (3), ou $G(t)$ na Eq. (4), for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita **não homogênea**. Em consequência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes, de termo não homogêneo. Vamos começar nossa discussão com equações homogêneas, que escreveremos na forma

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0. \tag{7}$$

Mais tarde, nas Seções 3.5 e 3.6, mostraremos que uma vez resolvida a equação homogênea sempre é possível resolver a equação não homogênea correspondente (4) ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental.

Vamos concentrar nossa atenção, neste capítulo, a equações nas quais as funções P, Q e R são constantes. Nesse caso, a Eq. (7) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{8}$$

onde a, b e c são constantes dadas. Acontece que a Eq. (8) sempre pode ser facilmente resolvida em termos das funções elementares do Cálculo. Por outro lado, é muito mais difícil, em geral, resolver a Eq. (7) se os coeficientes não forem constantes, e vamos adiar um tratamento desse caso até o Capítulo 5. Antes de atacar a Eq. (8), vamos adquirir alguma experiência analisando um exemplo simples, mas, de certa forma, típico.

EXEMPLO 1

Resolva a equação

$$y'' - y = 0, \tag{9}$$

e encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \tag{10}$$

Note que a Eq. (9) é simplesmente a Eq. (8) com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$. Em outras palavras, a Eq. (9) diz que procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda da função é igual a ela mesma. Alguma das funções que você estudou em Cálculo tem essa propriedade? Um pouco de reflexão produzirá, provavelmente, pelo menos uma dessas funções, a saber, a função exponencial $y_1(t) = e^t$. Um pouco mais de reflexão poderia produzir, também, uma segunda função, $y_2(t) = e^{-t}$. Um pouco de experimentação revela que múltiplos constantes dessas duas soluções também são soluções. Por exemplo, as funções $2e^t$ e $5e^{-t}$ também satisfazem a equação diferencial (9), como você pode verificar calculando suas derivadas segundas. Da mesma forma, as funções $c_1y_1(t) = c_1e^t$ e $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ satisfazem a equação diferencial (9) para todos os valores das constantes c_1 e c_2.

A seguir, é fundamental que se note que a soma de duas soluções quaisquer da Eq. (9) também é uma solução. Em particular, como $c_1y_1(t)$ e $c_2y_2(t)$ são soluções da Eq. (9), a função

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \tag{11}$$

[1]Há um tratamento correspondente para equações lineares de ordem mais alta no Capítulo 4. Se quiser, você pode ler as partes apropriadas do Capítulo 4 em paralelo com o Capítulo 3.

também é solução, quaisquer que sejam os valores de c_1 e c_2. Mais uma vez, isso pode ser verificado calculando-se a derivada segunda y'' a partir da Eq. (11). Temos $y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$ e $y'' = c_1e^t + c_2e^{-t}$; logo, y'' é igual a y e a Eq. (9) é satisfeita.

Vamos resumir o que fizemos até agora neste exemplo. Uma vez observado que as funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da Eq. (9), segue que a combinação linear geral (11) dessas funções também é solução. Como os coeficientes c_1 e c_2 na Eq. (11) são arbitrários, essa expressão representa uma família infinita de soluções da equação diferencial (9).

Vamos considerar, agora, como escolher um elemento particular dessa família infinita de soluções que satisfaça, também, o conjunto dado de condições iniciais (10). Em outras palavras, procuramos uma solução cujo gráfico contenha o ponto (0, 2) e tenha reta tangente nesse ponto com coeficiente angular –1. Primeiro, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (11), o que nos dá a equação

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{12}$$

A seguir, diferenciamos a Eq. (11), o que resulta em

$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

Depois, fazendo $t = 0$ e $y' = -1$, obtemos

$$c_1 - c_2 = -1. \tag{13}$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (12) e (13) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad c_2 = \tfrac{3}{2}. \tag{14}$$

Finalmente, inserindo esses valores na Eq. (11), obtemos

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}, \tag{15}$$

a solução do problema de valor inicial que consiste na equação diferencial (9) e nas condições iniciais (10).

O que podemos concluir do exemplo precedente que vai nos ajudar a tratar a equação mais geral (8),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

cujos coeficientes a, b e c são constantes (reais) arbitrárias? Em primeiro lugar, as soluções no exemplo eram funções exponenciais. Além disso, quando identificamos duas soluções fomos capazes de usar uma combinação linear delas para satisfazer as condições iniciais dadas, além da equação diferencial propriamente dita.

Explorando essas duas ideias, podemos resolver a Eq. (8) para quaisquer valores de seus coeficientes e satisfazer, também, qualquer conjunto de condições iniciais dado para y e y'. Começamos procurando soluções exponenciais da forma $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo essas expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

ou, como $e^{rt} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{16}$$

A Eq. (16) é chamada de **equação característica** da equação diferencial (8). Seu significado reside no fato de que, se r é uma raiz da equação polinomial (16), então $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (8). Como a Eq. (16) é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas. Vamos considerar o primeiro caso aqui e os dois últimos nas Seções 3.3 e 3.4.

Supondo que as raízes da equação característica (16) são reais e distintas, vamos denotá-las por r_1 e r_2, onde $r_1 \neq r_2$. Então $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções da Eq. (8). Como no Exemplo 1, segue que

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{17}$$

também é uma solução de (8). Para verificar se isso é verdade, podemos diferenciar a expressão na Eq. (17); portanto,

$$y' = c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t} \tag{18}$$

e

$$y'' = c_1r_1^2e^{r_1t} + c_2r_2^2e^{r_2t}. \tag{19}$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (8) por essas expressões e rearrumando os termos, obtemos

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t}. \tag{20}$$

As quantidades entre parênteses à direita do sinal de igualdade na Eq. (20) são nulas, pois r_1 e r_2 são raízes da Eq. (16); logo, y dado pela Eq. (17) é, de fato, uma solução da Eq. (8), como queríamos verificar.

Vamos supor agora que queremos encontrar o elemento particular da família de soluções (17) que satisfaz as condições iniciais (6)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'.$$

Fazendo $t = t_0$ e $y = y_0$ na Eq. (17), obtemos

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0. \tag{21}$$

Analogamente, fazendo $t = t_0$ e $y' = y_0'$ na Eq. (18), temos

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y_0'. \tag{22}$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (21) e (22) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}. \tag{23}$$

Lembre-se de que $r_1 - r_2 \neq 0$, de modo que as expressões na Eq. (23) sempre fazem sentido. Assim, não importa que condições iniciais sejam dadas – ou seja, independentemente dos valores de t_0, y_0 e y_0' nas Eqs. (6) – sempre é possível determinar c_1 e c_2 de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas. Além disso, existe apenas uma escolha possível de c_1 e c_2 para cada conjunto dado de condições iniciais. Com os valores de c_1 e c_2 dados pela Eq. (23), a expressão (17) é a solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{24}$$

É possível mostrar, baseado no teorema fundamental citado na próxima seção, que todas as soluções da Eq. (8) estão incluídas na expressão (17), pelo menos no caso em que as raízes da Eq. (16) são reais e distintas. Portanto, chamamos a Eq. (17) de solução geral da Eq. (8). O fato de que quaisquer condições iniciais possíveis podem ser satisfeitas pela escolha adequada das constantes na Eq. (17) torna mais plausível a ideia de que essa expressão inclui, de fato, todas as soluções da Eq. (8).

Vamos considerar mais alguns exemplos.

EXEMPLO 2

Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \tag{25}$$

Supondo que $y = e^{rt}$, segue que r tem que ser raiz da equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Assim, os valores possíveis de r são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$; a solução geral da Eq. (25) é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \tag{26}$$

EXEMPLO 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \tag{27}$$

A solução geral da equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 e é dada pela Eq. (26). Para satisfazer a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (26); assim, c_1 e c_2 têm que satisfazer

$$c_1 + c_2 = 2. \tag{28}$$

Para usar a segunda condição inicial, primeiro precisamos diferenciar a Eq. (26). Isso nos dá $y' = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$. Fazendo, agora, $t = 0$ e $y' = 3$, obtemos

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \tag{29}$$

Resolvendo as Eqs. (28) e (29), vemos que $c_1 = 9$ e $c_2 = -7$. Usando esses valores na expressão (26), obtemos a solução

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \tag{30}$$

do problema de valor inicial (27). A Figura 3.1.1 mostra o gráfico da solução.

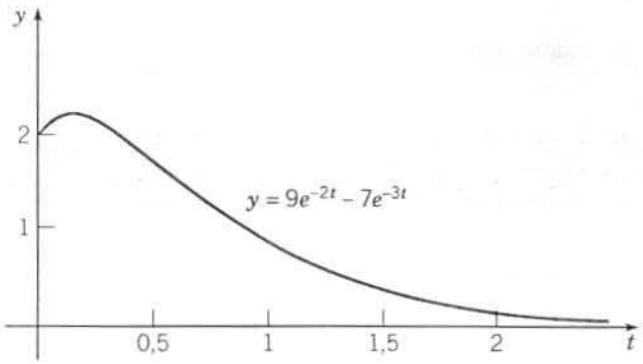


FIGURA 3.1.1 Solução de $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$.

EXEMPLO 4

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{31}$$

Se $y = e^{rt}$, então a equação característica é

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

e suas raízes são $r = 3/2$ e $r = 1/2$. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}. \tag{32}$$

Usando as condições iniciais, obtemos as duas equações seguintes para c_1 e c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

A solução dessas equações é $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{5}{2}$, de modo que a solução do problema de valor inicial (31) é

$$y = -\tfrac{1}{2}e^{3t/2} + \tfrac{5}{2}e^{t/2}. \tag{33}$$

A Figura 3.1.2 mostra o gráfico da solução.

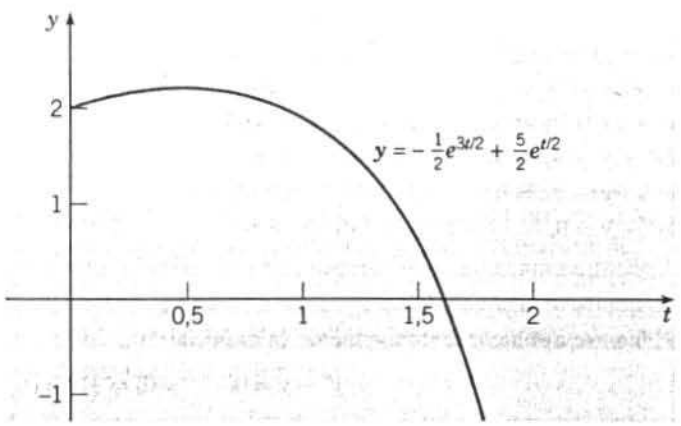


FIGURA 3.1.2 Solução de $4y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0{,}5$.

EXEMPLO 5

A solução (30) do problema de valor inicial (27) começa crescendo (já que o coeficiente angular da reta tangente a seu gráfico é positivo, inicialmente), mas acaba tendendo a zero (pois ambas as parcelas contêm exponenciais com expoentes negativos). Portanto, a solução tem que atingir um máximo, e o gráfico na Figura 3.1.1 confirma isso. Determine a localização desse ponto de máximo.

Pode-se estimar as coordenadas do ponto de máximo através do gráfico, mas para encontrá-las precisamente procuramos o ponto onde o gráfico da solução tem reta tangente horizontal. Diferenciando a solução (30), $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$, em relação a t, obtemos

$$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t}. \tag{34}$$

Igualando y' a zero e multiplicando por e^{3t}, encontramos o valor crítico t_m que satisfaz $e^t = 7/6$; logo

$$t_m = \ln(7/6) \cong 0{,}15415. \tag{35}$$

O valor máximo correspondente, y_m, é dado por

$$y_m = 9e^{-2t_m} - 7e^{-3t_m} = \frac{108}{49} \cong 2{,}20408. \tag{36}$$

Neste exemplo o coeficiente angular inicial é 3, mas a solução da equação diferencial dada se comporta de maneira semelhante para qualquer coeficiente angular inicial positivo. O Problema 26 pede que você determine como as coordenadas do ponto de máximo dependem do coeficiente angular inicial.

Voltando para a equação $ay'' + by' + cy = 0$ com coeficientes arbitrários, lembre-se de que, quando $r_1 \neq r_2$, sua solução geral (17) é a soma de duas funções exponenciais. Portanto, a solução tem um comportamento geométrico relativamente simples: quando t aumenta, a solução, em módulo, ou tende a zero (quando ambos os expoentes forem negativos), ou cresce rapidamente (quando pelo menos um dos expoentes for positivo). Esses dois casos aparecem nos Exemplos 3 e 4, ilustrados nas Figuras 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. Existe um terceiro caso menos frequente: a solução tende a uma constante se um dos expoentes for nulo e o outro for negativo.

Nas Seções 3.3 e 3.4 voltaremos ao problema de resolver a equação $ay'' + by' + cy = 0$ quando as raízes da equação característica forem, respectivamente, complexas conjugadas ou reais e iguais. Enquanto isso, na Seção 3.2, fornecemos uma discussão sistemática da estrutura matemática das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Em cada um dos Problemas de 9 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$
17. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
18. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{2t}$.
19. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = \tfrac{5}{4}, \quad y'(0) = -\tfrac{3}{4}.$$

Faça o gráfico da solução para $0 \leq t \leq 2$ e determine seu valor mínimo.

20. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' - 3y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}.$$

Depois determine o valor máximo da solução e encontre, também, o ponto onde a solução se anula.

21. Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = 2$. Depois encontre α de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.
22. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \beta$. Depois encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Em cada um dos Problemas 23 e 24, determine os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$; determine, também, os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções (não nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$.

23. $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$

24. $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$

25. Considere o problema de valor inicial

$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta,$$

onde $\beta > 0$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Faça o gráfico da solução quando $\beta = 1$. Encontre as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo da solução neste caso.

(c) Encontre o menor valor de β para o qual a solução não tem ponto de mínimo.

26. Considere o problema de valor inicial (veja o Exemplo 5)

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \beta,$$

onde $\beta > 0$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Determine as coordenadas t_m e y_m do ponto de máximo da solução como funções de β.

(c) Determine o menor valor de β para o qual $y_m \geq 4$.

(d) Determine o comportamento de t_m e y_m quando $\beta \to \infty$.

27. Considere a equação $ay'' + by' + cy = d$, onde a, b, c e d são constantes.

(a) Encontre todas as soluções de equilíbrio, ou constantes, dessa equação diferencial.

(b) Denote por y_e uma solução de equilíbrio e seja $Y = y - y_e$. Então Y é o desvio de uma solução y da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por Y.

28. Considere a equação $ay'' + by' + cy = 0$, onde a, b e c são constantes com $a > 0$. Encontre condições sobre a, b e c para que as raízes da equação característica sejam:

(a) reais, diferentes e negativas;

(b) reais com sinais opostos;

(c) reais, diferentes e positivas.

3.2 Soluções de Equações Lineares Homogêneas; o Wronskiano

Na seção precedente, mostramos como resolver algumas equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

onde a, b e c são constantes. A partir desses resultados, vamos obter uma visão mais clara da estrutura das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem. Essa compreensão irá nos auxiliar, por sua vez, a resolver outros problemas que encontraremos mais tarde.

Ao discutir propriedades gerais das equações diferenciais lineares é conveniente usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I, isso é, para $\alpha < t < \beta$. Os casos $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, ou ambos, estão incluídos. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I definimos o operador diferencial L pela fórmula

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \tag{1}$$

Note que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor de $L[\phi]$ em um ponto t é

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

Por exemplo, se $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$ e $\phi(t) = \operatorname{sen} 3t$, então

$$\begin{aligned} L[\phi](t) &= (\operatorname{sen} 3t)'' + t^2(\operatorname{sen} 3t)' + (1 + t)\operatorname{sen} 3t \\ &= -9\operatorname{sen} 3t + 3t^2 \cos 3t + (1 + t)\operatorname{sen} 3t. \end{aligned}$$

O operador L é, muitas vezes, escrito na forma $L = D^2 + pD + q$, onde D é o operador derivada.

Vamos estudar, nesta seção, a equação linear homogênea de segunda ordem $L[\phi](t) = 0$. Como é costume usar o símbolo y para denotar $\phi(t)$, escreveremos, normalmente, esta equação na forma

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{2}$$

Associamos à Eq. (2) um conjunto de condições iniciais,

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0', \tag{3}$$

onde t_0 é qualquer ponto no intervalo I e y_0, y_0' são números reais dados. Gostaríamos de saber se o problema de valor inicial (2), (3) sempre tem solução e se pode ter mais de uma solução. Gostaríamos, também, de saber se é possível dizer alguma coisa sobre a forma e a estrutura das soluções que possam ajudar a encontrar soluções de problemas particulares. As respostas a essas questões estão contidas nos teoremas desta seção.

O resultado teórico fundamental para problemas de valor inicial para equações lineares de segunda ordem está enunciado no Teorema 3.2.1, que é análogo ao Teorema 2.4.1 para equações lineares de primeira ordem. Como o resultado também pode ser aplicado a equações não homogêneas, o teorema está enunciado nessa forma mais geral.

Teorema 3.2.1 **(Teorema de Existência e Unicidade)**
Considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{4}$$

onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I que contém o ponto t_0. Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ deste problema e a solução existe em todo o intervalo I.

Enfatizamos que o teorema diz três coisas:

1. O problema de valor inicial *tem* uma solução; em outras palavras, *existe* uma solução.
2. O problema de valor inicial tem *apenas uma* solução; ou seja, a solução é *única*.
3. A solução ϕ está definida *em todo o intervalo* I, onde os coeficientes são contínuos, e é, pelo menos, duas vezes diferenciável ali.

Para alguns problemas, algumas dessas afirmações são fáceis de provar. Por exemplo, vimos no Exemplo 1 da Seção 3.1 que o problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \tag{5}$$

tem a solução

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}. \tag{6}$$

O fato de que encontramos uma solução certamente estabelece que existe uma solução para esse problema de valor inicial. Além disso, a solução (6) é duas vezes diferenciável, de fato, diferenciável um número qualquer de vezes, em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, onde os coeficientes da equação diferencial são contínuos. Por outro lado, não é óbvio, e é mais difícil provar, que o problema de valor inicial (5) não tem outras soluções além da dada pela Eq. (6). Não obstante, o Teorema 3.2.1 afirma que essa solução é, de fato, a única solução do problema de valor inicial (5).

Para a maioria dos problemas da forma (4) não é possível escrever uma expressão útil para a solução. Essa é uma grande diferença entre equações lineares de primeira e de segunda ordens. Portanto, todas as partes do teorema têm que ser demonstradas por métodos gerais, que não envolvem a obtenção de tal expressão. A demonstração do Teorema 3.2.1 é razoavelmente difícil e não será discutida aqui.[2] Aceitaremos, entretanto, o Teorema 3.2.1 como verdadeiro e o utilizaremos sempre que necessário.

EXEMPLO 1

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

existe com certeza.

[2]Uma demonstração do Teorema 3.2.1 pode ser encontrada, por exemplo, no Capítulo 6, Seção 8, do livro de autoria de Coddington, listado nas referências no final deste capítulo.

Se a equação diferencial dada for colocada na forma da Eq. (4), então $p(t) = 1/(t-3)$, $q(t) = -(t+3)/t(t-3)$ e $g(t) = 0$. Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são $t = 0$ e $t = 3$. Logo, o maior intervalo contendo o ponto inicial $t = 1$ no qual todos os coeficientes são contínuos é $0 < t < 3$. Portanto, esse é o maior intervalo no qual o Teorema 3.2.1 garante que a solução existe.

EXEMPLO 2

Encontre a única solução do problema de valor inicial

$$y'' = p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0.

A função $y = \phi(t) = 0$ para todo t em I certamente satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais. Pela parte referente à unicidade no Teorema 3.2.1, essa é a única solução do problema dado.

Vamos supor, agora, que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2); em outras palavras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0,$$

e analogamente para y_2. Então, como nos exemplos na Seção 3.1 podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2. Enunciamos esse resultado como um teorema.

Teorema 3.2.2 **(Princípio da Superposição)**

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

Um caso particular do Teorema 3.2.2 ocorre se c_1 ou c_2 for zero. Podemos concluir, então, que qualquer múltiplo constante de uma solução da Eq. (2) também é solução.

Para provar o Teorema 3.2.2, precisamos apenas substituir y na Eq. (2) pela expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{7}$$

Calculando as derivadas indicadas e rearrumando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned}$$

Como $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$, segue que $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Portanto, independente dos valores de c_1 e c_2, y dado pela Eq. (7) satisfaz a equação diferencial (2), e a demonstração do Teorema 3.2.2 está completa.

O Teorema 3.2.2 diz que, começando com apenas duas soluções da Eq. (2), podemos construir uma família infinita de soluções através da Eq. (7). A próxima pergunta é se todas as soluções da Eq. (2) estão incluídas na Eq. (7) ou se podem existir soluções com formas diferentes. Começamos a estudar essa questão examinando se as constantes c_1 e c_2 na Eq. (7) podem ser escolhidas de modo que a solução satisfaça as condições iniciais (3). Essas condições iniciais obrigam c_1 e c_2 a satisfazerem as equações

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0, \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{8}$$

O determinante dos coeficientes do sistema (8) é

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0). \tag{9}$$

Se $W \neq 0$, as Eqs. (8) têm uma única solução (c_1, c_2), não importa quais sejam os valores de y_0 e de y_0'. Esta solução é dada por

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \qquad c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \tag{10}$$

ou, em termos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Com esses valores para c_1 e c_2, a expressão (7) satisfaz as condições iniciais (3), assim como a equação diferencial (2).

Por outro lado, se $W = 0$, as Eqs. (8) não têm solução, a menos que y_0 e y_0' satisfaçam uma determinada condição adicional; nesse caso, existe uma infinidade de soluções.

O determinante W é chamado o **determinante wronskiano**,[3] ou, simplesmente, **wronskiano**, das soluções y_1 e y_2. Usamos, algumas vezes, a notação completa $W(y_1, y_2)(t_0)$ para denotar a expressão mais à direita na Eq. (9) enfatizando, desse modo, o fato de que o wronskiano depende das funções y_1 e y_2 e que é calculado no ponto t_0. O argumento precedente é suficiente para estabelecer o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3 Sejam y_1 e y_2 duas soluções da Eq. (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e suponha que as condições iniciais (3)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'$$

sejam atribuídas. Então, sempre é possível escolher constantes c_1, c_2 tais que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

satisfaça a equação diferencial (2) e as condições iniciais (3) se, e somente se, o wronskiano

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

não se anula em t_0.

EXEMPLO 3 No Exemplo 2 da Seção 3.1 vimos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções da equação diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Encontre o wronskiano de y_1 e y_2.

O wronskiano dessas duas funções é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

Como W é diferente de zero para todos os valores de t, as funções y_1 e y_2 podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada junto com quaisquer condições iniciais prescritas para qualquer valor de t. Um desses problemas de valor inicial foi resolvido no Exemplo 3 da Seção 3.1.

O próximo teorema justifica a expressão "solução geral" introduzida na Seção 3.1 para a combinação linear $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

[3] Os determinantes wronskianos recebem esse nome por causa de Józef Maria Hoëné-Wronski (1776-1853), que nasceu na Polônia mas viveu a maior parte da sua vida na França. Wronski era um homem talentoso, mas complicado, e sua vida foi marcada por disputas acaloradas frequentes com outros indivíduos e instituições.

Teorema 3.2.4 Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0.$$

Então, a família de soluções

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da Eq. (2) se, e somente se, existe um ponto t_0 onde o wronskiano de y_1 e y_2 não é nulo.

Seja ϕ uma solução qualquer da Eq. (2). Para provar o Teorema 3.2.4 precisamos determinar se ϕ está incluída no conjunto de combinações lineares $c_1y_1 + c_2y_2$. Ou seja, precisamos determinar se existem valores das constantes c_1 e c_2 que tornam a combinação linear igual a ϕ. Seja t_0 um ponto onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero. Calcule ϕ e ϕ' nesse ponto e chame esses valores de y_0 e y_0', respectivamente; assim,

$$y_0 = \phi(t_0), \qquad y_0' = \phi'(t_0).$$

A seguir, considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{12}$$

A função ϕ é, certamente, solução desse problema de valor inicial. Além disso, como estamos supondo que $W(y_1, y_2)(t_0)$ é diferente de zero, então é possível (pelo Teorema 3.2.3) escolher c_1 e c_2 tais que $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução do problema de valor inicial (12). De fato, os valores apropriados de c_1 e c_2 são dados pela Eq. (10) ou (11). A parte relativa à unicidade no Teorema 3.2.1 garante que essas duas soluções do mesmo problema de valor inicial são iguais; assim, para uma escolha apropriada de c_1 e c_2,

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{13}$$

e, portanto, ϕ está incluída na família de funções $c_1y_1 + c_2y_2$. Finalmente, como ϕ é uma solução *arbitrária* da Eq. (2), segue que *toda* solução desta equação está incluída nessa família.

Suponha, agora, que não existe ponto t_0 onde o wronskiano não seja nulo. Logo $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$ qualquer que seja o ponto t_0 selecionado. Então (pelo Teorema 3.2.3) existem valores de y_0 e y_0' para os quais o sistema (8) não tem solução para c_1 e c_2. Selecione tal par de valores e escolha a solução $\phi(t)$ da Eq. (2) que satisfaz as condições iniciais (3). Note que o Teorema 3.2.1 garante a existência de tal solução. Entretanto, esta solução não está incluída na família $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Assim, essa combinação linear não inclui todas as soluções da Eq. (2) se $W(y_1, y_2) = 0$. Isso completa a demonstração do Teorema 3.2.4.

O Teorema 3.2.4 diz que a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ contém todas as soluções da Eq. (2) se, e somente se, o wronskiano de y_1 e y_2 não é identicamente nulo. É, portanto, natural (e já o fizemos na seção precedente) chamar a expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes constantes arbitrários de **solução geral** da Eq. (2). Dizemos que as soluções y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental de soluções** da Eq. (2) se, e somente se, seu wronskiano é diferente de zero.

Podemos colocar o resultado do Teorema 3.2.4 em linguagem ligeiramente diferente: para encontrar a solução geral e, portanto, todas as soluções de uma equação da forma (2), precisamos, apenas, achar duas soluções da equação dada cujo wronskiano seja diferente de zero. Fizemos precisamente isso em diversos exemplos na Seção 3.1, embora não tenhamos calculado ali os wronskianos. Você deveria voltar e fazer isso, verificando, assim, que todas as soluções que chamamos de "solução geral" na Seção 3.1 satisfazem, de fato, a condição necessária sobre o wronskiano. De outro modo, os exemplos a seguir incluem todos os mencionados na Seção 3.1, assim como muitos outros problemas semelhantes.

EXEMPLO 4 Suponha que $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções de uma equação da forma (2). Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

Vamos calcular o wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)t].$$

Como a função exponencial nunca se anula e como estamos supondo que $r_2 - r_1 \neq 0$, segue que W é diferente de zero para todo valor de t. Em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

EXEMPLO 5 Mostre que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \tag{14}$$

Mostraremos como resolver a Eq. (14) mais tarde (veja o Problema 34 na Seção 3.3). No entanto, neste estágio podemos verificar por substituição direta que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial. Como $y_1'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$ e $y_1''(t) = \frac{1}{4}t^{-3/2}$, temos

$$2t^2(-\tfrac{1}{4}t^{-3/2}) + 3t(\tfrac{1}{2}t^{-1/2}) - t^{1/2} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} - 1)t^{1/2} = 0.$$

Analogamente, $y_2'(t) = -t^{-2}$ e $y_2''(t) = 2t^{-3}$, logo

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0.$$

A seguir, vamos calcular o wronskiano W de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{2}t^{-3/2}. \tag{15}$$

Como $W \neq 0$ para $t > 0$, concluímos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções ali.

Fomos capazes de encontrar, em diversos casos, um conjunto fundamental de soluções e, portanto, a solução geral de uma equação diferencial dada. No entanto, muitas vezes isso é uma tarefa difícil, e uma pergunta natural é se uma equação diferencial da forma (2) sempre tem um conjunto fundamental de soluções. O teorema a seguir nos dá uma resposta afirmativa a essa pergunta.

Teorema 3.2.5 Considere a equação diferencial (2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

cujos coeficientes p e q são contínuos em algum intervalo aberto I. Escolha algum ponto t_0 em I. Seja y_1 a solução da Eq. (2), que também satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 1, \qquad y'(t_0) = 0,$$

e seja y_2 a solução da Eq. (2) que satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 1.$$

Então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (2).

Observe, em primeiro lugar, que a *existência* das funções y_1 e y_2 é garantida pelo Teorema 3.2.1. Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, só precisamos calcular seu wronskiano em t_0:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como seu wronskiano não se anula no ponto t_0, as funções y_1 e y_2 formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções, completando, assim, a demonstração do Teorema 3.2.5.

Note que a parte difícil dessa demonstração, mostrar a existência de um par de soluções, é obtida invocando-se o Teorema 3.2.1. Note, também, que o Teorema 3.2.5 não fala nada sobre como encontrar as soluções y_1 e y_2 resolvendo os problemas de valor inicial especificados. Não obstante, pode ser confortador saber que sempre existe um conjunto fundamental de soluções.

EXEMPLO 6 Encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial

$$y'' - y = 0, \tag{16}$$

usando o ponto inicial $t_0 = 0$.

Vimos, na Seção 3.1, que duas soluções da Eq. (16) são $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$. O wronskiano dessas soluções é $W(y_1, y_2)(t) = -2 \neq 0$, logo elas formam um conjunto fundamental de soluções. No entanto, não formam o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 3.2.5, já que não satisfazem as condições iniciais mencionadas nesse teorema no ponto $t = 0$.

Para encontrar o conjunto fundamental de soluções especificado no teorema, precisamos encontrar as soluções que satisfazem as condições iniciais apropriadas. Vamos denotar por $y_3(t)$ a solução da Eq. (16) que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{17}$$

A solução geral da Eq. (16) é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \tag{18}$$

e as condições iniciais (17) são satisfeitas se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$. Assim,

$$y_3(t) = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} = \cosh t.$$

Analogamente, se $y_4(t)$ satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \tag{19}$$

então

$$y_4(t) = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{senh} t.$$

Como o wronskiano de y_3 e y_4 é

$$W(y_3, y_4)(t) = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

essas funções também formam um conjunto fundamental de soluções, como enunciado no Teorema 3.2.5. Portanto, a solução geral da Eq. (16) pode ser escrita como

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \operatorname{senh} t, \tag{20}$$

assim como na forma (18). Usamos k_1 e k_2 para as constantes arbitrárias na Eq. (20) porque não são as mesmas constantes c_1 e c_2 na Eq. (18). Um dos objetivos deste exemplo é tornar claro que uma equação diferencial dada tem mais de um conjunto fundamental de soluções; de fato, tem uma infinidade deles; veja o Problema 21. Como regra, você deve escolher o conjunto mais conveniente.

Vamos examinar melhor as propriedades do wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. O teorema a seguir, talvez de forma surpreendente, fornece uma fórmula explícita simples para o wronskiano de duas soluções quaisquer de tal equação arbitrária, mesmo que as soluções propriamente ditas não sejam conhecidas.

Teorema 3.2.6 **(Teorema de Abel)**[4]

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{21}$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = c \exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{22}$$

onde c é uma certa constante que só depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é nulo para todo t em I (se $c = 0$) ou nunca se anula em I (se $c \neq 0$).

Para provar o teorema de Abel, começamos observando que y_1 e y_2 satisfazem

$$\begin{aligned} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

[4]O resultado no Teorema 3.2.6 foi deduzido pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1827, e é conhecido como fórmula de Abel. Ele também mostrou que não existe fórmula geral para resolver uma equação polinomial de quinto grau usando apenas operações algébricas explícitas sobre os coeficientes, resolvendo, desse modo, uma questão em aberto desde o século XVI. Suas maiores contribuições, no entanto, foram em análise, especialmente no estudo de funções elíticas. Infelizmente, seu trabalho só foi amplamente conhecido depois de sua morte. O eminente matemático francês Legendre chamou seu trabalho de um "monumento mais duradouro do que bronze".

Se multiplicarmos a primeira equação por $-y_2$, multiplicarmos a segunda por y_1 e somarmos as equações resultantes, obteremos

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(t)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{24}$$

A seguir, seja $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$ e note que

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2. \tag{25}$$

Podemos então escrever a Eq. (24) na forma

$$W' + p(t)W = 0. \tag{26}$$

A Eq. (26) pode ser resolvida imediatamente, já que é tanto uma equação linear de primeira ordem (Seção 2.1) quanto uma equação separável (Seção 2.2). Logo,

$$W(t) = c\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{27}$$

onde c é uma constante. O valor de c depende do par de soluções da Eq. (21) envolvido. No entanto, como a função exponencial nunca se anula, $W(t)$ não é zero a menos que $c = 0$ e, neste caso, $W(t)$ é igual a zero para todo t, o que completa a demonstração do Teorema 3.2.6.

Note que os wronskianos de dois conjuntos fundamentais de soluções quaisquer da mesma equação diferencial só podem diferir por uma constante multiplicativa e que o wronskiano de qualquer conjunto fundamental de soluções pode ser determinado, a menos de uma constante multiplicativa, sem resolver a equação diferencial. Além disso, como, sob as condições do Teorema 3.2.6, o wronskiano W é sempre zero ou nunca é zero, você pode determinar qual o caso que ocorre de fato calculando W para um único valor conveniente de t.

EXEMPLO 7

No Exemplo 5, verificamos que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \tag{28}$$

Verifique que o wronskiano de y_1 e y_2 é dado pela Eq. (22).

Do exemplo citado, sabemos que $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$. Para usar a Eq. (22), precisamos escrever a equação diferencial (28) na forma-padrão, com o coeficiente de y'' igual a 1. Obtemos, então,

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0,$$

de modo que $p(t) = 3/2t$. Portanto,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= c\,\exp\left[-\int \frac{3}{2t}\,dt\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln t\right) \\ &= c\,t^{-3/2}. \end{aligned} \tag{29}$$

A Eq. (29) fornece o wronskiano de qualquer par de soluções da Eq. (28). Para as soluções particulares dadas neste exemplo, precisamos escolher $c = -3/2$.

Sumário. Podemos resumir a discussão desta seção da seguinte maneira: para encontrar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \alpha < t < \beta,$$

precisamos, primeiro, encontrar duas soluções y_1 e y_2 que satisfazem a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Depois precisamos nos certificar de que existe um ponto no intervalo onde o wronskiano W de y_1 e y_2 não se anula. Nessas circunstâncias, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Se as condições iniciais são dadas em um ponto em $\alpha < t < \beta$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidos de modo a satisfazer essas condições.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1. e^{2t}, $e^{-3t/2}$
2. $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
3. e^{-2t}, te^{-2t}
4. x, xe^{x}
5. $e^{t}\operatorname{sen} t$, $e^{t}\cos t$
6. $\cos^2\theta$, $1+\cos 2\theta$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7. $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t$, $y(-2) = 2$, $y'(-2) = 1$
9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0$, $y(2) = 3$, $y'(2) = 1$
11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\tan x)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$
13. Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.
14. Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2t^{1/2}$ não é, em geral, solução dessa equação. Explique por que este resultado não contradiz o Teorema 3.2.2.
15. Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, onde $g(t)$ não é identicamente nula, então $y = c\phi(t)$, onde c é qualquer constante diferente de 1, não é solução. Explique por que este resultado não contradiz a observação após o Teorema 3.2.2.
16. A função $y = \operatorname{sen}(t^2)$ pode ser solução, em um intervalo contendo $t = 0$, de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ com coeficientes contínuos? Explique sua resposta.
17. Se o wronskiano W de f e g é $3e^{4t}$ e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.
18. Se o wronskiano W de f e g é t^2e^t e se $f(t) = t$, encontre $g(t)$.
19. Se $W(f, g)$ é o wronskiano de f e g e se $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, encontre o Wronskiano $W(u, v)$ de u e v em função de $W(f, g)$.
20. Se o wronskiano de f e g é $t\cos t - \operatorname{sen} t$ e se $u = f + 3g$, $v = f - g$, encontre o wronskiano de u e v.
21. Suponha que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e sejam $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$, $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$, onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes arbitrárias. Mostre que

$$W(y_3, y_4) = (a_1b_2 - a_2b_1)W(y_1, y_2).$$

y_3 e y_4 também formam um conjunto fundamental de soluções. Por quê?

Em cada um dos Problemas 22 e 23, encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial e o ponto inicial dados.

22. $y'' + y' - 2y = 0$, $t_0 = 0$
23. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $t_0 = 1$

Em cada um dos Problemas de 24 a 27, verifique que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

24. $y'' + 4y = 0$; $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$
25. $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$
26. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$
27. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0$, $0 < x < \pi$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$
28. Considere a equação $y'' - y' - 2y = 0$.
    (a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam um conjunto fundamental de soluções.
    (b) Sejam $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ e $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. $y_3(t)$, $y_4(t)$ e $y_5(t)$ também são soluções da equação diferencial dada?
    (c) Determine se cada par a seguir forma um conjunto fundamental de soluções: $[y_1(t), y_3(t)]$; $[y_2(t), y_3(t)]$; $[y_1(t), y_4(t)]$; $[y_4(t); y_5(t)]$.

Em cada um dos Problemas de 29 a 32, encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial dada sem resolver a equação.

29. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$
30. $(\cos t)y'' + (\operatorname{sen} t)y' - ty = 0$
31. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel

32. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, equação de Legendre

33. Mostre que, se p é diferenciável e $p(t) > 0$, então o wronskiano $W(t)$ de duas soluções de $[p(t)y']' + q(t)\,y = 0$ é $W(t) = c/p(t)$, onde c é uma constante.

34. Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.

35. Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $t^2y'' - 2y' + (3+t)y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(2) = 3$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(4)$.

36. Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?

37. Se f, g e h são funções diferenciáveis, mostre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

Nos Problemas de 38 a 40, suponha que p e q são contínuas e que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t) = 0$ em um intervalo aberto I.

38. Prove que, se y_1 e y_2 se anulam em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

39. Prove que, se y_1 e y_2 atingem um máximo ou mínimo em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

40. Prove que, se y_1 e y_2 têm um ponto de inflexão em comum em t_0 em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo a menos que p e q se anulem em t_0.

41. **Equações Exatas.** A equação $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita exata se puder ser escrita na forma $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, onde $f(x)$ pode ser determinada em função de $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$. Esta última equação pode ser integrada uma vez imediatamente, resultando em uma equação de primeira ordem para y que pode ser resolvida como na Seção 2.1. Igualando os coeficientes das equações precedentes e eliminando $f(x)$, mostre que uma condição necessária para que a equação seja exata é que $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. Pode-se mostrar que essa condição também é suficiente.

Em cada um dos Problemas de 42 a 45, use o resultado do Problema 41 para determinar se a equação dada é exata. Se for, resolva-a.

42. $y'' + xy' + y = 0$

43. $y'' + 3x^2y' + xy = 0$

44. $xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0, \quad x > 0$

45. $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0$

46. **A Equação Adjunta.** Se uma equação linear homogênea de segunda ordem não for exata, ela pode ser tornada exata multiplicando-se por um fator integrante apropriado $\mu(x)$. Precisamos, então, que $\mu(x)$ seja tal que $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ possa ser escrita na forma $[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$. Igualando os coeficientes nessas duas equações e eliminando $f(x)$, mostre que a função μ precisa satisfazer

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

Essa equação é conhecida como a adjunta da equação original e é importante na teoria avançada de equações diferenciais. Em geral, o problema de resolver a equação diferencial adjunta é tão difícil quanto o de resolver a equação original, de modo que só é possível encontrar um fator integrante para uma equação de segunda ordem ocasionalmente.

Em cada um dos Problemas de 47 a 49, use o resultado do Problema 46 para encontrar a adjunta da equação diferencial dada.

47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel

48. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, equação de Legendre

49. $y'' - xy = 0$, equação de Airy

50. Para a equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, mostre que a adjunta da equação adjunta é a equação original.

51. Uma equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita autoadjunta se sua adjunta for igual à equação original. Mostre que uma condição necessária para esta equação ser autoadjunta é que $P'(x) = Q(x)$. Determine se cada uma das equações nos Problemas de 47 a 49 é autoadjunta.

3.3 Raízes Complexas da Equação Característica

Vamos continuar nossa discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são números reais dados. Vimos, na Seção 3.1, que, se procurarmos soluções da forma $y = e^{rt}$, então r tem que ser raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Se as raízes r_1 e r_2 são reais e distintas, o que ocorre sempre que o discriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{3}$$

Suponha, agora, que $b^2 - 4ac$ é negativo. Então as raízes da Eq. (2) são números complexos conjugados; vamos denotá-los por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu, \tag{4}$$

onde λ e μ são reais. As expressões correspondentes para y são

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \qquad y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \tag{5}$$

Nossa primeira tarefa é explorar o significado dessas expressões, o que envolve o cálculo de uma função exponencial com expoente complexo. Por exemplo, se $\lambda = -1$, $\mu = 2$ e $t = 3$, então, da Eq. (5),

$$y_1(3) = e^{-3+6i}. \tag{6}$$

O que significa elevar o número e a uma potência complexa? A resposta é dada por uma relação importante conhecida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. Para atribuir significado às expressões nas Eqs. (5), precisamos definir a função exponencial complexa. É claro que queremos que a definição se reduza à função exponencial real habitual quando o expoente for real. Existem várias maneiras de descobrir como essa extensão da função exponencial deveria ser definida. Vamos usar aqui um método baseado em séries infinitas; um método alternativo está esquematizado no Problema 28.

Lembre-se do Cálculo que a série de Taylor para e^t em torno de $t = 0$ é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7}$$

Se supusermos que podemos substituir t por it na Eq. (7), teremos

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{8}$$

onde separamos a soma em suas partes real e imaginária, usando o fato de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, e assim por diante. A primeira série na Eq. (8) é precisamente a série de Taylor para $\cos t$ em torno de $t = 0$ e a segunda é a série de Taylor para $\operatorname{sen} t$ em torno de $t = 0$. Temos, então,

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t. \tag{9}$$

A Eq. (9) é conhecida como fórmula de Euler, e é uma relação matemática extremamente importante. Embora nossa dedução da Eq. (9) esteja baseada na hipótese não verificada de que a série (7) pode ser usada para números complexos da mesma forma que para números reais da variável independente, nossa intenção é usar essa dedução apenas para tornar a Eq. (9) mais plausível. Vamos colocar as coisas em uma fundação sólida agora, adotando a Eq. (9) como *definição* de e^{it}. Em outras palavras, sempre que escrevermos e^{it}, queremos dizer a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (9).

Existem alguns variantes da fórmula de Euler que vale a pena notar. Substituindo t por $-t$ na Eq. (9) e lembrando que $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, temos

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t. \tag{10}$$

Além disso, se t for substituído por μt na Eq. (9), então obtemos uma versão generalizada da fórmula de Euler, a saber,

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t. \tag{11}$$

A seguir, queremos estender a definição de exponencial complexa para expoentes complexos arbitrários da forma $(\lambda + i\mu)t$. Como queremos que as propriedades usuais da função exponencial continuem válidas para expoentes complexos, queremos, certamente, que $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ satisfaça

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}e^{i\mu t}. \tag{12}$$

Usando, então, a Eq. (11), obtemos

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t} &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= e^{\lambda t} \cos \mu t + ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned} \tag{13}$$

Tomamos agora a Eq. (13) como a definição de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$. O valor da função exponencial com coeficiente complexo é um número complexo cujas partes real e imaginária são dadas pelas expressões à direita do sinal de igualdade na Eq. (13). Note que as partes real e imaginária de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ estão expressas inteiramente em termos de funções elementares reais. Por exemplo, a quantidade na Eq. (6) tem o valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3} \cos 6 + ie^{-3} \operatorname{sen} 6 \cong 0{,}0478041 - 0{,}0139113i.$$

Com as definições (9) e (13), é fácil mostrar que as regras usuais de exponenciação são válidas para a função exponencial complexa. Você também pode usar a Eq. (13) para verificar que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \tag{14}$$

é válida para valores complexos de r.

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral da equação diferencial

$$y'' + y' + 9{,}25y = 0, \tag{15}$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 8, \tag{16}$$

e desenhe seu gráfico.

A equação característica para a Eq. (15) é

$$r^2 + r + 9{,}25 = 0$$

de modo que suas raízes são

$$r_1 = -\tfrac{1}{2} + 3i, \qquad r_2 = -\tfrac{1}{2} - 3i.$$

Portanto, duas soluções da Eq. (15) são

$$y_1(t) = \exp[(-\tfrac{1}{2} + 3i)t] = e^{-t/2}(\cos 3t + i \operatorname{sen} 3t) \tag{17}$$

e

$$y_2(t) = \exp[(-\tfrac{1}{2} - 3i)t] = e^{-t/2}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t). \tag{18}$$

Você pode verificar que o wronskiano é $W(y_1, y_2)(t) = -6ie^{-t}$, que nunca se anula, logo a solução geral da Eq. (15) pode ser expressa como uma combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ com coeficientes arbitrários.

Entretanto, em vez de usar soluções complexas $y_1(t)$ e $y_2(t)$, vamos procurar um conjunto fundamental de soluções reais para a Eq. (15). Do Teorema 3.2.2, sabemos que qualquer combinação linear de duas soluções também é uma solução, logo vamos formar as combinações lineares $y_1(t) + y_2(t)$ e $y_1(t) - y_2(t)$. Dessa forma, obtemos das Eqs. (17) e (18) as soluções

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{-t/2} \cos 3t, \quad y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{-t/2} \operatorname{sen} 3t.$$

Retirando as constantes 2 e $2i$ por conveniência, ficamos com

$$u(t) = e^{-t/2} \cos 3t, \qquad v(t) = e^{-t/2} \operatorname{sen} 3t \tag{19}$$

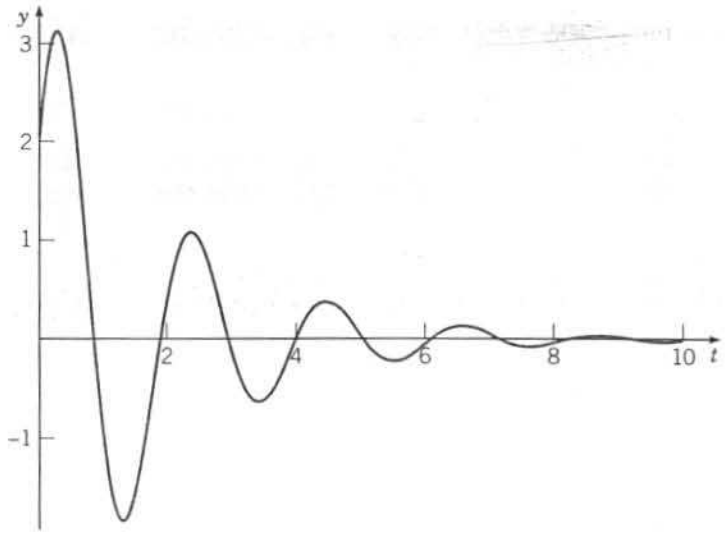


FIGURA 3.3.1 Solução do problema de valor inicial $y'' + y' + 9{,}25y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 8$

como soluções reais da Eq. (15). [Se você não tiver certeza absoluta de que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções da equação diferencial dada, substitua essas funções na Eq. (15) e confirme que elas satisfazem a equação.] Calculando o wronskiano de $u(t)$ e $v(t)$, obtemos $W(u, v)(t) = 3e^{-t}$; logo $u(t)$ e $v(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral da Eq. (15) pode ser escrita como

$$y = c_1 u(t) + c_2 v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t), \tag{20}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para satisfazer as condições iniciais (16), primeiro substituímos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (20), com o resultado que $c_1 = 2$. Então, diferenciando a Eq. (20), fazendo $t = 0$ e $y' = 8$, obtemos $-\frac{1}{2}c_1 + 3c_2 = 8$, de modo que $c_2 = 3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (15), (16) é

$$y = e^{-t/2}(2 \cos 3t + 3 \operatorname{sen} 3t). \tag{21}$$

A Figura 3.3.1 mostra o gráfico desta solução.

Vemos, do gráfico, que a solução deste problema é uma oscilação decaindo. O fator contendo seno e cosseno controla a natureza oscilatória da solução, enquanto que o fator exponencial com expoente negativo faz com que as amplitudes das oscilações diminuam quando o tempo aumenta.

Raízes Complexas; O Caso Geral. As funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, dadas pelas Eqs. (5) e com o significado expresso pela Eq. (13), são soluções da Eq. (1) quando as raízes da equação característica (2) são números complexos $\lambda \pm i\mu$. Infelizmente, as soluções y_1 e y_2 são funções que têm valores complexos, ao passo que, em geral, preferiríamos ter soluções reais, se possível, já que a própria equação diferencial só tem coeficientes reais. Podemos proceder como no Exemplo 1 para encontrar um conjunto fundamental de soluções reais. Em particular, vamos formar a soma e a diferença de y_1 e y_2. Temos

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) + e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2e^{\lambda t} \cos \mu t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned}$$

Logo, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, respectivamente, obtivemos um par de soluções reais,

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \qquad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \tag{22}$$

Note que u e v são, simplesmente, as partes real e imaginária, respectivamente, de y_1.

Por um cálculo direto, você pode mostrar que o wronskiano de u e v é

$$W(u, v)(t) = \mu e^{2\lambda t}. \tag{23}$$

Portanto, desde que $\mu \neq 0$, o wronskiano W não é nulo, de modo que u e v formam um conjunto fundamental de soluções. (É claro que, se $\mu = 0$, então as raízes são reais e a discussão nesta seção não se aplica.)

Em consequência, se as raízes da equação característica são números complexos $\lambda \pm i\mu$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t, \tag{24}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Note que a solução (24) pode ser escrita tão logo sejam conhecidos os valores de λ e μ. Vamos considerar mais alguns exemplos.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{25}$$

A equação característica é $16r^2 - 8r + 145 = 0$, e suas raízes são $r = \frac{1}{4} \pm 3i$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{t/4} \cos 3t + c_2 e^{t/4} \operatorname{sen} 3t. \tag{26}$$

Para aplicar a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ na Eq. (26): isso dá

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Para a segunda condição inicial, precisamos diferenciar a Eq. (26) e depois fazer $t = 0$. Desse modo, vemos que

$$y'(0) = \tfrac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

de onde temos que $c_2 = \frac{1}{2}$. Usando esses valores de c_1 e c_2, obtemos

$$y = -2e^{t/4} \cos 3t + \tfrac{1}{2} e^{t/4} \operatorname{sen} 3t \tag{27}$$

como solução do problema de valor inicial (25). O gráfico desta solução está ilustrado na Figura 3.3.2.

Neste caso observamos que a solução é uma oscilação aumentando. Novamente, os fatores trigonométricos na Eq. (27) determinam a parte oscilatória da solução, enquanto o fator exponencial (com expoente positivo) faz com que a amplitude da oscilação aumente com o tempo.

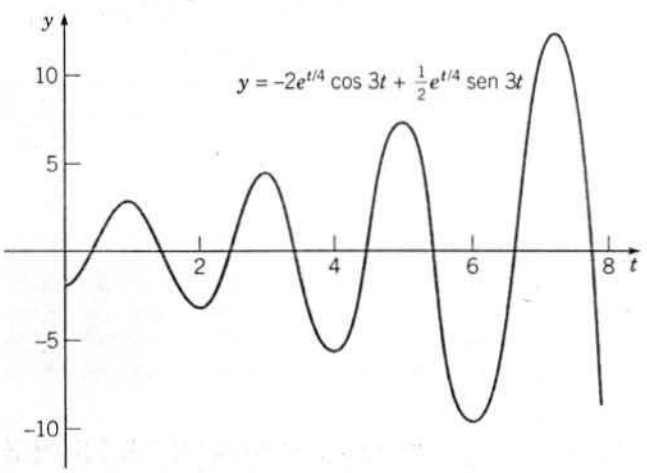


FIGURA 3.3.2 Solução de $16y'' - 8y' + 145y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 1$.

EXEMPLO 3

Encontre a solução geral de

$$y'' + 9y = 0. \tag{28}$$

A equação característica é $r^2 + 9 = 0$, com raízes $r = \pm 3i$; logo, $\lambda = 0$ e $\mu = 3$. A solução geral é

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t; \tag{29}$$

note que se a parte real das raízes é zero, como neste exemplo, então a solução não tem fator exponencial. A Figura 3.3.3 mostra o gráfico de duas soluções típicas da Eq. (28). Em cada caso a solução é uma oscilação pura cuja amplitude é determinada pelas condições iniciais. Como a solução (29) não tem fator exponencial, a amplitude de cada oscilação permanece constante no tempo.

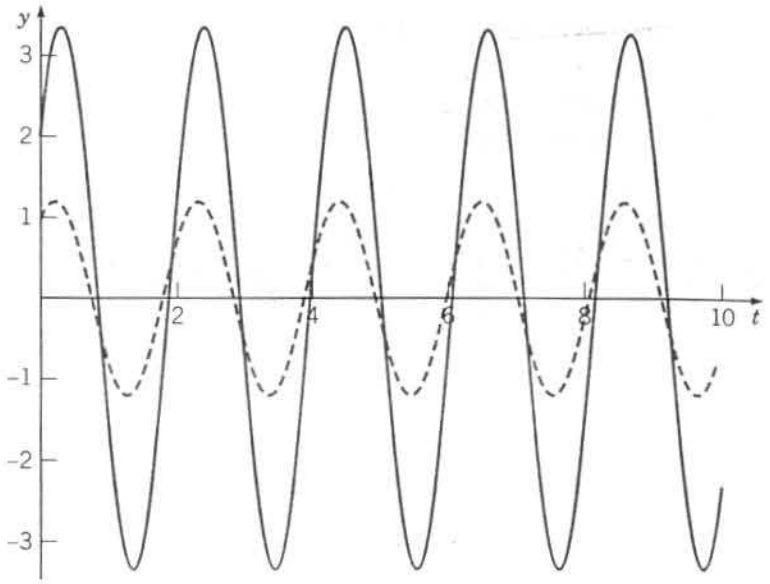


FIGURA 3.3.3 Duas soluções típicas de $y'' + 9y = 0$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + ib$.

1. $\exp(1 + 2i)$
2. $\exp(2 - 3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

Em cada um dos Problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1{,}25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1{,}25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6{,}25y = 0$

Em cada um dos Problemas de 17 a 22, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento para valores cada vez maiores de t.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$
20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1{,}25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$
23. Considere o problema de valor inicial

$$3u'' - u' + 2u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.

(b) Para $t > 0$, encontre o primeiro instante no qual $|u(t)| = 10$.

24. Considere o problema de valor inicial

$$5u'' + 2u' + 7u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.

(b) Encontre o menor T para o qual $|u(t)| \le 0{,}1$ para todo $t > T$.

25. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \ge 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.

(b) Encontre α tal que $y = 0$ quando $t = 1$.

(c) Encontre o menor valor positivo de t, em função de α, para o qual $y = 0$.

(d) Determine o limite da expressão encontrada no item (c) quando $\alpha \to \infty$.

26. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.

(b) Para $a = 1$, encontre o menor T para o qual $|y(t)| \leq 0{,}1$ para $t > T$.

(c) Repita o item (b) para $a = 1/4$, $1/2$ e 2.

(d) Usando os resultados dos itens (b) e (c), coloque em um gráfico os valores de T em função de a e descreva a relação entre T e a.

27. Mostre que $W(e^{\lambda t}\cos \mu t, e^{\lambda t}\operatorname{sen} \mu t) = \mu e^{2\lambda t}$.

28. Neste problema, esquematizamos um modo diferente de obter a fórmula de Euler.

(a) Mostre que $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$; ou seja, mostre que são soluções e que seu wronskiano não se anula.

(b) Mostre (formalmente) que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$. Portanto,

$$e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \tag{i}$$

para constantes c_1 e c_2 apropriadas. Por que isso ocorre?

(c) Faça $t = 0$ na Eq. (i) para mostrar que $c_1 = 1$.

(d) Supondo que a Eq. (14) é válida, diferencie a Eq. (i) e depois faça $t = 0$ para concluir que $c_2 = i$. Use os valores de c_1 e c_2 na Eq. (i) para chegar à fórmula da Euler.

29. Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2, \qquad \operatorname{sen} t = (e^{it} - e^{-it})/2i.$$

30. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que $e^{(r_1 + r_2)t} = e^{r_1 t}e^{r_2 t}$ quaisquer que sejam os números complexos r_1 e r_2.

31. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que

$$\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}$$

para qualquer número complexo r.

32. Suponha que as funções reais p e q são contínuas em um intervalo aberto I e seja $y = \phi(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução complexa de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{i}$$

onde u e v são funções reais. Mostre que u e v também são soluções da Eq. (i).

Sugestão: substitua $y = \phi(t)$ na Eq. (i) e separe em partes real e imaginária.

33. Se as funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que entre dois zeros consecutivos de y_1 existe um, e apenas um, zero de y_2. Note que esse comportamento é ilustrado pelas soluções $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$ da equação $y'' + y = 0$.

Sugestão: suponha que t_1 e t_2 são dois zeros de y_1 entre os quais não existe zero de y_2. Aplique o teorema de Rolle a y_1/y_2 para chegar a uma contradição.

Mudança de Variáveis. Algumas vezes, uma equação diferencial com coeficientes variáveis

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{i}$$

pode ser colocada em uma forma mais adequada para que se possa resolvê-la através de uma mudança da variável independente. Vamos explorar essas ideias nos Problemas de 34 a 42. Em particular, no Problema 34 mostramos que as equações conhecidas como equações de Euler podem ser transformadas em equações com coeficientes constantes por uma mudança simples da variável independente. Os Problemas de 35 a 42 contêm exemplos desse tipo de equação. O Problema 43 determina condições sob as quais a equação mais geral Eq. (i) pode ser transformada em uma equação diferencial com coeficientes constantes. Os Problemas de 44 a 46 fornecem aplicações específicas deste procedimento.

34. **Equações de Euler.** Uma equação da forma

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dt} + \beta y = 0, \qquad t > 0, \tag{ii}$$

onde α e β são constantes reais, é chamada de equação de Euler.

(a) Seja $x = \ln t$ e calcule dy/dt e d^2y/dt^2 em termos de dy/dx e d^2y/dx^2.

(b) Use os resultados do item (a) para transformar a Eq. (ii) em

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dx} + \beta y = 0. \tag{iii}$$

Note que a Eq. (iii) tem coeficientes constantes. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (iii), então $y_1(\ln t)$ e $y_2(\ln t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (ii).

Em cada um dos Problemas de 35 a 42, use o método do Problema 34 para resolver a equação dada para $t > 0$.

35. $t^2y'' + ty' + y = 0$
36. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
37. $t^2y'' + 3ty' + 1{,}25y = 0$
38. $t^2y'' - 4ty' - 6y = 0$
39. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$
40. $t^2y'' - ty' + 5y = 0$
41. $t^2y'' + 3ty' - 3y = 0$
42. $t^2y'' + 7ty' + 10y = 0$

43. Neste problema vamos determinar condições sobre p e q de modo que a Eq. (i) possa ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente. Seja $x = u(t)$ a nova variável independente, com a relação entre x e t a ser especificada mais tarde.

(a) Mostre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}.$$

(b) Mostre que a equação diferencial (i) torna-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx} + q(t)y = 0. \tag{iv}$$

(c) Para que a Eq. (iv) tenha coeficientes constantes, é preciso que os coeficientes de d^2y/dx^2 e de y sejam proporcionais. Se $q(t) > 0$, então podemos escolher a constante de proporcionalidade como 1; logo,

$$x = u(t) = \int [q(t)]^{1/2}\,dt. \tag{v}$$

(d) Com x escolhido como no item (c), mostre que o coeficiente de dy/dx na Eq. (iv) também é constante, desde que a expressão

$$\frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \tag{vi}$$

seja constante. Assim, a Eq. (i) pode ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente, desde que a função $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ seja constante. Como esse resultado pode ser modificado se $q(t) < 0$?

Em cada um dos Problemas de 44 a 46, tente transformar a equação dada em uma com coeficientes constantes pelo método do Problema 43. Se isso for possível, encontre a solução geral da equação dada.

44. $y'' + ty' + e^{-t^2}y = 0, \qquad -\infty < t < \infty$
45. $y'' + 3ty' + t^2y = 0, \qquad -\infty < t < \infty$
46. $ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3y = 0, \qquad 0 < t < \infty$

3.4 Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Em seções anteriores, mostramos como resolver a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$

quando as raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas. Vamos considerar agora a terceira possibilidade, a saber, quando as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Esse caso faz a transição entre os outros dois, e ocorre quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é zero. Segue da fórmula para a equação do segundo grau que

$$r_1 = r_2 = -b/2a. \tag{3}$$

A dificuldade é imediatamente aparente: ambas as raízes geram a mesma solução

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \tag{4}$$

da equação diferencial (1), e não é nada óbvio como encontrar uma segunda solução.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \tag{5}$$

A equação característica é

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Portanto, uma solução da Eq. (5) é $y_1(t) = e^{-2t}$. Para encontrar a solução geral da Eq. (5), precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de y_1. Essa segunda solução pode ser encontrada de diversas maneiras (veja os Problemas de 20 a 22); usaremos aqui um método descoberto por D'Alembert[5] no século XVIII. Lembre que, como $y_1(t)$ é uma solução da Eq. (1), $cy_1(t)$ também o é para qualquer constante c. A ideia básica é generalizar essa observação substituindo-se c por uma função $v(t)$ e depois tentando determinar $v(t)$ de modo que o produto $v(t)y_1(t)$ seja solução da Eq. (1).

Para seguir esse programa, vamos substituir $y = v(t)y_1(t)$ na Eq. (5) e usar a equação resultante para encontrar $v(t)$. Começando com

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-2t}, \tag{6}$$

temos

$$y' = v'(t)e^{-2t} - 2v(t)e^{-2t} \tag{7}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-2t} - 4v'(t)e^{-2t} + 4v(t)e^{-2t}. \tag{8}$$

Substituindo as expressões nas Eqs. (6), (7) e (8) na Eq. (5) e juntando os termos, obtemos

$$[v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) + 4v'(t) - 8v(t) + 4v(t)]e^{-2t} = 0,$$

que pode ser simplificada para

$$v''(t) = 0. \tag{9}$$

Logo,

$$v'(t) = c_1$$

e

$$v(t) = c_1 t + c_2, \tag{10}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Finalmente, substituindo $v(t)$ na Eq. (6), obtemos

$$y = c_1 te^{-2t} + c_2 e^{-2t}. \tag{11}$$

A segunda parcela à direita do sinal de igualdade na Eq. (11) corresponde à solução original $y_1(t) = \exp(-2t)$, mas a primeira parcela corresponde a uma segunda solução, a saber, $y_2(t) = t\exp(-2t)$. Essas duas soluções não são proporcionais, obviamente, mas podemos verificar que formam um conjunto fundamental de soluções calculando seu wronskiano:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1 - 2t)e^{-2t} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0.$$

[5]Jean d'Alembert (1717-1783), matemático francês, foi contemporâneo de Euler e Daniel Bernoulli, e é conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais. O princípio de d'Alembert em mecânica e o paradoxo de d'Alembert em hidrodinâmica receberam esse nome em sua homenagem, e a equação de onda apareceu pela primeira vez em seu artigo sobre cordas vibrantes em 1747. Em seus últimos anos, devotou-se principalmente à filosofia e às suas tarefas como editor de ciência da Enciclopédia de Diderot.

Portanto,

$$y_1(t) = e^{-2t}, \qquad y_2(t) = te^{-2t} \tag{12}$$

formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (5), e a solução geral desta equação é dada pela Eq. (11). Note que ambas as funções, $y_1(t)$ e $y_2(t)$, tendem a zero quando $t \to \infty$; em consequência, todas as soluções da Eq. (5) se comportam desse modo. A Figura 3.4.1 mostra o gráfico de uma solução típica.

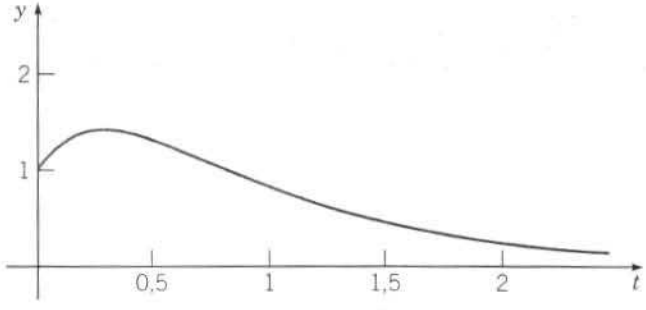


FIGURA 3.4.1 Uma solução típica de $y'' + 4y' + 4y = 0$.

O procedimento usado no Exemplo 1 pode ser estendido a uma equação geral cuja equação característica tenha raízes repetidas. Ou seja, supomos que os coeficientes na Eq. (1) satisfazem $b^2 - 4ac = 0$, caso em que

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}$$

é uma solução. Para encontrar uma segunda solução, supomos que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-bt/2a} \tag{13}$$

e substituímos na Eq. (1) para determinar $v(t)$. Temos

$$y' = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \tag{14}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}. \tag{15}$$

Então, substituindo na Eq. (1), obtemos

$$\left\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right] + cv(t)\right\}e^{-bt/2a} = 0. \tag{16}$$

Cancelando o fator $\exp(-bt/2a)$, que não se anula, e rearrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(t) + (-b + b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0. \tag{17}$$

A parcela envolvendo $v'(t)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(t)$ é $c - (b^2/4a)$, que também é zero, pois $b^2 - 4ac = 0$ no problema em consideração. Assim, como no Exemplo 1, a Eq. (17) se reduz a

$$v''(t) = 0;$$

logo,

$$v(t) = c_1 + c_2t.$$

Portanto, da Eq. (13), temos

$$y = c_1e^{-bt/2a} + c_2te^{-bt/2a}. \tag{18}$$

Então, y é uma combinação linear das duas soluções

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \qquad y_2(t) = te^{-bt/2a}. \tag{19}$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\dfrac{b}{2a}e^{-bt/2a} & \left(1 - \dfrac{bt}{2a}\right)e^{-bt/2a} \end{vmatrix} = e^{-bt/a}. \tag{20}$$

Como $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula, as soluções y_1 e y_2 dadas pela Eq. (19) formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, a Eq. (18) é a solução geral da Eq. (1) quando as raízes da equação característica são iguais. Em outras palavras, neste caso existe uma solução exponencial correspondente à raiz repetida, enquanto uma segunda solução é obtida multiplicando-se a solução exponencial por t.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{3}. \tag{21}$$

A equação característica é

$$r^2 - r + 0{,}25 = 0,$$

de modo que as raízes são $r_1 = r_2 = 1/2$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}. \tag{22}$$

A primeira condição inicial requer que

$$y(0) = c_1 = 2.$$

Para satisfazer a segunda condição inicial, primeiro diferenciamos a Eq. (22) e depois fazemos $t = 0$. Isso nos dá

$$y'(0) = \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 = \tfrac{1}{3},$$

de modo que $c_2 = -2/3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = 2e^{t/2} - \tfrac{2}{3}te^{t/2}. \tag{23}$$

A Figura 3.4.2 mostra o gráfico desta solução.

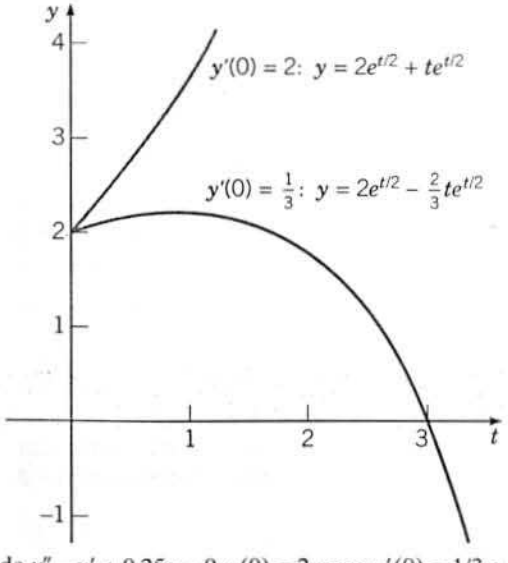


FIGURA 3.4.2 Soluções de $y'' - y' + 0{,}25y = 0$, $y(0) = 2$, com $y'(0) = 1/3$ e $y'(0) = 2$, respectivamente.

Vamos modificar, agora, o problema de valor inicial (21) mudando o coeficiente angular inicial; especificamente, vamos trocar a segunda condição inicial por $y'(0) = 2$. A solução deste problema modificado é

$$y = 2e^{t/2} + te^{t/2},$$

e seu gráfico também aparece na Figura 3.4.2. Os gráficos mostrados nessa figura sugerem a existência de um coeficiente angular inicial crítico, com valor entre $\frac{1}{3}$ e 2, que separa as soluções que crescem positivamente das que crescem em módulo, mas tornam-se negativas. O Problema 16 pede que você determine este coeficiente angular crítico.

O comportamento geométrico de soluções é semelhante, nesse caso, a quando as raízes são reais e distintas. Se os expoentes são positivos ou negativos, então a solução, em módulo, aumenta ou diminui de acordo; o fator linear t tem pouca influência. A Figura 3.4.1 mostra uma solução decaindo e a Figura 3.4.2 mostra duas soluções crescendo em módulo. No entanto, se a raiz repetida é nula, então a equação diferencial é $y'' = 0$ e a solução geral é uma função linear de t.

Resumo. Podemos resumir, agora, os resultados obtidos para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{1}$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio característico correspondente

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Se r_1 e r_2 são reais e distintos, então a solução geral da equação diferencial (1) é

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}. \tag{24}$$

Se r_1 e r_2 são complexos conjugados $\lambda \pm i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1e^{\lambda t}\cos \mu t + c_2e^{\lambda t}\operatorname{sen} \mu t. \tag{25}$$

Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_1t}. \tag{26}$$

Redução de Ordem. Vale a pena observar que o procedimento usado anteriormente nesta seção para equações com coeficientes constantes é aplicável mais geralmente. Suponha que conhecemos uma solução $y_1(t)$, não identicamente nula, de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{27}$$

Para encontrar uma segunda solução, seja

$$y = v(t)y_1(t); \tag{28}$$

então,

$$y' = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

e

$$y'' = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

Substituindo essas expressões para y, y' e y'' na Eq. (27) e juntando os termos, encontramos

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1(v' +)y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0. \tag{29}$$

Como y_1 é uma solução da Eq. (27), o coeficiente de v na Eq. (29) é zero, de modo que a Eq. (29) fica

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{30}$$

Apesar de sua aparência, a Eq. (30) é, de fato, uma equação de primeira ordem para a função v' e pode ser resolvida como uma equação de primeira ordem ou como uma equação separável. Uma vez encontrada v', v é obtida por integração. Finalmente, a solução y é determinada da Eq. (28). Este procedimento é chamado de método de redução de ordem, já que o passo crucial é a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem para v', em vez da equação de segunda ordem original para y. Embora seja possível escrever uma fórmula para $v(t)$, vamos, em vez disso, ilustrar como o método funciona através de um exemplo.

EXEMPLO 3

Dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução de

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0, \tag{31}$$

encontre um conjunto fundamental de soluções.

Vamos fazer $y = v(t)t^{-1}$; então

$$y' = v't^{-1} - vt^{-2}, \qquad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}.$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (31) e juntando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} 2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - vt^{-1} \\ = 2tv'' + (-4+3)v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v \\ = 2tv'' - v' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Note que o coeficiente de v é nulo, como deveria; isso nos dá um ponto útil de verificação dos nossos cálculos.

Separando as variáveis na Eq. (32) e resolvendo para $v'(t)$, encontramos

$$v'(t) = ct^{1/2};$$

então,

$$v(t) = \tfrac{2}{3}ct^{3/2} + k.$$

Segue que

$$y = \tfrac{2}{3}ct^{1/2} + kt^{-1}, \tag{33}$$

onde c e k são constantes arbitrárias. A segunda parcela na Eq. (33) é um múltiplo de y_1 e pode ser retirada, mas a primeira parcela nos dá uma solução nova $y_2(t) = t^{1/2}$. Você pode verificar que o wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(y_1, y_2)(t) = \tfrac{3}{2}t^{-3/2}, \quad t > 0. \tag{34}$$

Em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

15. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico de sua solução para $0 \le t \le 5$.

(b) Determine onde a solução tem valor zero.

(c) Determine as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo.

(d) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b$ e encontre a solução como função de b. Depois encontre o valor crítico de b que separa as soluções que permanecem positivas das que acabam se tornando negativas.

16. Considere a seguinte modificação do problema de valor inicial no Exemplo 2:

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b.$$

Encontre a solução em função de b e depois determine o valor crítico de b que separa as soluções que crescem positivamente das que acabam crescendo em módulo, mas com valores negativos.

17. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico da solução.

(b) Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo.

(c) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b > 0$ e encontre a solução como função de b.

(d) Encontre as coordenadas do ponto de máximo (t_M, y_M) em função de b. Descreva a dependência em b de t_M e de y_M quando b aumenta.

18. Considere o problema de valor inicial

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \qquad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = -1.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Encontre o valor crítico de a que separa as soluções que se tornam negativas das que permanecem positivas.

19. Se as raízes da equação característica são reais, mostre que uma solução de $ay'' + by' + cy = 0$ é identicamente nula ou pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

Os Problemas de 20 a 22 indicam outras maneiras de se encontrar uma segunda solução quando a equação característica tem raízes repetidas.

20. (a) Considere a equação $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Mostre que as raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = -a$, de modo que uma solução da equação é e^{-at}.

(b) Use a fórmula de Abel [Eq. (22) da Seção 3.2] para mostrar que o wronskiano de duas soluções quaisquer da equação dada é

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c_1e^{-2at},$$

onde c_1 é constante.

(c) Seja $y_1(t) = e^{-at}$ e use o resultado do item (b) para obter uma equação diferencial satisfeita por uma segunda solução $y_2(t)$. Resolvendo essa equação, mostre que $y_2(t) = te^{-at}$.

21. Suponha que r_1 e r_2 são raízes de $ar^2 + br + c = 0$ e que $r_1 \neq r_2$; então, $\exp(r_1t)$ e $\exp(r_2t)$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Mostre que $\phi(t; r_1, r_2) = [\exp(r_2t) - \exp(r_1t)]/(r_2 - r_1)$ também é solução da equação para $r_2 \neq r_1$. Depois, pense em r_1 como fixo e use a regra de L'Hospital para calcular o limite de $\phi(t; r_1, r_2)$ quando $r_2 \to r_1$ obtendo, assim, a segunda solução no caso de raízes iguais.

22. (a) Se $ar^2 + br + c = 0$ tem raízes iguais r_1, mostre que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2e^{rt}. \tag{i}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (i) é nula quando $r = r_1$, segue que $\exp(r_1t)$ é uma solução de $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Diferencie a Eq. (i) em relação a r e mude as ordens das derivadas em relação a r e a t, mostrando, assim, que

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right] = L[te^{rt}] = ate^{rt}(r - r_1)^2 + 2ae^{rt}(r - r_1). \tag{ii}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (ii) é zero quando $r = r_1$, conclua que $t\exp(r_1t)$ também é solução de $L[y] = 0$.

Em cada um dos Problemas de 23 a 30, use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

23. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^2$

24. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t$

25. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^{-1}$

26. $t^2y'' - t(t + 2)y' + (t + 2)y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t$

27. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$

28. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \qquad y_1(x) = e^x$

29. $x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = 0, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$

30. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \qquad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

31. A equação diferencial

$$xy'' - (x + N)y' + Ny = 0,$$

onde N é um inteiro não negativo, foi discutida por diversos autores.[6] Uma razão para esse interesse é que ela tem uma solução exponencial e uma solução polinomial.

(a) Verifique que uma solução é $y_1(x) = e^x$.

(b) Mostre que uma segunda solução tem a forma $y_2(x) = c\,e^x \int x^N e^{-x}\,dx$. Calcule $y_2(x)$ para $N = 1$ e $N = 2$; convença-se de que, com $c = -1/N!$,

[6] T. A. Newton, "On Using a Differential Equation to Generate Polynomials", *American Mathematical Monthly 81*(1974), pp. 592-601. Veja, também, as referências citadas ali.

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

Note que $y_2(x)$ é precisamente a soma das $N + 1$ primeiras parcelas da série de Taylor para e^x em torno de $x = 0$, ou seja, da série de Taylor para $y_1(x)$.

32. A equação diferencial

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

aparece no estudo da turbulência em um fluxo uniforme ao passar por um cilindro circular. Verifique que $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ é uma solução, e depois encontre a solução geral na forma de uma integral.

33. O método do Problema 20 pode ser estendido para equações de segunda ordem com coeficientes variáveis. Se y_1 é uma solução conhecida de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que não se anula, mostre que uma segunda solução y_2 satisfaz $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Depois use a fórmula de Abel [Eq. (22) da Seção 3.2] para determinar y_2.

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para encontrar uma segunda solução independente da equação dada.

34. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
35. $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = \operatorname{sen}(t^2)$
36. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
37. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Os Problemas de 38 a 40 tratam do comportamento de soluções no limite quando $t \to \infty$.

38. Se a, b e c são constantes positivas, mostre que todas as soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$.
39. (a) Se $a > 0$ e $c > 0$, mas $b = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não continua válido, mas que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$.
    (b) Se $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não continua válido, mas que todas as soluções tendem a uma constante, que depende da condição inicial, quando $t \to \infty$. Determine essa constante para as condições iniciais $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$.
40. Mostre que $y = \operatorname{sen} t$ é uma solução de

$$y'' + (k\operatorname{sen}^2 t)y' + (1 - k\cos t\operatorname{sen} t)y = 0$$

para qualquer valor da constante k. Se $0 < k < 2$, mostre que $1 - k\cos t\operatorname{sen} t > 0$ e $k\operatorname{sen}^2 t \geq 0$. Observe então que, embora os coeficientes dessa equação diferencial com coeficientes variáveis sejam não negativos (e o coeficiente de y' se anule apenas nos pontos $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$), ela tem uma solução que não tende a zero quando $t \to \infty$. Compare essa situação com o resultado do Problema 38. Observamos, assim, uma situação que não é incomum na teoria de equações diferenciais: equações aparentemente bastante semelhantes podem ter propriedades muito diferentes.

Equações de Euler. Em cada um dos Problemas 41 e 42, use a substituição introduzida no Problema 34 da Seção 3.3 para resolver a equação diferencial dada.

41. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t > 0$
42. $t^2y'' + 2ty' + 0{,}25y = 0, \quad t > 0$
43. $2t^2y'' - 5ty' + 5y = 0, \quad t > 0$
44. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0$
45. $4t^2y'' - 8ty' + 9y = 0, \quad t > 0$
46. $t^2y'' + 5ty' + 13y = 0, \quad t > 0$

3.5 Equações Não Homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos retornar à equação não homogênea

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

onde p, q e g são funções (contínuas) dadas em um intervalo aberto I. A equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{2}$$

na qual $g(t) = 0$ e p e q são as mesmas que na Eq. (1), é chamada de equação homogênea associada à Eq. (1). Os dois resultados a seguir descrevem a estrutura de soluções da equação não homogênea (1) e fornecem uma base para a construção de sua solução geral.

Teorema 3.5.1 Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não homogênea (1), então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada (2). Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (2), então

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{3}$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

Para provar esse resultado, note que Y_1 e Y_2 satisfazem as equações

$$L[Y_1](t) = g(t), \qquad L[Y_2](t) = g(t). \tag{4}$$

Subtraindo a segunda da primeira dessas equações, temos

$$L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0. \tag{5}$$

No entanto,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2],$$

de modo que a Eq. (5) fica

$$L[Y_1 - Y_2](t) = 0. \tag{6}$$

A Eq. (6) diz que $Y_1 - Y_2$ é uma solução da Eq. (2). Finalmente, como todas as soluções da Eq. (2) podem ser expressas como uma combinação linear das funções em um conjunto fundamental de soluções pelo Teorema 3.2.4, segue que a solução $Y_1 - Y_2$ também pode ser expressa nessa forma. Logo, a Eq. (3) é válida e a demonstração está completa.

Teorema 3.5.2 A solução geral da equação não homogênea (1) pode ser escrita na forma

$$y = \phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t), \tag{7}$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (2), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação não homogênea (1).

A demonstração do Teorema 3.5.2 segue rapidamente do teorema precedente. Note que a Eq. (3) é válida se identificarmos Y_1 com uma solução arbitrária ϕ da Eq. (1) e Y_2 com a solução específica Y. Da Eq. (3) obtemos, assim,

$$\phi(t) - Y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \tag{8}$$

que é equivalente à Eq. (7). Como ϕ é uma solução arbitrária da Eq. (1), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (7) inclui todas as soluções da Eq. (1); é natural, portanto, chamá-la de solução geral da Eq. (1).

Colocando de maneira um pouco diferente, o Teorema 3.5.2 diz que, para resolver a equação não homogênea (1), precisamos fazer três coisas:

1. Encontrar a solução geral $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ da equação homogênea associada. Essa solução é chamada, muitas vezes, de solução complementar e pode ser denotada por $y_c(t)$.
2. Encontrar uma única solução $Y(t)$ da equação não homogênea. Referimo-nos a essa solução, muitas vezes, como uma solução particular.
3. Somar as duas funções encontradas nas duas etapas precedentes.

Já discutimos como encontrar $y_c(t)$, pelo menos quando a equação homogênea (2) tem coeficientes constantes. Portanto, no restante desta seção e na próxima focalizaremos nossa atenção em encontrar uma solução particular $Y(t)$ da equação não homogênea (1). Existem dois métodos que gostaríamos de discutir. Eles são conhecidos como o método dos coeficientes indeterminados (discutido aqui) e o método de variação dos parâmetros (veja a Seção 3.6), respectivamente. Cada um tem vantagens e desvantagens.

O Método dos Coeficientes Indeterminados. O método dos coeficientes indeterminados (ou a determinar) requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(t)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na Eq. (1) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação diferencial (1) e podemos usá-la como a solução particular $Y(t)$. Se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo.

A maior vantagem do método dos coeficientes indeterminados é que ele é fácil de executar, uma vez feita a hipótese sobre a forma de $Y(t)$. Sua maior limitação é que é útil principalmente para equações para as quais é fácil escrever a forma correta da solução particular antecipadamente. Por essa razão, este método só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não homogêneo pertence a uma classe relativamente pequena de funções. Em particular, consideramos apenas termos homogêneos consistindo em polinômios, funções exponenciais, senos e cossenos. Apesar dessa limitação, o método dos coeficientes indeterminados é útil para resolver muitos problemas que têm aplicações importantes. No entanto, os detalhes dos cálculos podem ser bastante tediosos, e um sistema de álgebra computacional pode ser muito útil nas aplicações práticas. Ilustraremos o método dos coeficientes indeterminados através de diversos exemplos e depois resumiremos algumas regras para usá-lo.

EXEMPLO 1 Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \tag{9}$$

Procuramos uma função Y tal que $Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t)$ seja igual a $3e^{2t}$. Como uma função exponencial se reproduz pela diferenciação, a maneira mais plausível de obter o resultado desejado é supor que $Y(t)$ é algum múltiplo de e^{2t}, ou seja,

$$Y(t) = Ae^{2t},$$

onde o coeficiente A ainda precisa ser determinado. Para encontrar A, vamos calcular

$$Y'(t) = 2Ae^{2t}, \qquad Y''(t) = 4Ae^{2t},$$

e substituir na Eq. (9). Obtemos

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Portanto, $-6Ae^{2t}$ tem que ser igual a $3e^{2t}$, logo $A = -1/2$. Assim, uma solução particular é

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t}. \tag{10}$$

EXEMPLO 2 Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} t. \tag{11}$$

Por analogia com o Exemplo 1, vamos supor primeiro que $Y(t) = A \operatorname{sen} t$, onde A é uma constante a ser determinada. Substituindo na Eq. (11) e rearrumando os termos, obtemos

$$-5A \operatorname{sen} t - 3A \cos t = 2\operatorname{sen} t,$$

ou

$$(2 + 5A)\operatorname{sen} t + 3A \cos t = 0. \tag{12}$$

Queremos que a Eq. (12) seja válida para todo t. Então ela tem que ser válida em dois pontos específicos, como $t = 0$ e $t = \pi/2$. Nesses pontos, a Eq. (12) se reduz a $3A = 0$ e $2 + 5A = 0$, respectivamente. Essas condições contraditórias significam que não existe escolha da constante A que torne a Eq. (12) válida para $t = 0$ e $t = \pi/2$, muito menos para todo t. Podemos concluir, então, que nossa hipótese sobre $Y(t)$ não foi adequada. A aparição de um termo em cosseno na Eq. (12) sugere que modifiquemos nossa hipótese original, incluindo um termo em

cosseno em $Y(t)$, ou seja,

$$Y(t) = A\,\text{sen}\,t + B\cos t,$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Logo,

$$Y'(t) = A\cos t - B\,\text{sen}\,t, \qquad Y''(t) = -A\,\text{sen}\,t - B\cos t.$$

Substituindo na Eq. (11) e juntando os termos, obtemos

$$(-A + 3B - 4A)\,\text{sen}\,t + (-B - 3A - 4B)\cos t = 2\,\text{sen}\,t. \tag{13}$$

Para satisfazer a Eq. (13), precisamos igualar os coeficientes de sen t e de cos t nos dois lados da equação; assim, A e B têm que satisfazer as equações

$$-5A + 3B = 2, \qquad -3A - 5B = 0.$$

Portanto, $A = -5/17$ e $B = 3/17$, de modo que uma solução particular da Eq. (11) é

$$Y(t) = -\tfrac{5}{17}\,\text{sen}\,t + \tfrac{3}{17}\cos t.$$

O método ilustrado nos exemplos precedentes também pode ser usado quando a expressão à direita do sinal de igualdade é um polinômio. Assim, para encontrar uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1, \tag{14}$$

supomos, inicialmente, que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau que o termo não homogêneo, ou seja, $Y(t) = At^2 + Bt + C$.

Para resumir nossas conclusões até agora: se o termo não homogêneo $g(t)$ na Eq. (1) for uma função exponencial $e^{\alpha t}$, suponha que $Y(t)$ é proporcional a essa mesma função exponencial; se $g(t)$ for igual a sen βt ou a cos βt, suponha que Y é uma combinação linear de sen βt e cos βt; se $g(t)$ for um polinômio, suponha que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau. O mesmo princípio se estende ao caso em que $g(t)$ é um produto de quaisquer dois ou três desses tipos de funções, como mostra o próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t\cos 2t. \tag{15}$$

Neste caso, supomos que $Y(t)$ é o produto de e^t com uma combinação linear de cos $2t$ e sen $2t$, ou seja,

$$Y(t) = Ae^t\cos 2t + Be^t\,\text{sen}\,2t.$$

Os cálculos algébricos são mais tediosos neste exemplo, mas segue que

$$Y'(t) = (A + 2B)e^t\cos 2t + (-2A + B)e^t\,\text{sen}\,2t$$

e

$$Y''(t) = (-3A + 4B)e^t\cos 2t + (-4A - 3B)e^t\,\text{sen}\,2t.$$

Substituindo essas expressões na Eq. (15), encontramos que A e B têm que satisfazer

$$10A + 2B = 8, \qquad 2A - 10B = 0.$$

Portanto, $A = 10/13$ e $B = 2/13$; logo, uma solução particular da Eq. (15) é

$$Y(t) = \tfrac{10}{13}e^t\cos 2t + \tfrac{2}{13}e^t\,\text{sen}\,2t.$$

Suponha, agora, que $g(t)$ é uma soma de dois termos, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, e suponha que Y_1 e Y_2 são soluções das equações

$$ay'' + by' + cy = g_1(t) \tag{16}$$

e

$$ay'' + by' + cy = g_2(t), \tag{17}$$

respectivamente. Então, $Y_1 + Y_2$ é uma solução da equação

$$ay'' + by' + cy = g(t). \tag{18}$$

Para provar esta afirmação, substitua y na Eq. (18) por $Y_1(t) + Y_2(t)$ e use as Eqs. (16) e (17). Uma conclusão semelhante é válida se $g(t)$ é uma soma de um número finito de parcelas. O significado prático deste resultado é que, para resolver uma equação cuja função não homogênea $g(t)$ pode ser expressa como uma soma, pode-se resolver diversas equações mais simples e depois somar os resultados. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

EXEMPLO 4

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\operatorname{sen} t - 8e^{t}\cos 2t. \tag{19}$$

Separando a expressão à direita do sinal de igualdade, obtemos três equações:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t},$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} t,$$

e

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^{t}\cos 2t.$$

Foram encontradas soluções dessas três equações nos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente. Portanto, uma solução particular da Eq. (9) é sua soma, ou seja,

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t} + \tfrac{3}{17}\cos t - \tfrac{5}{17}\operatorname{sen} t + \tfrac{10}{13}e^{t}\cos 2t + \tfrac{2}{13}e^{t}\operatorname{sen} 2t.$$

O procedimento ilustrado nesses exemplos nos permite resolver uma classe grande de problemas de um modo razoavelmente eficiente. No entanto, existe uma dificuldade que ocorre às vezes. O próximo exemplo mostra como isso acontece.

EXEMPLO 5

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}. \tag{20}$$

Procedendo como no Exemplo 1, vamos supor que $Y(t) = Ae^{-t}$. Substituindo na Eq. (20), obtemos

$$(A + 3A - 4A)e^{-t} = 2e^{-t}. \tag{21}$$

Como a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (21) é zero, não existe escolha de A que satisfaça esta equação. Portanto, não existe solução particular da Eq. (20) que tenha a forma suposta. A razão para esse resultado, possivelmente inesperado, torna-se clara se resolvermos a equação homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \tag{22}$$

associada à Eq. (20). Um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (22) é formado por $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$. Assim, a forma suposta da solução particular para a Eq. (20) era, de fato, solução da equação homogênea (22); em consequência, não pode ser solução da equação não homogênea (20). Para encontrar uma solução da Eq. (20), precisamos considerar então funções de uma forma um pouco diferente.

Neste ponto temos diversas alternativas possíveis. Uma é tentar simplesmente adivinhar a forma apropriada da solução particular da Eq. (20). Outra é resolver esta equação de outra maneira e depois usar o resultado para orientar nossas hipóteses se essa situação aparecer novamente no futuro; veja os Problemas 27 e 33 para outros métodos de solução. Outra possibilidade é buscar uma equação mais simples onde essa dificuldade ocorre e usar sua solução para sugerir como proceder com a Eq. (20). Adotando esta última abordagem, vamos procurar uma equação de primeira ordem análoga à Eq. (20). Uma possibilidade é a equação linear

$$y' + y = 2e^{-t}. \tag{23}$$

Se tentarmos encontrar uma solução particular da Eq. (23) da forma Ae^{-t} não conseguiremos, pois e^{-t} é uma solução da equação homogênea associada $y' + y = 0$. No entanto, já vimos na Seção 2.1 como resolver a Eq. (23). Um fator integrante é $\mu(t) = e^{t}$; multiplicando a equação por $\mu(t)$ e integrando, obtemos a solução

$$y = 2te^{-t} + ce^{-t}. \tag{24}$$

A segunda parcela à direita na Eq. (24) é a solução geral da equação homogênea $y' + y = 0$, mas a primeira é uma solução da equação não homogênea completa (23). Observe que a solução envolve um fator exponencial e^{-t} multiplicado por um fator t. Essa é a pista que estávamos procurando.

Vamos agora voltar para a Eq. (20) e supor uma solução particular da forma $Y(t) = Ate^{-t}$. Então

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \qquad Y''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}. \tag{25}$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (20) por essas expressões, obtemos

$$(-2A - 3A)e^{-t} = (A + 3A - 4A)te^{-t} = 2e^{-t}.$$

Portanto, $-5A = 2$, de modo que $A = -2/5$. Logo, uma solução particular da Eq. (20) é

$$Y(t) = -\tfrac{2}{5}te^{-t}. \tag{26}$$

O resultado do Exemplo 5 sugere uma modificação do princípio enunciado anteriormente: se a forma suposta da solução particular duplica uma solução da equação homogênea associada, modifique sua hipótese multiplicando a suposta solução particular por t. De vez em quando essa modificação não será suficiente para remover todas as duplicações com as soluções da equação homogênea, caso em que é necessário multiplicar por t uma segunda vez. Para uma equação de segunda ordem, nunca será necessário continuar esse processo.

Resumo. Vamos resumir as etapas envolvidas em encontrar a solução de um problema de valor inicial consistindo em uma equação não homogênea da forma

$$ay'' + by' - cy = g(t), \tag{27}$$

onde os coeficientes a, b e c são constantes, junto com um par de condições iniciais dado:

1. Encontre a solução geral da equação homogênea associada.
2. Certifique-se de que a função $g(t)$ na Eq. (27) pertence à classe de funções discutidas nesta seção, ou seja, não envolve outras funções além de exponenciais, senos, cossenos, polinômios ou somas ou produtos de tais funções. Se não for esse o caso, use o método de variação dos parâmetros (discutido na próxima seção).
3. Se $g(t) = g_1(t) + \cdots + g_n(t)$, isso é, se $g(t)$ é uma soma de n parcelas, então forme n subproblemas, cada um dos quais contendo apenas uma das parcelas $g_1(t), \ldots, g_n(t)$. O i-ésimo subproblema consiste na equação

   $$ay'' + by' + cy = g_i(t),$$

   onde i varia de 1 a n.
4. Para o i-ésimo subproblema, suponha uma solução particular $Y_i(t)$ consistindo na função apropriada, seja ela exponencial, seno, cosseno, polinomial ou uma combinação dessas. Se existir qualquer duplicação na forma suposta de $Y_i(t)$ com as soluções da equação homogênea (encontrada na etapa 1), então multiplique $Y_i(t)$ por t ou (se necessário) por t^2, de modo a remover a duplicação. Veja a Tabela 3.5.1.
5. Encontre uma solução particular $Y_i(t)$ para cada um dos subproblemas. Então a soma $Y_1(t) + \cdots + Y_n(t)$ é uma solução particular da equação não homogênea completa (27).
6. Forme a soma da solução geral da equação homogênea (etapa 1) com a solução particular da equação não homogênea (etapa 5). Essa é a solução geral da equação não homogênea.
7. Use as condições iniciais para determinar os valores das constantes arbitrárias na solução geral.

Para alguns problemas todo esse procedimento é fácil de ser feito à mão, mas em muitos casos necessita de uma quantidade considerável de cálculos algébricos. Uma vez que você tenha compreendido claramente como o método funciona, um sistema de álgebra computacional pode ser de grande auxílio para executar os detalhes.

TABELA 3.5.1 A solução particular de $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\operatorname{sen}\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t]$

Notas. Aqui s é o menor inteiro não negativo ($s = 0$, 1 ou 2) que garantirá que nenhuma parcela de $Y_i(t)$ é solução da equação homogênea associada. Equivalentemente, para os três casos s é o número de vezes que 0 é uma raiz da equação característica, α é uma raiz da equação característica e $\alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica, respectivamente.

O método dos coeficientes indeterminados corrige a si mesmo no sentido de que se você supuser muito pouco sobre $Y(t)$ chegará logo a uma contradição que, em geral, vai apontar o caminho para a modificação necessária na forma suposta. Por outro lado, se você supuser termos demais vai ter um trabalho desnecessário e alguns coeficientes ficarão iguais a zero, mas, pelo menos, chegará à resposta correta.

Demonstração do Método dos Coeficientes Indeterminados. Na discussão precedente, descrevemos o método dos coeficientes indeterminados baseados em diversos exemplos. Para provar que o procedimento sempre funciona como enunciado, vamos dar um argumento geral, onde consideramos diversos casos correspondendo a formas diferentes do termo não homogêneo $g(t)$.

$g(t) = P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$. Neste caso a Eq. (27) fica

$$ay'' + by' + cy = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{28}$$

Para obter uma solução particular, supomos que

$$Y(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_{n-2}t^2 + A_{n-1}t + A_n. \tag{29}$$

Substituindo na Eq. (28), obtemos

$$\begin{aligned} a[n(n-1)A_0t^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0t^{n-1} + \cdots + A_{n-1} \\ + c(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0t^n + \cdots + a_n. \end{aligned} \tag{30}$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de t nos dá

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

Se $c \neq 0$, a solução da primeira equação é $A_0 = a_0/c$ e as equações restantes determinam $A_1, \ldots, A_n$ sucessivamente. Se $c = 0$, mas $b \neq 0$, então o polinômio à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30) tem grau $n - 1$ e a Eq. (30) não pode ser satisfeita. Para garantir que $aY''(t) + bY'(t)$ é um polinômio de grau n, precisamos escolher $Y(t)$ como um polinômio de grau $n + 1$. Supomos, então, que

$$Y(t) = t(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

Não existe parcela constante nessa expressão para $Y(t)$, mas não há necessidade de incluir tal parcela, já que constantes são soluções da equação homogênea quando $c = 0$. Como $b \neq 0$, temos $A_0 = a_0/b(n + 1)$ e os outros coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ podem ser determinados analogamente. Se c e b são iguais a zero, vamos supor que

$$Y(t) = t^2(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

O termo $aY''(t)$ é um polinômio de grau n, e podemos proceder como anteriormente. Novamente, as parcelas constante e linear em $Y(t)$ são omitidas, já que, nesse caso, ambas são soluções da equação homogênea.

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)$. O problema de determinar uma solução particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}P_n(t) \tag{31}$$

pode ser reduzido ao caso precedente através de uma substituição. Seja

$$Y(t) = e^{\alpha t}u(t);$$

então

$$Y'(t) = e^{\alpha t}[u'(t) + \alpha u(t)]$$

e

$$Y''(t) = e^{\alpha t}[u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2 u(t)].$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (31), cancelando o fator $e^{\alpha t}$ e juntando os termos semelhantes, obtemos

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = P_n(t). \tag{32}$$

A determinação de uma solução particular da Eq. (32) é precisamente o mesmo problema, exceto pelo nome das constantes, que resolver a Eq. (28). Portanto, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ não for zero, supomos que $u(t) = A_0t^n + \ldots + A_n$; logo, uma solução particular da Eq. (31) é da forma

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n). \tag{33}$$

Por outro lado, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, mas $2a\alpha + b$ não for, precisamos tomar $u(t)$ da forma $t(A_0t^n + \ldots + A_n)$. A forma correspondente para $Y(t)$ é t vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33). Note que, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, então $e^{\alpha t}$ é uma solução da equação homogênea. Se ambos, $a\alpha^2 + b\alpha + c$ e $2a\alpha + b$, forem nulos (e isso implica que tanto $e^{\alpha t}$ quanto $te^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea), então a forma correta para $u(t)$ é $t^2(A_0t^n + \ldots + A_n)$. Portanto, $Y(t)$ é t^2 vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33).

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)\cos\beta t$ ou $e^{\alpha t}P_n(t)\operatorname{sen}\beta t$. Estes dois casos são semelhantes, logo consideraremos apenas o último. Podemos reduzir este problema ao precedente notando que, em consequência da fórmula de Euler, $\operatorname{sen}\beta t = (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})/2i$. Portanto, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P_n(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i},$$

e devemos escolher

$$Y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_0t^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_0t^n + \cdots + B_n),$$

ou, equivalentemente,

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + \cdots + A_n)\cos\beta t + e^{\alpha t}(B_0t^n + \cdots + B_n)\operatorname{sen}\beta t.$$

Em geral, prefere-se esta última forma. Se $\alpha \pm i\beta$ satisfazem a equação característica correspondente a equação homogênea, temos, é claro, que multiplicar cada um dos polinômios por t para aumentar o grau de um.

Se a função não homogênea envolve $\cos\beta t$ e $\operatorname{sen}\beta t$, é conveniente, em geral, tratar esses termos em conjunto, já que cada um, individualmente, pode gerar a mesma forma de solução particular. Por exemplo, se $g(t) = t\operatorname{sen}t + 2\cos t$, a forma de $Y(t)$ seria

$$Y(t) = (A_0t + A_1)\operatorname{sen}t + (B_0t + B_1)\cos t,$$

desde que sen t e cos t não sejam soluções da equação homogênea.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3\operatorname{sen}2t$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen}2t$
5. $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
7. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\operatorname{sen}t$
8. $y'' + y = 3\operatorname{sen}2t + t\cos 2t$
9. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$
10. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega_0 t$
11. $y'' + y' + 4y = 2\operatorname{senh}t$ *Sugestão:* $\operatorname{senh}t = (e^t - e^{-t})/2$
12. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$ *Sugestão:* $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 18, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
15. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' + 4y = 3\operatorname{sen}2t \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Em cada um dos Problemas de 19 a 26:

(a) Determine uma forma adequada para $Y(t)$ para se usar o método dos coeficientes indeterminados.

(b) Use um sistema de álgebra computacional para encontrar uma solução particular da equação dada.

19. $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + \operatorname{sen} 3t$
20. $y'' + y = t(1 + \operatorname{sen} t)$
21. $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t + 4) \operatorname{sen} t$
22. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} = 2e^{-t} \cos t + 4e^{-t}t^2 \operatorname{sen} t$
23. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t \operatorname{sen} 2t$
24. $y'' + 4y = t^2 \operatorname{sen} 2t + (6t + 7) \cos 2t$
25. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \operatorname{sen} 2t + 3e^{-t} \cos t + 4e^t$
26. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t} \cos 2t - 2te^{-2t} \cos t$
27. Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \tag{i}$$

do Exemplo 5. Lembre-se de que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$ são soluções da equação homogênea associada. Adaptando o método de redução de ordem (Seção 3.4), busque uma solução da equação não homogênea da forma $Y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$, onde $v(t)$ deverá ser determinado.

(a) Substitua $Y(t)$, $Y'(t)$ e $Y''(t)$ na Eq. (i) e mostre que $v(t)$ tem que satisfazer $v'' - 5v' = 2$.

(b) Seja $w(t) = v'(t)$ e mostre que $w(t)$ tem que satisfazer $w' - 5w = 2$. Resolva esta equação para $w(t)$.

(c) Integre $w(t)$ para encontrar $v(t)$ e depois mostre que

$$Y(t) = -\tfrac{2}{5}te^{-t} + \tfrac{1}{5}c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

A primeira parcela é a solução particular desejada da equação não homogênea. Note que é um produto de t e de e^{-t}.

28. Determine a solução geral de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi t,$$

onde $\lambda > 0$ e $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, \ldots, N$.

29. Em muitos problemas físicos o termo não homogêneo pode ser especificado por fórmulas diferentes em períodos de tempo diferentes. Como exemplo, determine a solução $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Suponha, também, que y e y' são contínuas em $t = \pi$. Faça o gráfico do termo não homogêneo e da solução em função do tempo.

Sugestão: primeiro resolva o problema de valor inicial para $t \le \pi$; depois resolva para $t > \pi$, determinando as constantes nesta última solução a partir das condições de continuidade em $t = \pi$.

30. Siga as instruções no Problema 29 para resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi)2, \\ 0, & t > \pi)2 \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Nos Problemas 31 e 32 continuamos a discussão iniciada nos Problemas de 38 a 40 da Seção 3.4. Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{i}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

31. Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções da Eq. (i), mostre que $Y_1(t) - Y_2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Este resultado é verdadeiro se $b = 0$?
32. Se $g(t) = d$, uma constante, mostre que toda solução da Eq. (i) tende a d/c quando $t \to \infty$. O que acontece se $c = 0$? E se b também for nulo?
33. Indicamos, neste problema, um procedimento[7] diferente para resolver a equação diferencial

[7] R. S. Luthar, "Another Approach to a Standard Differential Equation", *Two Year College Mathematics Journal 10* (1979), pp. 200-201; veja também D. C. Sandell e F. M. Stein, "Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations", *Two Year College Mathematics Journal 8* (1977), pp. 132-141, para uma discussão mais geral de operadores que fatoram.

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t). \tag{i}$$

onde b e c são constantes e D denota diferenciação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico da equação homogênea associada. Essas raízes podem ser reais e distintas, reais e iguais ou números complexos conjugados.

(a) Verifique que a Eq. (i) pode ser escrita na forma fatorada

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$

onde $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.

(b) Seja $u = (D - r_2)y$. Mostre que a solução da Eq. (i) pode ser encontrada resolvendo-se as duas equações de primeira ordem a seguir:

$$(D - r_1)u = g(t), \qquad (D - r_2)y = u(t).$$

Em cada um dos Problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para resolver a equação diferencial dada.

34. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ (veja o Exemplo 1)

35. $2y'' + 3y' + y = t^2 = 3\operatorname{sen} t$ (veja o Problema 7)

36. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (veja o Problema 6)

37. $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen} 2t$ (veja o Problema 4)

3.6 Variação dos Parâmetros

Vamos descrever, nesta seção, outro método para encontrar uma solução particular de uma equação não homogênea. Este método, conhecido como **variação dos parâmetros**, é devido a Lagrange e complementa muito bem o método dos coeficientes indeterminados. A principal vantagem do método de variação dos parâmetros é que é um *método geral*; pelo menos em princípio pode ser aplicado a qualquer equação, e não precisa de hipóteses detalhadas sobre a forma da solução. De fato, usaremos este método mais tarde nesta seção para deduzir uma fórmula para uma solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea de segunda ordem arbitrária. Por outro lado, o método de variação dos parâmetros sempre precisa do cálculo de determinadas integrais envolvendo o termo não homogêneo da equação diferencial, o que pode apresentar dificuldades. Antes de olhar o método no caso geral, vamos ilustrar seu uso em um exemplo.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução particular de

$$y'' + 4y = 3\csc t. \tag{1}$$

Observe que este problema não é um bom candidato para o método de coeficientes indeterminados como descrito na Seção 3.5, já que o termo não homogêneo, $g(t) = 3\csc t$, envolve um quociente (em vez de uma soma ou produto) de sen t ou cos t. Precisamos, portanto, de uma abordagem diferente. Note, também, que a equação homogênea associada à Eq. (1) é

$$y'' + 4y = 0, \tag{2}$$

e que a solução geral da Eq. (2) é

$$y_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t. \tag{3}$$

A ideia básica no método de variação dos parâmetros é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (3) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, e depois determinar essas funções de modo que a expressão resultante

$$y = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\operatorname{sen} 2t \tag{4}$$

seja solução da equação não homogênea (1).

Para determinar u_1 e u_2, precisamos substituir y na Eq. (1) pela Eq. (4). No entanto, mesmo sem fazer essa substituição podemos antecipar que o resultado será uma única equação envolvendo alguma combinação de u_1, u_2 e suas duas primeiras derivadas. Como temos apenas uma equação e duas funções desconhecidas, esperamos que existam muitas escolhas possíveis para u_1 e u_2 que satisfaçam nossas necessidades. De outra forma, podemos ser capazes de impor uma segunda condição de nossa escolha, obtendo, assim, duas equações para as

duas funções desconhecidas u_1 e u_2. Vamos mostrar em breve (seguindo Lagrange) que é possível escolher essa segunda condição de maneira a tornar os cálculos muito mais eficientes.

Voltando à Eq. (4), diferenciando-a e rearrumando os termos, obtemos

$$y' = -2u_1(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2(t)\cos 2t + u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\operatorname{sen} 2t. \tag{5}$$

Mantendo em mente a possibilidade de escolher uma segunda condição sobre u_1 e u_2, vamos exigir que a soma das duas últimas parcelas na Eq. (5) seja nula; ou seja, vamos exigir que

$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\operatorname{sen} 2t = 0. \tag{6}$$

Segue então da Eq. (5) que

$$y' = -2u_1(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2(t)\cos 2t. \tag{7}$$

Embora o efeito, em última análise, da condição (6) ainda não esteja claro, pelo menos simplificou a expressão para y'. Continuando, diferenciando a Eq. (7), obtemos

$$y'' = -4u_1(t)\cos 2t - 4u_2(t)\operatorname{sen} 2t - 2u_1'(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2'(t)\cos 2t. \tag{8}$$

Então, substituindo y e y'' na Eq. (1) pelas Eqs. (4) e (8), respectivamente, vemos que u_1 e u_2 têm que satisfazer

$$-2u_1'(t)\operatorname{sen} 2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t. \tag{9}$$

Resumindo nossos resultados até agora, queremos escolher u_1 e u_2 de modo a satisfazer as Eqs. (6) e (9). Essas equações podem ser consideradas como um par de equações lineares *algébricas* para as quantidades desconhecidas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$. As Eqs. (6) e (9) podem ser resolvidas de diversas maneiras. Por exemplo, resolvendo a Eq. (6) para $u_2'(t)$, temos

$$u_2'(t) = -u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t}. \tag{10}$$

Substituindo $u_2'(t)$ na Eq. (9) por essa expressão e simplificando, obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{3\csc t\operatorname{sen} 2t}{2} = -3\cos t. \tag{11}$$

Agora, substituindo essa expressão para $u_1'(t)$ de volta na Eq. (10) e usando as fórmulas para o ângulo duplo, vemos que

$$u_2'(t) = \frac{3\cos t\cos 2t}{\operatorname{sen} 2t} = \frac{3(1-2\operatorname{sen}^2 t)}{2\operatorname{sen} t} = \frac{3}{2}\csc t - 3\operatorname{sen} t. \tag{12}$$

Tendo obtido $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$, o próximo passo é integrar, de modo a obter $u_1(t)$ e $u_2(t)$. O resultado é

$$u_1(t) = -3\operatorname{sen} t + c_1 \tag{13}$$

e

$$u_2(t) = \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t| + 3\cos t + c_2. \tag{14}$$

Substituindo essas expressões na Eq. (4), temos

$$y = -3\operatorname{sen} t\cos 2t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\operatorname{sen} 2t + 3\cos t\operatorname{sen} 2t + c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t.$$

Finalmente, usando as fórmulas para o ângulo duplo mais uma vez, obtemos

$$y = 3\operatorname{sen} t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \cot t|\operatorname{sen} 2t + c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t. \tag{15}$$

As parcelas na Eq. (15) envolvendo as constantes arbitrárias c_1 e c_2 correspondem à solução geral da equação homogênea associada, enquanto a soma restante forma uma solução particular da equação não homogênea (1). Portanto, a Eq. (15) é a solução geral da Eq. (1).

No exemplo precedente, o método de variação dos parâmetros funcionou bem para determinar uma solução particular e, portanto, a solução geral da Eq. (1). A próxima pergunta é se esse método pode ser aplicado efetivamente a uma equação arbitrária. Vamos considerar, então,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{16}$$

onde p, q e g são funções contínuas dadas. Como ponto de partida, vamos supor que conhecemos a solução geral

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{17}$$

da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{18}$$

Essa é uma hipótese importante, já que, até agora, só mostramos como resolver a Eq. (18) se ela tiver coeficientes constantes. Se a Eq. (18) tiver coeficientes que dependem de t, então, em geral, os métodos descritos no Capítulo 5 têm que ser usados para se obter $y_c(t)$.

A ideia crucial, como ilustrado no Exemplo 1, é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (17) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente; isso nos dá

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{19}$$

Podemos, então, tentar determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$ de modo que a expressão na Eq. (19) seja solução da equação não homogênea (16), em vez da equação homogênea (18). Diferenciando a Eq. (19), obtemos

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{20}$$

Como no Exemplo 1, vamos igualar a zero a soma das parcelas envolvendo $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ na Eq. (20); ou seja, vamos exigir que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{21}$$

Então, da Eq. (20), temos

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{22}$$

Diferenciando novamente, obtemos

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \tag{23}$$

Agora, vamos substituir y, y' e y'' na Eq. (16) pelas expressões nas Eqs. (19), (22) e (23), respectivamente. Após rearrumar os termos na equação resultante, vemos que

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ + u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Cada uma das expressões entre colchetes na Eq. (24) é nula, pois ambas as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (18). Portanto, a Eq. (24) se reduz a

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{25}$$

As Eqs. (21) e (25) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ das funções desconhecidas. Elas correspondem, exatamente, às Eqs. (6) e (9) no Exemplo 1.

Resolvendo o sistema (21), (25), obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \qquad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \tag{26}$$

onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Note que a divisão por W é permitida, já que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, seu wronskiano não se anula. Integrando as Eqs. (26), encontramos as funções desejadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a saber,

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + c_1, \qquad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\,dt + c_2. \tag{27}$$

Se as integrais nas Eq. (27) puderem ser calculadas como funções elementares, substituímos os resultados na Eq. (19), obtendo assim a solução geral da Eq. (16). Mais geralmente, a solução sempre pode ser expressa como integrais, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 3.6.1 Se as funções p, q e g forem contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (18) associada à equação não homogênea (16)

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

então uma solução particular da Eq. (16) é

$$Y(t) = -y_1(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds + y_2(t)\int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds, \tag{28}$$

onde t_0 é qualquer ponto escolhido convenientemente em I. A solução geral é

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t), \tag{29}$$

como enunciado no Teorema 3.5.2.

Examinando a expressão (28) e revendo o processo segundo o qual a deduzimos, vemos que podem existir duas grandes dificuldades na utilização do método de variação dos parâmetros. Como mencionamos anteriormente, uma é a determinação de $y_1(t)$ e $y_2(t)$, ou seja, a determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (18), quando os coeficientes da equação não são constantes. Outra dificuldade possível é o cálculo das integrais que aparecem na Eq. (28). Isso depende inteiramente da natureza das funções y_1, y_2 e g. Ao usar a Eq. (28), certifique-se de que a equação diferencial é exatamente da forma (16); caso contrário, o termo não homogêneo $g(t)$ não será identificado corretamente.

Uma grande vantagem do método de variação dos parâmetros é que a Eq. (28) fornece uma expressão para a solução particular $Y(t)$ em termos de uma função não homogênea arbitrária $g(t)$. Essa expressão é um bom ponto de partida se você quiser investigar o efeito de variações no termo não homogêneo, ou se quiser analisar a resposta de um sistema sujeito a um número de forças externas diferentes.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial dada. Depois verifique sua resposta usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

Em cada um dos Problemas de 5 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada. Nos Problemas 11 e 12, g é uma função contínua arbitrária.

5. $y'' + y = \tan t, \quad 0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \quad 0 < t < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \quad t > 0$
8. $y'' + 4y = 3\csc 2t, \quad 0 < t < \pi/2$
9. $4y'' + y = 2\sec(t/2), \quad -\pi < t < \pi$
10. $y'' - 2y' + y = e^t/(1 + t^2)$
11. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$
12. $y'' + 4y = g(t)$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, verifique que as funções dadas y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea associada; depois encontre uma solução particular da equação não homogênea dada. Nos Problemas 19 e 20, g é uma função contínua arbitrária.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^{-1}$
14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$
15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \quad y_1(t) = 1 + t, \quad y_2(t) = e^t$
16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2\ln x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2\ln x$
18. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
19. $(1-x)y'' + xy' - y = g(x), \quad 0 < x < 1; \quad y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$
20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = g(x), \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
21. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \tag{i}$$

pode ser escrita como $y = u(t) + v(t)$, onde u e v são soluções dos dois problemas de valor inicial

$$L[u] = 0, \qquad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_0', \tag{ii}$$

$$L[v] = g(t), \qquad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \tag{iii}$$

respectivamente. Em outras palavras, as partes não homogêneas na equação diferencial e nas condições iniciais podem ser tratadas separadamente. Note que u é fácil de achar, se for conhecido um conjunto fundamental de soluções para $L[u] = 0$.

22. Escolhendo o limite inferior de integração na Eq. (28) no texto como o ponto inicial t_0, mostre que $Y(t)$ se torna

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)}\, g(s)\, ds.$$

Mostre que $Y(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$L[y] = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Assim, Y pode ser identificado com v no Problema 21.

23. (a) Use o resultado do Problema 22 para mostrar que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \tag{i}$$

é

$$y = \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen}(t - s)g(s)\, ds. \tag{ii}$$

(b) Use o resultado do Problema 21 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

24. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)(D - b)y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a e b são números reais com $a \neq b$.

25. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Note que as raízes da equação característica são $\lambda \pm i\mu$.

26. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)^2 y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a é um número real arbitrário.

27. Combinando os resultados dos Problemas de 24 a 26, mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D^2 + bD + c)y = g(t), \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde b e c são constantes, tem a forma

$$y = \phi(t) = \int_{t_0}^{t} K(t - s)g(s)\, ds. \tag{i}$$

A função K depende apenas das soluções y_1 e y_2 da equação homogênea associada e é independente do termo não homogêneo. Uma vez determinado K, todos os problemas não homogêneos envolvendo o mesmo operador diferencial L ficam reduzidos ao cálculo de uma integral. Note também que, embora K dependa de t e s, só aparece a combinação $t - s$, de modo que K é, de fato, uma função de uma única variável. Pensando em $g(t)$ como nos dados de entrada (*input*) do problema e em $\phi(t)$ como os dados de saída (*output*), segue da Eq. (i) que os dados de saída dependem dos dados de entrada em todo o intervalo, do ponto inicial t_0 ao ponto atual t. A integral na Eq. (i) é a **convolução** de K e g, e referimo-nos a K como o **núcleo**.

28. O método de redução de ordem (Seção 3.4) também pode ser usado para a equação não homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{i}$$

desde que se conheça uma solução y_1 da equação homogênea associada. Seja $y = v(t)y_1(t)$ e mostre que y satisfaz a Eq. (i) se v for solução de

$$y_1(t)v'' + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]v' = g(t). \tag{ii}$$

A Eq. (ii) é uma equação linear de primeira ordem em v'. Resolvendo essa equação, integrando o resultado e depois multiplicando por $y_1(t)$, obtemos a solução geral da Eq. (i).

Em cada um dos Problemas de 29 a 32, use o método esquematizado no Problema 28 para resolver a equação diferencial dada.

29. $t^2y'' - 2ty' + 2y = 4t^2, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t$
30. $t^2y'' + 7ty' + 5y = t, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^{-1}$
31. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = 1 + t$ (veja o Problema 15)
32. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1; \qquad y_1(t) = e^t$ (veja o Problema 16)

3.7 Vibrações Mecânicas e Elétricas

Uma das razões por que vale a pena estudar equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes é que elas servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes. Duas áreas importantes de aplicações são os campos de vibrações mecânicas e elétricas. Por exemplo, o movimento de uma massa presa em uma mola, as torções de uma haste com um volante, o fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série e muitos outros problemas físicos são bem descritos pela solução de um problema de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \tag{1}$$

Isso ilustra uma relação fundamental entre a matemática e a física: *muitos problemas físicos têm o mesmo modelo matemático*. Assim, quando sabemos resolver o problema de valor inicial (1), basta interpretar apropriadamente as constantes a, b e c, e as funções y e g para obter soluções de problemas físicos diferentes.

Estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola porque uma compreensão do comportamento desse sistema simples é o primeiro passo na investigação de sistemas vibratórios mais complexos. Além disso, os princípios envolvidos são os mesmos para muitos problemas. Considere uma massa m pendurada em uma das extremidades de uma mola vertical com comprimento original l, como mostra a Figura 3.7.1. A massa causa um alongamento L da mola para baixo (no sentido positivo). Existem duas forças agindo sobre o ponto onde a massa está presa à mola; veja a Figura 3.7.2. A força gravitacional, ou peso da massa, puxa para baixo e tem módulo igual a mg, onde g é a aceleração da gravidade. Existe também uma força, F_m, devido à mola, que puxa para cima. Se supusermos que o alongamento L da mola é pequeno, a força da mola fica muito próxima de ser proporcional a L; isso é conhecido como a lei de Hooke.[8] Assim, escrevemos $F_m = -kL$, onde a constante de proporcionalidade k é chamada de constante da mola e o sinal de menos é devido ao fato de que a força da mola puxa para cima (no sentido negativo). Como a massa está em equilíbrio, as duas forças estão balanceadas, o que significa que

$$mg - kL = 0. \tag{2}$$

Para um dado peso $w = mg$, pode-se medir L e depois usar a Eq. (2) para determinar k. Note que k tem unidades de força/comprimento.

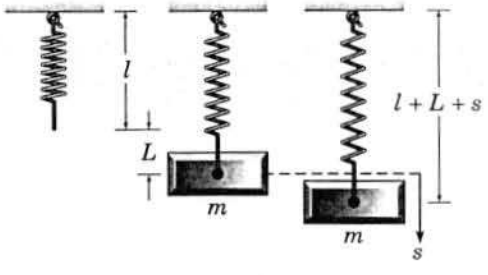


FIGURA 3.7.1 Um sistema mola-massa.

[8]Robert Hooke (1635-1703) foi um cientista inglês com interesses variados. Seu livro mais importante, *Micrographia*, foi publicado em 1665 e descreve uma variedade de observações microscópicas. Hooke publicou sua lei sobre o comportamento elástico pela primeira vez em 1676 como um anagrama: *ceiiinosssttuv*; em 1678 ele deu a solução como *ut tensio sic vis*, o que significa, *grosso modo*, "como a força, assim é o deslocamento".

No problema dinâmico correspondente, estamos interessados em estudar o movimento da massa, seja na presença de uma força externa ou sob um deslocamento inicial. Denote por $s(t)$, medido positivamente no sentido para baixo, o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio no instante t; veja a Figura 3.7.1. Então $s(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa pela lei do movimento de Newton,

$$ms''(t) = f(t), \tag{3}$$

FIGURA 3.7.2 Diagrama de forças para um sistema mola-massa.

onde s'' é a aceleração da massa e f é a força total agindo sobre a massa. Note que tanto s quanto f são funções do tempo. Existem quatro forças separadas que têm que ser consideradas para se determinar f:

1. O peso $w = mg$ da massa sempre age para baixo.
2. A força da mola F_m é tida como proporcional ao alongamento total $L + s$ da mola e sempre age para restaurar a mola à sua posição natural. Se $L + s > 0$, então a mola está distendida e a força da mola está direcionada para cima. Neste caso,

$$F_m = -k(L + s). \tag{4}$$

   Por outro lado, se $L + s < 0$, então a mola está comprimida de uma distância $|L + s|$ e a força da mola, agora direcionada para baixo, é dada por $F_m = k\,|L + s|$. No entanto, quando $L + s < 0$, segue que $|L + s| = -(L + s)$, de modo que F_m é dada, novamente, pela Eq. (4). Assim, independentemente da posição da massa, a força exercida pela mola sempre é dada pela Eq. (4).
3. A força de amortecimento, ou resistência F_d, sempre age no sentido oposto ao sentido de movimento da massa. Essa força pode aparecer de diversas fontes: resistência do ar ou de outro meio onde a massa se movimenta, dissipação de energia interna devido à extensão ou compressão da mola, atrito entre a massa e qualquer guia (se existir) que limite seu movimento a uma dimensão, ou um dispositivo mecânico (amortecedor) que gere uma força de resistência ao movimento da massa. Em qualquer caso, supomos que essa força de resistência é proporcional à velocidade escalar $|ds/dt|$ da massa; em geral, isso é chamado de amortecimento viscoso. Se $ds/dt > 0$, u está aumentando, de modo que a massa está se movendo para baixo. Então F_d aponta para cima e é dada por

$$F_d(t) = -\gamma s'(t), \tag{5}$$

   onde γ é uma constante positiva de proporcionalidade conhecida como a constante de amortecimento. Por outro lado, se $ds/dt < 0$, então s está diminuindo, de modo que a massa está se movendo para cima e F_d aponta para baixo. Nesse caso, $F_d = \gamma|s'(t)|$; como $|s'(t)| = -s'(t)$, segue que a força F_d é dada, novamente, pela Eq. (5). Assim, independentemente do sentido de movimento da massa, a força de amortecimento sempre é dada pela Eq. (5).

   A força de amortecimento pode ser bastante complicada, e a hipótese de que ela é modelada adequadamente pela Eq. (5) é discutível. Alguns amortecedores funcionam como a Eq. (5) descreve, e se as outras fontes de dissipação forem pequenas pode ser possível ignorá-las todas, ou ajustar a constante de amortecimento γ de modo a aproximá-las. Um grande benefício da hipótese (5) é que ela nos leva a uma equação diferencial linear (em vez de não linear). Isso, por sua vez, significa que pode ser feita uma análise completa do sistema diretamente, como mostraremos nesta e na próxima seção.
4. Pode ser aplicada uma força externa $F(t)$ apontando para baixo ou para cima, dependendo se $F(t)$ é positiva ou negativa. Isso poderia ser uma força devida ao movimento da estrutura onde está presa a mola, ou poderia ser uma força aplicada diretamente na massa. Muitas vezes a força externa é periódica.

Levando em consideração essas forças, podemos reescrever a lei de Newton (3) como

$$\begin{aligned} ms''(t) &= mg + F(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg - m[L + s(t)] - \gamma s'(t) + F(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Como $mg - kL = 0$ pela Eq. (2), segue que a equação de movimento da massa é

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{7}$$

onde as constantes m, γ e k são positivas. Note que a Eq. (7) tem a mesma forma que a Eq. (1).

É importante compreender que a Eq. (7) é apenas uma equação aproximada para o deslocamento $s(t)$. Em particular, as Eqs. (4) e (5) devem ser vistas como aproximações para a força da mola e a força de amortecimento, respectivamente. Também não levamos em consideração na nossa dedução a massa da mola, supondo-a desprezível perto da massa do corpo preso a ela.

A formulação completa do problema de vibração requer que especifiquemos duas condições iniciais, a saber, a posição inicial s_0 e a velocidade inicial v_0 da massa:

$$s(0) = s_0, \qquad s'(0) = v_0. \tag{8}$$

Segue do Teorema 3.2.1 que essas condições fazem com que o problema matemático tenha uma única solução. Isso é consistente com nossa intuição física de que, se a massa é colocada em movimento com deslocamento e velocidade iniciais, então sua posição estará unicamente determinada em todos os instantes futuros. A posição da massa é dada (aproximadamente) pela solução da Eq. (7), sujeita às condições iniciais dadas (8).

EXEMPLO 1

Uma massa pesando 4 libras (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 2 in (cerca de 5 cm). Suponha que a massa é deslocada 6 in adicionais no sentido positivo e depois é solta. A massa está em um meio que exerce uma resistência viscosa de 6 lb quando a massa está a uma velocidade de 3 ft/s (cerca de 91 cm/s). Sob as hipóteses discutidas nesta seção, formule o problema de valor inicial que governa o movimento da massa.

O problema de valor inicial pedido consiste na equação diferencial (7) com condições iniciais (8), de modo que nossa tarefa é determinar as diversas constantes que aparecem nessas equações. O primeiro passo é escolher as unidades de medida. Da forma como foi enunciado o problema, é natural usar as medidas inglesas no lugar do sistema métrico de unidades. A única unidade de tempo mencionada é o segundo, de modo que mediremos t em segundos. Por outro lado, o enunciado contém tanto pés quanto polegadas como unidades de comprimento. Não importa qual a medida a ser usada, mas, uma vez escolhida a medida, é importante que se seja consistente. Para definir, vamos medir o deslocamento em pés (um pé tem 12 in).

Como nada foi dito no enunciado do problema sobre uma força externa, vamos supor que $F(t) = 0$. Para determinar m, note que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{4 \text{ lb}}{32 \text{ pé/s}^2} = \frac{1}{8}\,\frac{\text{lb·s}^2}{\text{pé}}.$$

O coeficiente de amortecimento γ é determinado pela afirmação de que $\gamma s'$ é igual a 6 lb quando s' tem o valor de 3 ft/s. Logo,

$$\gamma = \frac{6 \text{ lb}}{3 \text{ ft/s}} = 2\,\frac{\text{lb·s}}{\text{pé}}.$$

A constante da mola k é encontrada a partir da afirmação de que a massa estica a mola por 2 in, ou 1/6 ft. Portanto,

$$k = \frac{4 \text{ lb}}{1/6 \text{ ft}} = 24\,\frac{\text{lb}}{\text{pé}}.$$

Em consequência, a Eq. (7) fica

$$\tfrac{1}{8}s'' + 2s' + 24s = 0,$$

ou

$$s'' + 16s' + 192s = 0. \tag{9}$$

As condições iniciais são

$$s(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad s'(0) = 0. \tag{10}$$

A segunda condição inicial é implicada pela palavra "solta" no enunciado do problema, que interpretamos como a massa sendo colocada em movimento sem velocidade inicial.

Vibrações Livres Não Amortecidas. Se não existe força externa, então $F(t) = 0$ na Eq. (7). Vamos supor, também, que não há amortecimento, de modo que $\gamma = 0$; essa é uma configuração idealizada do sistema,

que dificilmente (se alguma vez) acontece na prática. No entanto, se o amortecimento for muito pequeno, a hipótese de que não há amortecimento pode dar resultados satisfatórios em intervalos de tempo pequenos ou até moderados. Nesse caso, a equação de movimento (7) se reduz a

$$ms'' + ks = 0. \tag{11}$$

A solução geral da Eq. (11) é

$$s = A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t, \tag{12}$$

onde

$$\omega_0^2 = k/m. \tag{13}$$

As constantes arbitrárias A e B podem ser determinadas se forem dadas condições iniciais da forma (8).

Ao discutir a solução da Eq. (11), é conveniente escrever a Eq. (12) na forma

$$s = R\cos(\omega_0 t - \delta), \tag{14}$$

ou

$$s = R\cos\delta\cos\omega_0 t + R\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega_0 t. \tag{15}$$

Comparando as Eqs. (15) e (12), vemos que as constantes A, B, R e δ estão relacionadas pelas equações

$$A = R\cos\delta, \qquad B = R\operatorname{sen}\delta. \tag{16}$$

Assim,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \tan\delta = B/A. \tag{17}$$

Ao calcular δ é preciso tomar cuidado para se escolher o quadrante correto; isso pode ser feito verificando-se os sinais de $\cos\delta$ e $\operatorname{sen}\delta$ nas Eqs. (16).

O gráfico da função na Eq. (14), ou na equação equivalente (12), para um conjunto típico de condições iniciais aparece na Figura 3.7.3. O gráfico é uma onda senoidal deslocada que descreve um movimento periódico, ou harmônico simples, da massa. O **período** do movimento é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

A frequência circular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, medida em radianos por unidade de tempo, é chamada de **frequência natural** da vibração. O deslocamento máximo R da massa a partir de sua posição de equilíbrio é a **amplitude** do movimento. O parâmetro adimensional δ é chamado de **fase**, ou ângulo de fase, e mede o deslocamento da onda a partir de sua posição normal correspondente a $\delta = 0$.

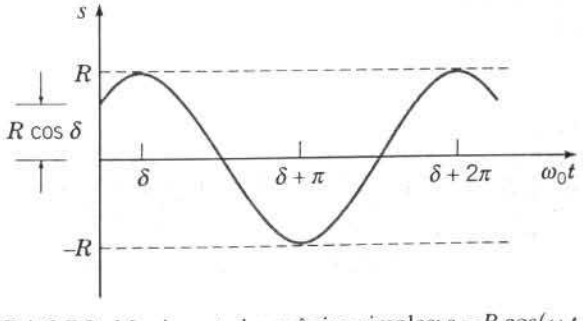


FIGURA 3.7.3 Movimento harmônico simples; $s = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

Note que o movimento descrito pela Eq. (14) tem amplitude constante, que não diminui com o tempo. Isso reflete o fato de que, na ausência de amortecimento, o sistema não tem como dissipar a energia dada pelo deslocamento e pela velocidade iniciais. Além disso, para uma massa m e uma constante de mola k dadas, o sistema sempre vibra à mesma frequência ω_0, independente das condições iniciais. No entanto, as condições iniciais ajudam a determinar a amplitude do movimento. Finalmente, note que, pela Eq. (18), T aumenta quando m aumenta, de modo que massas maiores vibram mais lentamente. Por outro lado, T diminui quando k aumenta, o que significa que molas mais duras fazem com que o sistema vibre mais rapidamente.

EXEMPLO 2

Suponha que uma massa pesando 10 lb (cerca de 4,5 kg) estique uma mola de 2 in (cerca de 5 cm). Se a massa for deslocada 2 in a mais e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial apontando para cima de 1 ft/s (cerca de 30 cm/s), determine a posição da massa em qualquer instante posterior. Determine, também, o período, a amplitude e a fase do movimento.

A constante da mola é $k = 10$ lb/2 in = 60 lb/ft e a massa é $m = \omega/g = 10/32$ lb · s²/ft*. Logo, a equação de movimento se reduz a

$$s'' + 192s = 0, \tag{19}$$

e a solução geral é

$$s = A\cos(8\sqrt{3}t) + B\,\mathrm{sen}(8\sqrt{3}t).$$

A solução que satisfaz as condições iniciais $s(0) = 1/6$ ft e $s'(0) = -1$ ft/s é

$$s = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\,(8\sqrt{3}t) \tag{20}$$

A frequência natural é $\omega_0 = \sqrt{192} \cong 13{,}856$ rad/s, de modo que o período é $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0{,}45345$ s. A amplitude R e a fase δ são dadas pelas Eqs. (17). Temos

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \quad \text{logo} \quad R \cong 0{,}18162 \text{ ft}.$$

A segunda das Eqs. (17) nos dá $\tan\delta = -\sqrt{3}/4$. Existem duas soluções desta equação, uma no segundo quadrante e outra no quarto. No problema atual, $\cos\delta > 0$ e $\mathrm{sen}\,\delta < 0$, logo δ está no quarto quadrante e temos

$$\delta = -\arctan(\sqrt{3}/4) \cong -0{,}40864 \text{ rad}.$$

O gráfico da solução (20) está ilustrado na Figura 3.7.4.

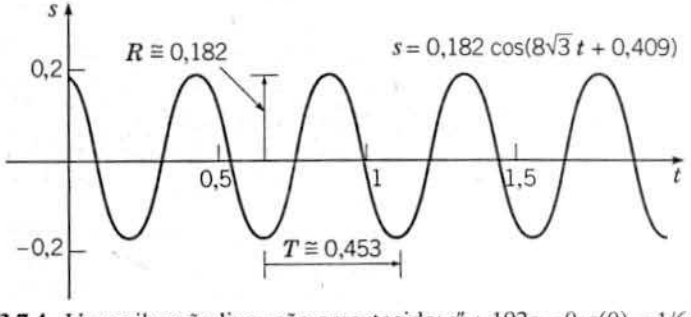


FIGURA 3.7.4 Uma vibração livre não amortecida; $s'' + 192s = 0, s(0) = 1/6, s'(0) = -1$.

Vibrações Livres Amortecidas. Se incluirmos o efeito do amortecimento, a equação diferencial que governa o movimento da massa é

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0. \tag{21}$$

Estamos especialmente interessados em examinar o efeito da variação na constante de amortecimento γ para valores dados da massa m e da constante da mola k. As raízes da equação característica correspondente são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\right). \tag{22}$$

Dependendo do sinal de $\gamma^2 - 4km$, a solução s tem uma das seguintes formas:

$$\gamma^2 - 4km > 0, \qquad s = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; \tag{23}$$

$$\gamma^2 - 4km = 0, \qquad s = (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}; \tag{24}$$

$$\gamma^2 - 4km < 0, \quad s = e^{-\gamma t/2m}(A\cos\mu t + B\,\mathrm{sen}\,\mu t), \quad \mu = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}}{2m} > 0. \tag{25}$$

*A aceleração da gravidade nas medidas inglesas é de 32 ft/s². (N.T.)

Como m, γ e k são positivos, $\gamma^2 - 4km$ é sempre menor do que γ^2. Então, se $\gamma^2 - 4km \geq 0$, os valores de r_1 e r_2 dados pela Eq. (22) são *negativos*. Se $\gamma^2 - 4km < 0$, então os valores de r_1 e r_2 são complexos, mas com parte real *negativa*. Assim, em todos os casos a solução s tende a zero quando $t \to \infty$; isso ocorre independentemente dos valores das constantes arbitrárias A e B, ou seja, independentemente das condições iniciais. Isso confirma nossa expectativa intuitiva, a saber, que o amortecimento dissipa, gradualmente, a energia do sistema e, em consequência, o movimento vai parando com o passar do tempo.

O caso mais importante é o terceiro, que ocorre quando o amortecimento é pequeno. Fazendo $A = R\cos\delta$ e $B = R\operatorname{sen}\delta$ na Eq. (25), obtemos

$$s = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta). \tag{26}$$

O deslocamento s fica entre as curvas $s = \pm Re^{-\gamma t/2m}$; logo, parece-se com uma onda senoidal cuja amplitude diminui quando t aumenta. Um exemplo típico está esboçado na Figura 3.7.5. O movimento é chamado de oscilação amortecida, ou vibração amortecida. O fator R na amplitude depende de m, γ, k e das condições iniciais.

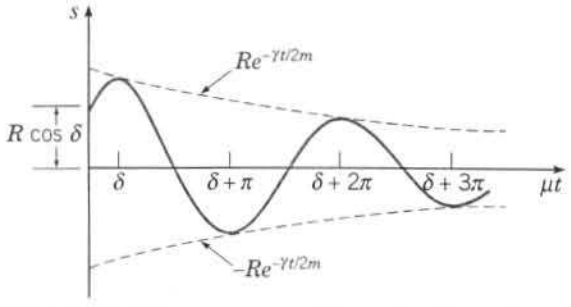


FIGURA 3.7.5 Vibração amortecida; $s = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$.

Embora o movimento não seja periódico, o parâmetro μ determina a frequência segundo a qual a massa oscila para cima e para baixo; em consequência, μ é chamada de **quase frequência**. Comparando μ com a frequência ω_0 do movimento sem amortecimento, vemos que

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}/2m}{\sqrt{k/m}} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\gamma^2}{8km}. \tag{27}$$

A última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno; referimo-nos a essa situação como "pouco amortecida" ou com "amortecimento pequeno". Assim, o efeito de um amortecimento pequeno é reduzir, ligeiramente, a frequência da oscilação. Por analogia com a Eq. (18), a quantidade $T_d = 2\pi/\mu$ é chamada de **quase período**. É o tempo entre dois máximos ou dois mínimos sucessivos da posição da massa, ou entre passagens sucessivas da massa por sua posição de equilíbrio indo no mesmo sentido. A relação entre T_d e T é dada por

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{\gamma^2}{8km}\right), \tag{28}$$

onde, novamente, a última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno. Assim, um amortecimento pequeno aumenta o quase período.

As Eqs. (27) e (28) reforçam o significado da razão adimensional $\gamma^2/4km$. Não é apenas o tamanho de γ que determina se o movimento é pouco ou muito amortecido, mas o tamanho de γ^2 comparado com $4km$. Quando $\gamma^2/4km$ é pequeno, o amortecimento afeta pouco a quase frequência e o quase período do movimento. Por outro lado, se quisermos estudar o movimento detalhado da massa em todos os instantes, então *nunca* podemos desprezar a força de amortecimento, não importa o quão pequena.

Quando $\gamma^2/4km$ aumenta, a quase frequência μ diminui e o quase período T_d aumenta. De fato, $\mu \to 0$ e $T_d \to \infty$ quando $\gamma \to 2\sqrt{km}$. Como indicado pelas Eq. (23), (24) e (25), a natureza da solução muda quando γ passa pelo valor $2\sqrt{km}$. Esse valor é conhecido como **amortecimento crítico**, enquanto para valores maiores de γ o movimento é dito **superamortecido**. Nesses casos, dados pelas Eqs. (24) e (23), respectivamente, a massa volta à sua posição de equilíbrio mas não oscila em torno dela, como para γ pequeno. A Figura 3.7.6 mostra dois exemplos típicos de movimento com amortecimento crítico, e a situação é mais discutida nos Problemas 21 e 22.

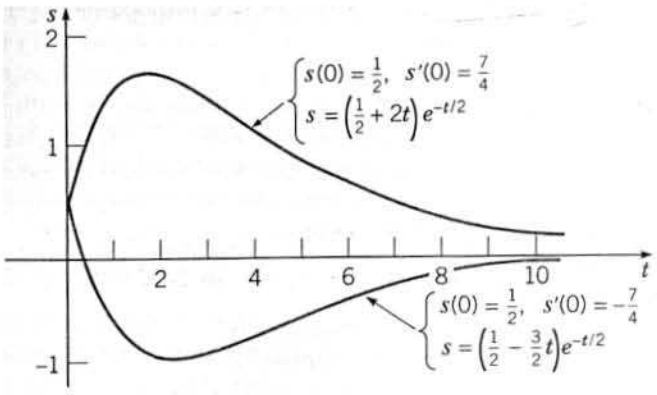


FIGURA 3.7.6 Movimentos criticamente amortecidos: $s'' + s' + 0{,}25s = 0; s = (A + Bt)e^{-t/2}$.

EXEMPLO 3

O movimento de determinado sistema mola-massa é governado pela equação diferencial

$$s'' + 0{,}125s' + s = 0, \tag{29}$$

onde s está medido em pés e t em segundos. Se $s(0) = 2$ e $s'(0) = 0$, determine a posição da massa em qualquer instante. Encontre a quase frequência e o quase período, assim como o instante no qual a massa passa pela primeira vez pela sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

A solução da Eq. (29) é

$$s = e^{-t/16}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{255}}{16}t\right].$$

Para satisfazer as condições iniciais, precisamos escolher $A = 2$ e $B = 2/\sqrt{255}$; logo, a solução do problema de valor inicial é

$$s = e^{-t/16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{255}}{16}t\right)$$

$$= \frac{32}{\sqrt{255}}e^{-t/16}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right), \tag{30}$$

onde $\tan\delta = 1/\sqrt{255}$, de modo que $\delta \cong 0{,}06254$. A Figura 3.7.7 mostra o deslocamento da massa em função do tempo. Para efeitos de comparação, mostramos, também, o movimento no caso em que o amortecimento é desprezado.

A quase frequência é $\mu = \sqrt{255}/16 \cong 0{,}998$ e o quase período é $T_d = 2\pi/\mu \cong 6{,}295$ s. Esses valores diferem apenas ligeiramente dos valores correspondentes (1 e 2π, respectivamente) para a oscilação sem amortecimen-

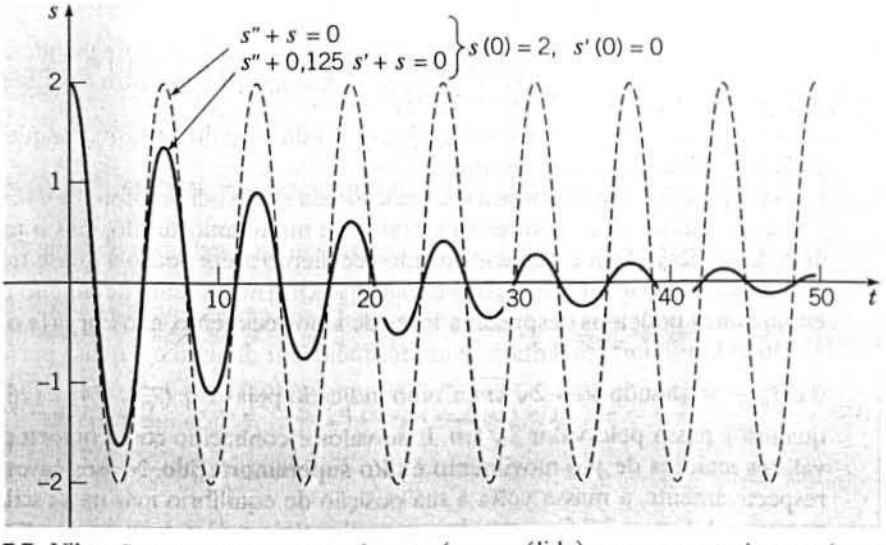


FIGURA 3.7.7 Vibração com pouco amortecimento (curva sólida) e sem amortecimento (curva tracejada).

to. Isso também é evidente dos gráficos na Figura 3.7.7, que sobem e descem praticamente juntos. O coeficiente de amortecimento é pequeno neste exemplo, apenas um dezesseis avos do valor crítico, de fato. Não obstante, a amplitude da oscilação é rapidamente reduzida. A Figura 3.7.8 mostra o gráfico da solução para $40 \le t \le 60$, junto com os gráficos de $s = \pm 0{,}1$. Pelo gráfico, τ parece estar em torno de 47,5, e um cálculo mais preciso mostra que $\tau \cong 47{,}5149$ s.

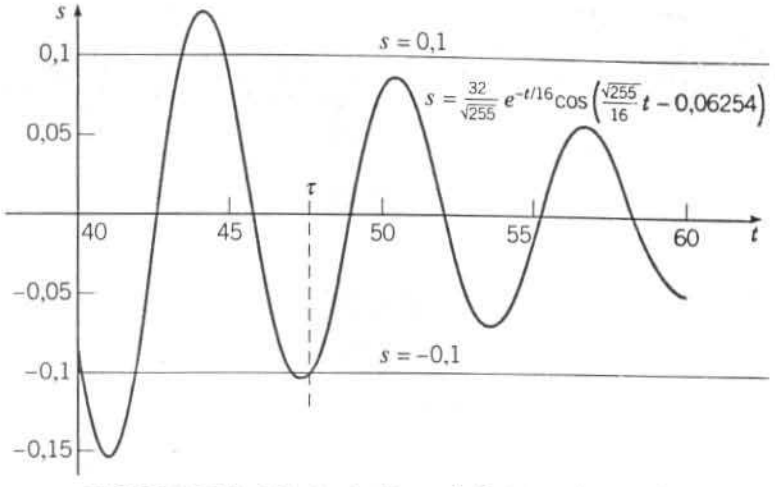


FIGURA 3.7.8 Solução do Exemplo 3; determinação de τ.

Para encontrar o instante no qual a massa passa, pela primeira vez, pela sua posição de equilíbrio, referimo-nos à Eq. (30) e igualamos $\sqrt{255}t/16 - \delta$ a $\pi/2$, o menor zero positivo da função cosseno. Então, resolvendo para t, obtemos

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1{,}637 \text{ s}.$$

Circuitos Elétricos. Um segundo exemplo da ocorrência de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é como modelo do fluxo de corrente elétrica no circuito simples ilustrado na Figura 3.7.9. A corrente I, medida em ampères (A), é uma função do tempo t. A resistência R em ohms (Ω), a capacitância C em farads (F) e a indutância L em henrys (H) são todas constantes positivas que supomos conhecidas. A tensão aplicada E em volts (V) é uma função do tempo dada. Outra quantidade física que entra na discussão é a carga total Q em coulombs (C) no capacitor no instante t. A relação entre a carga Q e a corrente I é

$$I = dQ/dt. \tag{31}$$

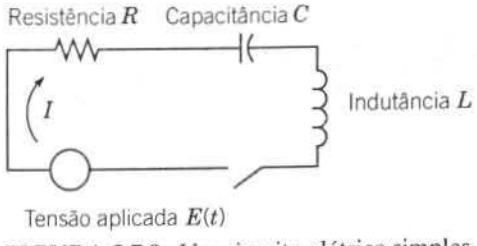


FIGURA 3.7.9 Um circuito elétrico simples.

O fluxo de corrente no circuito é governado pela segunda lei de Kirchhoff[9]: *Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

[9]Gustav Kirchhoff (1824-1887), professor em Breslau, Heidelberg e Berlim, foi um dos físicos mais importantes do século XIX. Ele descobriu as leis básicas dos circuitos elétricos em torno de 1845, enquanto estudante em Königsberg. É, também, famoso por seu trabalho fundamental em absorção e emissão eletromagnéticas, e foi um dos fundadores da espectroscopia.

De acordo com as leis elementares da eletricidade, sabemos que

A queda de tensão no resistor é IR.

A queda de tensão no capacitor é Q/C.

A queda de tensão no indutor é $L\,dI/dt$.

Portanto, pela lei de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{32}$$

As unidades foram escolhidas de modo que 1 volt = 1 ohm · 1 ampère = 1 coulomb/1 farad = 1 henry · 1 ampère/1 segundo.

Substituindo I pela expressão na Eq. (31), obtemos a equação diferencial

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{33}$$

para a carga Q. As condições iniciais são

$$Q(t_0) = Q_0, \qquad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \tag{34}$$

Logo, precisamos saber a carga no capacitor e a corrente no circuito em algum instante inicial t_0.

De outro modo, podemos obter uma equação diferencial para a corrente I diferenciando a Eq. (33) em relação a t e depois usando a Eq. (31) para substituir dQ/dt. O resultado é

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t), \tag{35}$$

com as condições iniciais

$$I(t_0) = I_0, \qquad I'(t_0) = I_0'. \tag{36}$$

Da Eq. (32), segue que

$$I_0' = \frac{E(t_0) - RI_0 - (1/C)Q_0}{L}. \tag{37}$$

Portanto, I_0' também é determinado pela carga e pela corrente iniciais, que são quantidades fisicamente mensuráveis.

A conclusão mais importante dessa discussão é que o fluxo de corrente no circuito é descrito por um problema de valor inicial que tem precisamente a mesma forma que aquele que descreve o movimento de um sistema mola-massa. Este é um bom exemplo do papel unificador da matemática: uma vez que você sabe como resolver equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, você pode interpretar os resultados em termos de vibrações mecânicas, circuitos elétricos ou qualquer outra situação física que leve ao mesmo problema.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, determine ω_0, R e δ de modo a escrever a expressão dada na forma $s = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

1. $s = 3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t$
2. $s = -\cos t + \sqrt{3}\operatorname{sen} t$
3. $s = 4\cos 3t - 2\operatorname{sen} 3t$
4. $s = -2\cos \pi t - 3\operatorname{sen} \pi t$

5. Uma massa pesando 2 lb (cerca de 900 g) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Se a massa é puxada 3 in adicionais para baixo e depois é solta, e se não há amortecimento, determine a posição s da massa em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Encontre a frequência, o período e a amplitude do movimento.
6. Uma massa de 100 g estica uma mola de 5 cm. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontando para baixo de 10 cm/s e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio?
7. Uma massa pesando 3 lb (cerca de 1,36 kg) estica uma mola de 3 in (cerca de 7,6 cm). Se a massa é empurrada para cima, contraindo a mola de 1 in, e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 2 ft*/s (cerca de 61 cm/s), e se não há amortecimento, encontre a posição s da massa em qualquer instante t. Determine a frequência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

*1 ft = 12 in. (N.T.)

8. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F e um indutor de 1 H. Se a carga inicial no capacitor é de 10^{-6} C e não há corrente inicial, encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

9. Uma massa de 20 g estica uma mola de 5 cm. Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400 dinas · s/cm. Se a massa é puxada para baixo mais 2 cm e depois solta, encontre sua posição s em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Determine a quase frequência e o quase período. Determine a razão entre o quase período e o período do movimento correspondente sem amortecimento. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}05$ cm para todo $t > \tau$.

10. Uma massa pesando 16 lb (cerca de 7 kg) estica uma mola de 3 polegadas (cerca de 7,5 cm). A massa está presa a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento de 2 lb · s/ft. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade para baixo de 3 in/s, encontre sua posição u em qualquer instante t. Faça o gráfico de s em função de t. Determine quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}01$ in para todo $t > \tau$.

11. Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 N. Uma massa de 2 kg é pendurada da mola e presa a um amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 N quando a velocidade da massa é de 5 m/s. Se a massa é puxada 5 cm abaixo de sua posição de equilíbrio e recebe uma velocidade inicial para baixo de 10 cm/s, determine sua posição s em qualquer instante t. Encontre a quase frequência μ e a razão entre μ e a frequência natural do movimento correspondente sem amortecimento.

12. Um circuito em série tem um capacitor de 10^{-5} F, um resistor de $3 \times 10^{2}\ \Omega$ e um indutor de 0,2 H. A carga inicial no capacitor é 10^{-6} C e não há corrente inicial. Encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

13. Certo sistema vibrando satisfaz a equação $s'' + \gamma s' + s = 0$. Encontre o valor do coeficiente de amortecimento γ para o qual o quase período do movimento amortecido é 50% maior do que o período do movimento correspondente sem amortecimento.

14. Mostre que o período do movimento de uma vibração não amortecida de uma massa pendurada em uma mola vertical é $2\pi\sqrt{L/g}$, onde L é o alongamento da mola devido à massa e g é a aceleração da gravidade.

15. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \qquad s(t_0) = s_0, \quad s'(t_0) = s_0'$$

pode ser expressa como a soma $s = v + \omega$, onde v satisfaz as condições iniciais $v(t_0) = s_0$, $v'(t_0) = 0$, ω satisfaz as condições iniciais $\omega(t_0) = 0$, $\omega'(t_0) = s_0'$ e ambas as funções v e ω satisfazem a mesma equação diferencial que s. Esse é outro exemplo de superposição de soluções de problemas mais simples para se obter a solução de um problema mais geral.

16. Mostre que $A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$ pode ser escrito na forma $r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determine r e θ em função de A e B. Se $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$, determine a relação entre R, r, δ e θ.

17. Uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 1 polegada e meia (cerca de 3,8 cm). A massa também está presa a um amortecedor com coeficiente γ. Determine o valor de γ para o qual o sistema tenha amortecimento crítico; certifique-se de colocar as unidades de γ.

18. Se um circuito em série tem um capacitor de $C = 0{,}8 \times 10^{-6}$ F e um indutor de $L = 0{,}2$ H, encontre a resistência R para que o circuito tenha amortecimento crítico.

19. Suponha que o sistema descrito pela equação $ms'' + \gamma s' + ks = 0$ tem amortecimento crítico ou está superamortecido. Mostre que a massa pode passar por sua posição de equilíbrio no máximo uma vez, independentemente das condições iniciais.

    Sugestão: Determine todos os valores possíveis de t para os quais $s = 0$.

20. Suponha que o sistema descrito pela equação $ms'' + \gamma s' + ks = 0$ tem amortecimento crítico e que as condições iniciais são $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$. Se $v_0 = 0$, mostre que $s \to 0$ quando $t \to \infty$, mas que s nunca se anula. Se s_0 for positivo, determine uma condição sobre v_0 que garanta que a massa vai passar pela sua posição de equilíbrio após o instante inicial.

21. **Decremento Logarítmico.** (a) Para a oscilação amortecida descrita pela Eq. (26), mostre que o intervalo de tempo entre os máximos sucessivos é de $T_d = 2\pi/\mu$.

    (b) Mostre que a razão entre os deslocamentos em dois máximos sucessivos é dada por $\exp(\gamma T_d/2m)$. Note que essa razão não depende do par de máximos sucessivos escolhido. O logaritmo neperiano dessa razão é chamado de decremento logarítmico e denotado por Δ.

    (c) Mostre que $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. Como m, μ e Δ são quantidades facilmente mensuráveis em um sistema mecânico, esse resultado fornece um método conveniente e *prático* para determinar a constante de amortecimento do sistema, que é mais difícil de medir diretamente. Em particular, para o movimento de uma massa vibrando em um fluido viscoso a constante de amortecimento depende da viscosidade

do fluido; para formas geométricas simples, a forma dessa dependência é conhecida e a relação precedente permite a determinação da viscosidade experimentalmente. Essa é uma das maneiras mais precisas de se determinar a viscosidade de um gás a altas pressões.

22. Tendo em vista o Problema 21, encontre o decremento logarítmico do sistema no Problema 10.
23. Para o sistema no Problema 17, suponha que $\Delta = 3$ e $T_d = 0{,}3$ s. Tendo em vista o Problema 21, determine o valor do coeficiente de amortecimento γ.
24. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$\tfrac{3}{2}s'' + ks = 0, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = v.$$

Se é observado que o período e a amplitude do movimento resultante são π e 3, respectivamente, determine os valores de k e v.

25. Considere o problema de valor inicial

$$s'' + \gamma s' + s = 0, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0.$$

Queremos explorar o quão longo é o intervalo de tempo necessário para que a solução se torne "desprezível" e como esse intervalo depende do coeficiente de amortecimento γ. Mais precisamente, vamos procurar o instante τ tal que $|s(t)| < 0{,}01$ para todo $t > \tau$. Note que o amortecimento crítico para este problema ocorre quando $\gamma = 2$.

(a) Seja $\gamma = 0{,}25$ e determine τ ou, pelo menos, estime-o de forma razoavelmente precisa a partir de um gráfico da solução.

(b) Repita o item (a) para diversos outros valores de γ no intervalo $0 < \gamma < 1{,}5$. Note que τ sempre decresce quando γ cresce, para γ nesse intervalo.

(c) Obtenha um gráfico de τ em função de γ colocando os pares de valores encontrados nos itens (a) e (b). O gráfico parece ser uma curva suave?

(d) Repita o item (b) para valores de γ entre 1,5 e 2. Mostre que τ continua a diminuir até que γ atinja um determinado valor crítico γ_0, após o qual τ aumenta. Encontre γ_0 e o valor mínimo correspondente de τ com duas casas decimais.

(e) Outra maneira de proceder é escrever a solução do problema de valor inicial na forma (26). Despreze o fator cosseno e considere, apenas, o fator exponencial e a amplitude R. Depois, encontre uma expressão para τ em função de γ. Compare os resultados aproximados obtidos desse modo com os valores determinados nos itens (a), (b) e (d).

26. Considere o problema de valor inicial

$$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \qquad s(0) = s_0, \quad s'(0) = v_0.$$

Suponha que $\gamma^2 < 4km$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Escreva a solução na forma $s(t) = R\exp(-\gamma t/2m)\cos(\mu t - \delta)$. Determine R em função de m, γ, k, u_0 e v_0.

(c) Investigue a dependência de R no coeficiente de amortecimento γ para valores fixos dos outros parâmetros.

27. Um bloco cúbico de lado l e densidade de massa ρ por unidade de volume está flutuando em um fluido com densidade de massa ρ_0 por unidade de volume, onde $\rho_0 > \rho$. Se o bloco é mergulhado ligeiramente e depois solto, ele oscila na posição vertical. Supondo que é possível desprezar o amortecimento viscoso do fluido e a resistência do ar, deduza a equação diferencial do movimento e determine o período do movimento.

Sugestão: use o princípio de Arquimedes. Um objeto completa ou parcialmente submerso em um fluido sofre a ação de uma força empurrando-o para cima (o empuxo) de módulo igual ao peso do fluido deslocado.

28. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + 2s = 0, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial.

(b) Faça os gráficos de s e de s' em função de t no mesmo par de eixos.

(c) Faça o gráfico com s' em um dos eixos e s no outro; isto é, faça o gráfico paramétrico de $s(t)$ e $s'(t)$ usando t como parâmetro. Esse tipo de gráfico é conhecido como um retrato de fase, e o plano ss' é chamado de plano de fase. Note que uma curva fechada no plano de fase corresponde a uma solução periódica $s(t)$. Qual o sentido do movimento (trigonométrico ou horário) no retrato de fase quando t aumenta?

29. A posição de determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + \tfrac{1}{4}s' + 2s = 0, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução deste problema de valor inicial.

(b) Faça os gráficos de s e de s' em função de t no mesmo par de eixos.

(c) Faça o gráfico de s' em função de s no plano de fase (veja o Problema 28). Identifique diversos pontos correspondentes nas curvas dos itens (b) e (c). Qual o sentido do movimento no plano de fase quando t aumenta?

30. Na ausência de amortecimento, o movimento de um sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$ms'' + ks = 0, \qquad s(0) = a, \quad s'(0) = b.$$

(a) Mostre que a energia cinética dada inicialmente à massa é $mb^2/2$ e que a energia potencial armazenada inicialmente na mola é $ka^2/2$, de modo que a energia total inicial do sistema é $(ka^2 + mb^2)/2$.

(b) Resolva o problema de valor inicial dado.

(c) Usando a solução no item (b), determine a energia total no sistema em qualquer instante t. Seu resultado deve confirmar o princípio de conservação de energia para este sistema.

31. Suponha que uma massa m desliza sem atrito em uma superfície horizontal. A massa está presa a uma mola com constante k, como ilustrado na Figura 3.7.10, e está sujeita, também, à resistência viscosa do ar com coeficiente γ. Mostre que o deslocamento $s(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a Eq. (21). Como a dedução da equação de movimento neste caso difere da dedução dada no texto?

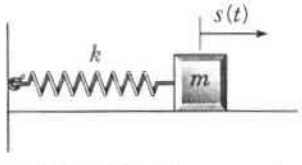


FIGURA 3.7.10 Um sistema mola-massa.

32. No sistema mola-massa do Problema 31, suponha que a força exercida pela mola não é dada pela lei de Hooke, mas, em vez disso, satisfaz a relação

$$F_m = -(ks + \epsilon s^3),$$

onde $k > 0$ e ϵ é pequeno em módulo, mas pode ter qualquer sinal. A mola é considerada "dura" se $\epsilon > 0$ e "mole" se $\epsilon < 0$. Por que esses termos são apropriados?

(a) Mostre que o deslocamento $s(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a equação diferencial

$$ms'' + \gamma s' + ks + \epsilon s^3 = 0.$$

Suponha que as condições iniciais são

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1.$$

No restante deste problema, suponha que $m = 1$, $k = 1$ e $\gamma = 0$.

(b) Encontre $s(t)$ quando $\epsilon = 0$ e determine, também, a amplitude e o período do movimento.

(c) Seja $\epsilon = 0{,}1$. Faça o gráfico de uma aproximação numérica da solução. Esse movimento parece ser periódico? Se for, estime a amplitude e o período.

(d) Repita o item (c) para $\epsilon = 0{,}2$ e $\epsilon = 0{,}3$.

(e) Coloque em um gráfico os valores estimados da amplitude A e do período T em função de ϵ. Descreva a maneira segundo a qual A e T, respectivamente, dependem de ϵ.

(f) Repita os itens (c), (d) e (e) para valores negativos de ϵ.

3.8 Vibrações Forçadas

Investigaremos agora a situação em que uma força externa periódica é aplicada a um sistema mola-massa. O comportamento desse sistema simples modela o de muitos sistemas oscilatórios sob a ação de uma força externa, devido, por exemplo, a um motor preso ao sistema. Consideraremos primeiro o caso em que há amortecimento e consideraremos mais tarde o caso particular ideal onde se supõe que não há amortecimento.

Vibrações Forçadas com Amortecimento. Os cálculos algébricos podem ser bem complicados nesse tipo de problema, de modo que começaremos com um exemplo relativamente simples.

EXEMPLO 1

Suponha que o movimento de determinado sistema mola-massa satisfaz a equação diferencial

$$s'' + s' + 1{,}25s = 3\cos t \tag{1}$$

e as condições iniciais

$$s(0) = 2, \qquad s'(0) = 3. \tag{2}$$

Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva o comportamento da solução para valores grandes de t.

A equação homogênea associada à Eq. (1) tem equação característica $r^2 + r + 1{,}25 = 0$ com raízes $r = -0{,}5 \pm i$. Assim, a solução geral $s_c(t)$ desta equação homogênea é

$$s_c(t) = c_1 e^{-t/2}\cos t + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen} t. \tag{3}$$

Uma solução particular da Eq. (1) tem a forma $S(t)\ A\cos t + B\operatorname{sen} t$, onde A e B são encontrados substituindo-se s na Eq. (1) por $S(t)$. Temos $S'(t) = -A\operatorname{sen} t + B\cos t$ e $S''(t) = -A\cos t - B\operatorname{sen} t$. Logo, da Eq. (1), obtemos

$$(0{,}25A + B)\cos t + (-A + 0{,}25B)\operatorname{sen} t = 3\cos t.$$

Em consequência, A e B têm que satisfazer as equações

$$0{,}25A + B = 3, \qquad -A + 0{,}25B = 0,$$

com o resultado que $A = 12/17$ e $B = 48/17$. Portanto, a solução particular é

$$S(t) = \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t, \tag{4}$$

e a solução geral da Eq. (1) é

$$s = s_c(t) + S(t) = c_1 e^{-t/2}\cos t + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t. \tag{5}$$

As constantes restantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais (2). Da Eq. (5), temos

$$s(0) = c_1 + \tfrac{12}{17} = 2, \qquad s'(0) = -\tfrac{1}{2}c_1 + c_2 + \tfrac{48}{17} = 3,$$

de modo que $c_1 = 22/17$ e $c_2 = 14/17$. Assim, obtemos finalmente a solução do problema de valor inicial dado, a saber,

$$s = \tfrac{22}{17}e^{-t/2}\cos t + \tfrac{14}{17}e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \tfrac{12}{17}\cos t + \tfrac{48}{17}\operatorname{sen} t. \tag{6}$$

O gráfico da solução (6) está ilustrado pela curva em preto na Figura 3.8.1.

É importante notar que a solução tem duas partes distintas. As duas primeiras parcelas contêm o fator exponencial $e^{-t/2}$; o resultado é que elas se aproximam rapidamente de zero. Costuma-se chamar essa parte de transiente. As parcelas restantes na Eq. (6) só envolvem senos e cossenos e, portanto, representam uma oscilação que continua para sempre. Referimo-nos a elas como estado estacionário. As curvas azuis na Figura 3.8.1, a sólida e a tracejada, representam as partes transiente e estado estacionário, respectivamente, da solução. A parte transiente vem da solução da equação homogênea associada à Eq. (1) e é necessária para satisfazer as condições iniciais. O estado estacionário é a solução particular da equação não homogênea completa. Depois de um tempo razoavelmente curto a parte transiente fica muito pequena, quase desaparecendo, e a solução fica essencialmente indistinguível do estado estacionário.

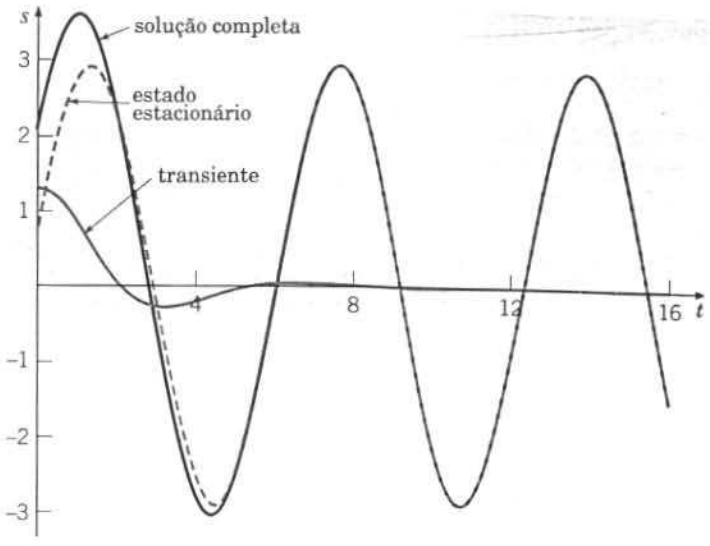


FIGURA 3.8.1 Solução do problema de valor inicial (1), (2).

A equação de movimento de um sistema mola-massa geral sujeito a uma força externa $F(t)$ é [Eq. (7) da Seção 3.7]

$$ms''(t) + \gamma s'(t) + ks(t) = F(t), \tag{7}$$

onde m, γ e k são, respectivamente, a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante da mola do sistema mola-massa. Suponha agora que a força externa é dada por $F_0 \cos \omega t$, onde F_0 e ω são constantes positivas representando a amplitude e a frequência, respectivamente, da força. A Eq. (7) fica, então,

$$ms'' + \gamma s' + ks = F_0 \cos \omega t. \tag{8}$$

As soluções da Eq. (8) se comportam de maneira muito semelhante à solução do exemplo precedente. A solução geral da Eq. (8) tem a forma

$$s = c_1 s_1(t) + c_2 s_2(t) + A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = s_c(t) + S(t). \tag{9}$$

As duas primeiras parcelas na Eq. (9) formam a solução geral $s_c(t)$ da equação homogênea associada à Eq. (8), enquanto as duas últimas parcelas formam uma solução particular $S(t)$ da equação não homogênea completa. Os coeficientes A e B podem ser encontrados, como de hábito, substituindo essas parcelas na equação diferencial (8), enquanto as constantes arbitrárias c_1 e c_2 estão disponíveis para satisfazer as condições iniciais, se houver. As soluções $s_1(t)$ e $s_2(t)$ da equação homogênea dependem das raízes r_1 e r_2 da equação característica $mr^2 + \gamma r + k = 0$. Como m, γ e k são constantes positivas, segue que r_1 e r_2 são raízes reais e negativas ou são complexas conjugadas com parte real negativa. Em qualquer dos casos, $s_1(t)$ e $s_2(t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$. Como $s_c(t)$ vai desaparecendo quando t aumenta, ela é chamada de **solução transiente**. Em muitas aplicações ela tem pouca importância, e (dependendo do valor de γ) pode ser praticamente indetectável depois de apenas alguns segundos.

As parcelas restantes na Eq. (9), a saber, $S(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$, não desaparecem quando t aumenta, mas persistem indefinidamente ou enquanto a força externa estiver sendo aplicada. Elas representam uma oscilação estacionária na mesma frequência da força externa e são chamadas de **solução estado estacionário** ou **resposta forçada**. A solução transiente nos permite satisfazer quaisquer condições iniciais que sejam impostas; quando o tempo vai passando, a energia colocada no sistema pelo deslocamento e pela velocidade iniciais é dissipada pela força de amortecimento, e o movimento torna-se, então, a resposta do sistema à força externa. Sem amortecimento, o efeito das condições iniciais persistiria para sempre.

É conveniente expressar $S(t)$ como uma única função trigonométrica, em vez de uma soma. Lembre-se de que fizemos isso para outras expressões semelhantes na Seção 3.7. Escrevemos, então,

$$S(t) = R \cos(\omega t - \delta). \tag{10}$$

A amplitude R e a fase δ dependem diretamente de A e de B e indiretamente dos parâmetros na equação diferencial (8). É possível mostrar, por cálculos diretos, porém um tanto longos, que

$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \qquad \cos \delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \qquad \operatorname{sen} \delta = \frac{\gamma \omega}{\Delta}, \tag{11}$$

onde

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \qquad \text{e} \qquad \omega_0^2 = k/m. \tag{12}$$

Lembre-se de que ω_0 é a frequência natural do sistema sem força externa e sem amortecimento.

Vamos investigar agora como a amplitude R da oscilação estado estacionário depende da frequência ω da força externa. Substituindo a Eq. (12) na expressão para R na Eq. (11) e fazendo algumas manipulações algébricas, encontramos

$$\frac{Rk}{F_0} = 1 \Big/ \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \Gamma\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2}, \tag{13}$$

onde $\Gamma = \gamma^2/mk$. Note que a quantidade Rk/F_0 é a razão entre a amplitude R da resposta forçada e o deslocamento estático da mola F_0/k produzido por uma força F_0.

Para excitações de baixa frequência, ou seja, quando $\omega \to 0$, segue da Eq. (13) que $Rk/F_0 \to 1$ ou $R \to F_0/k$. No outro extremo, para excitações de frequência muito alta, a Eq. (13) implica que $R \to 0$ quando $\omega \to \infty$. Em algum valor intermediário de ω, a amplitude pode atingir um máximo. Para encontrar esse ponto de máximo, podemos diferenciar R em relação a ω e igualar o resultado a zero. Dessa maneira vemos que a amplitude máxima ocorre quando $\omega = \omega_{máx}$, onde

$$\omega_{máx}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{2mk}\right). \tag{14}$$

Note que $\omega_{máx} < \omega_0$ e que $\omega_{máx}$ está próximo de ω_0 quando γ é pequeno. O valor máximo de R é

$$R_{máx} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - (\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right), \tag{15}$$

onde a última expressão é uma aproximação para γ pequeno. Se $\gamma^2/mk > 2$, então $\omega_{máx}$ dado pela Eq. (14) é imaginário; nesse caso, o valor máximo de R ocorre para $\omega = 0$ e R é uma função monótona decrescente de ω. Lembre-se de que o amortecimento crítico ocorre quando $\gamma^2/mk = 4$.

Para γ pequeno, segue da Eq. (15) que $R_{máx} \cong F_0/\gamma\omega_0$. Assim, para sistemas levemente amortecidos, a amplitude R da resposta forçada quando ω está próximo de ω_0 é bem grande, mesmo para forças externas relativamente pequenas, e quanto menor for o valor de γ, mais pronunciado será esse efeito. Esse fenômeno é conhecido como **ressonância** e é frequentemente um ponto importante a considerar em um projeto. A ressonância pode ser boa ou ruim, dependendo das circunstâncias. Ela tem que ser levada seriamente em consideração no projeto de estruturas, como edifícios e pontes, onde pode produzir instabilidade levando, possivelmente, a falhas catastróficas da estrutura. Por outro lado, a ressonância pode ser útil no projeto de instrumentos, como o sismógrafo, feito para detectar sinais periódicos fracos.

A Figura 3.8.2 contém alguns gráficos representativos de Rk/F_0 em função de ω/ω_0 para diversos valores de $\Gamma = \gamma^2/mk$. O gráfico correspondente a $\Gamma = 0{,}015625$ está incluído porque este é o valor de Γ que ocorre no Exemplo 2 abaixo. Observe especialmente o pico pontudo na curva correspondente a

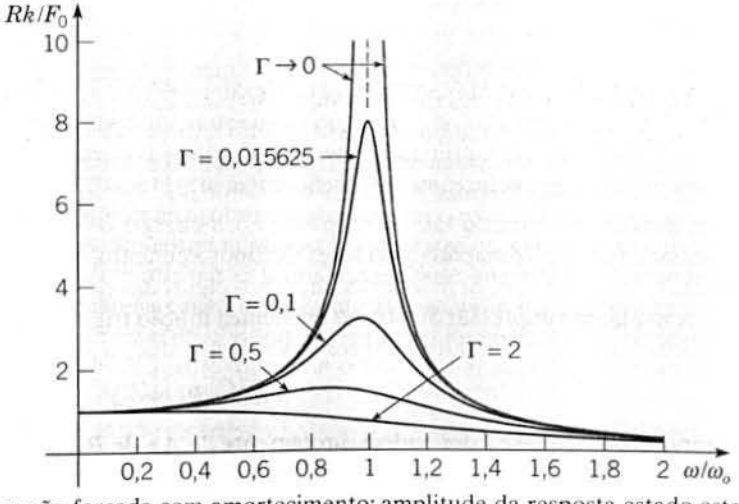


FIGURA 3.8.2 Vibração forçada com amortecimento: amplitude da resposta estado estacionário em função da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

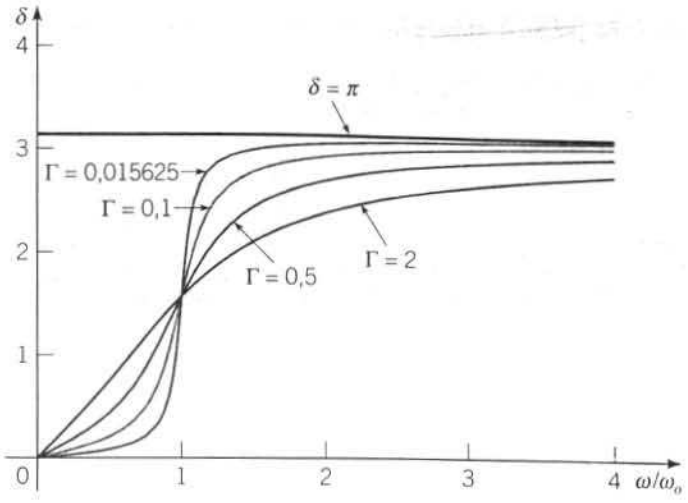


FIGURA 3.8.3 Vibração forçada com amortecimento: fase da resposta estado estacionário em função da frequência da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

$\Gamma = 0{,}015625$ perto de $\omega/\omega_0 = 1$. O caso-limite quando $\Gamma \to 0$ também é mostrado. Segue da Eq. (13), ou das Eqs. (11) e (12), que $R \to F_0/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ quando $\gamma \to 0$ e, portanto, Rk/F_0 é assintótico à reta vertical $\omega = \omega_0$, como mostra a figura. Quando o amortecimento no sistema aumenta, o pico na resposta diminui gradativamente.

A Figura 3.8.2 também ilustra a utilidade de variáveis adimensionais. Você pode verificar facilmente que cada uma das quantidades Rk/F_0, ω/ω_0 e Γ é adimensional. A importância desta observação é que o número de parâmetros significativos no problema foi reduzido a três, em vez dos cinco que aparecem na Eq. (8). Assim, basta uma família de curvas, algumas delas ilustradas na Figura 3.8.2, para descrever o comportamento da resposta em função da frequência de todos os sistemas governados pela Eq. (8).

O ângulo de fase δ também depende de ω de maneira interessante. Para ω próximo de zero, segue das Eqs. (11) e (12) que $\cos\delta \cong 1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo, $\delta \cong 0$ e a resposta está quase em fase com a excitação, o que significa que sobem e descem juntas e, em particular, atingem seus respectivos máximos e mínimos praticamente ao mesmo tempo. Para $\omega = \omega_0$, vemos que $\cos\delta = 0$ e $\operatorname{sen}\delta = 1$, de modo que $\delta = \pi/2$. Nesse caso, a resposta fica atrasada, em relação à excitação, de $\pi/2$; ou seja, os picos da resposta ocorrem $\pi/2$ mais tarde do que os da excitação, e analogamente para os vales. Finalmente, para ω muito grande temos $\cos\delta \cong -1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo, $\delta \cong \pi$, de modo que a resposta está quase que completamente defasada em relação à excitação; isso significa que a resposta é mínima quando a excitação é máxima, e vice-versa. A Figura 3.8.3 mostra os gráficos de δ em função de ω/ω_0 para diversos valores de Γ. Para pouco amortecimento, a transição de fase de perto de $\delta = 0$ para perto de $\delta = \pi$ ocorre de maneira um tanto abrupta, enquanto para valores grandes do parâmetro de amortecimento a transição se dá de forma mais gradual.

EXEMPLO 2

Considere o problema de valor inicial

$$s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0. \tag{16}$$

Mostre gráficos da solução para valores diferentes da frequência da força externa ω e compare-os com os gráficos correspondentes da força externa.

Para este sistema, temos $\omega_0 = 1$ e $\Gamma = 1/64 = 0{,}015625$. Seu movimento sem força externa foi discutido no Exemplo 3 da Seção 3.7, e a Figura 3.7.7 mostra o gráfico da solução do problema na ausência de força. As Figuras 3.8.4, 3.4.5 e 3.8.6 mostram a solução do problema com força externa (16) para $\omega = 0{,}3$, $\omega = 1$ e $\omega = 2$, respectivamente. Cada figura mostra, também, o gráfico da força externa. Neste exemplo, o deslocamento estático F_0/k é igual a 3.

A Figura 3.8.4 mostra o caso de baixa frequência, $\omega/\omega_0 = 0{,}3$. Depois de a resposta inicial transiente ser amortecida substancialmente, a resposta estado estacionário restante está essencialmente em fase com a excitação, e a amplitude da resposta é um pouco maior do que o deslocamento estático. Especificamente, $R \cong 3{,}2939$ e $\delta \cong 0{,}041185$.

O caso ressonante, $\omega/\omega_0 = 1$, está ilustrado na Figura 3.8.5. Aqui a amplitude da resposta estado estacionário é oito vezes o deslocamento estático e a figura também mostra o atraso da fase previsto de $\pi/2$ em relação à força externa.

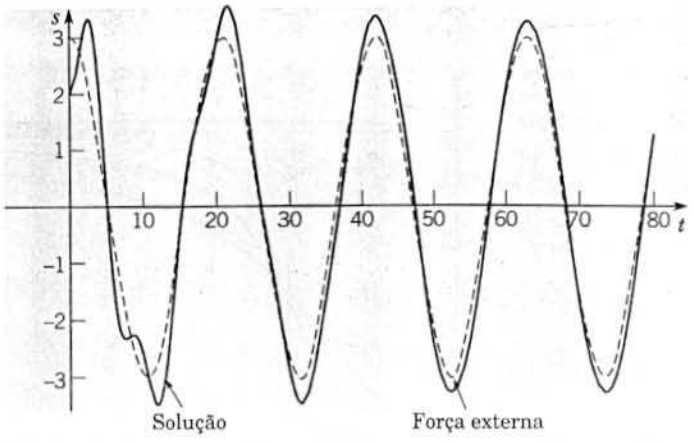


FIGURA 3.8.4 Uma vibração forçada com amortecimento: solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos 0{,}3t, s(0) = 2, s'(0) = 0$.

O caso da frequência de excitação razoavelmente alta está ilustrado na Figura 3.8.6. Note que a amplitude da resposta estado estacionário é aproximadamente um terço do deslocamento estático e que a diferença de fase entre a excitação e a resposta é aproximadamente π. Mais precisamente, temos que $R \cong 0{,}99655$ e $\delta \cong 3{,}0585$.

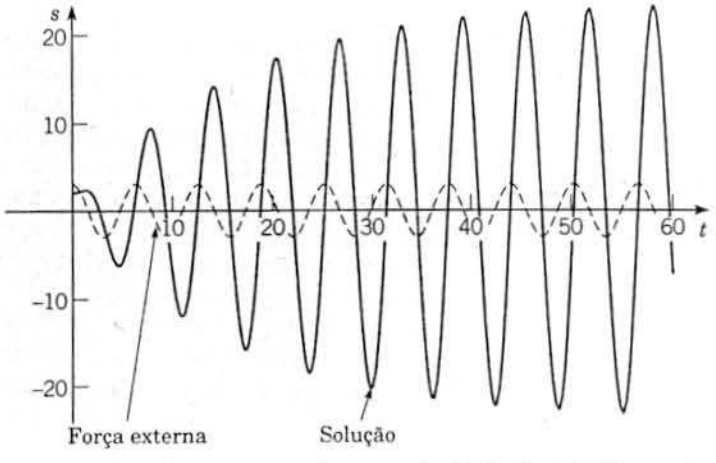


FIGURA 3.8.5 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos t, s(0) = 2, s'(0) = 0$.

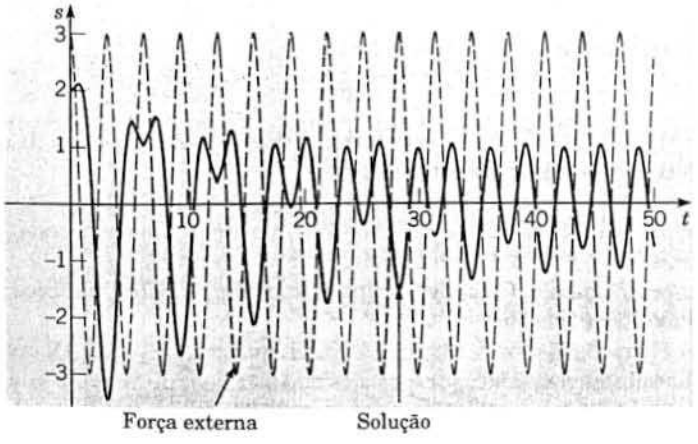


FIGURA 3.8.6 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $s'' + 0{,}125s' + s = 3\cos 2t, s(0) = 2, s'(0) = 0$.

Vibrações Forçadas sem Amortecimento. Vamos supor agora que $\gamma = 0$ na Eq. (8), obtendo assim a equação de movimento de um oscilador forçado sem amortecimento

$$ms'' + ks = F_0 \cos \omega t. \tag{17}$$

A forma da solução geral da Eq. (17) é diferente, dependendo de se a frequência ω da força externa é diferente ou é igual à frequência natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ do sistema sem força externa. Considere primeiro o caso $\omega \neq \omega_0$; então, a solução geral da Eq. (17) é

$$s = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{18}$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais. O movimento resultante é, em geral, a soma de dois movimentos periódicos com frequências diferentes (ω_0 e ω) e amplitudes diferentes também.

É particularmente interessante supor que a massa está inicialmente em repouso, de modo que as condições iniciais são $s(0) = 0$ e $s'(0) = 0$. Então a energia impulsionando o sistema vem inteiramente da força externa, sem contribuição das condições iniciais. Nesse caso as constantes c_1 e c_2 na Eq. (18) são dadas por

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0, \tag{19}$$

e a solução da Eq. (17) fica

$$s = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{20}$$

Essa é a soma de duas funções periódicas com períodos diferentes, mas com mesma amplitude. Usando as identidades trigonométricas para $\cos(A \pm B)$ com $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ e $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, podemos escrever a Eq. (20) na forma

$$s = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \tag{21}$$

Se $|\omega_0 - \omega|$ é pequeno, então $\omega_0 + \omega$ é muito maior do que $|\omega_0 - \omega|$. Em consequência, $\operatorname{sen}(\omega_0 + \omega)t/2$ é uma função oscilando rapidamente, se comparada com $\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t/2$. Então o movimento é uma oscilação rápida com frequência $(\omega_0 + \omega)/2$, mas com uma amplitude senoidal variando lentamente

$$\frac{2F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left| \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right|.$$

Esse tipo de movimento, com uma variação periódica da amplitude, exibe o que é chamado de um **batimento**. Por exemplo, tal fenômeno ocorre em acústica quando dois diapasões de frequência praticamente iguais são usados simultaneamente. Nesse caso, a variação periódica da amplitude pode ser notada com facilidade pelo ouvido sem recursos extras. Em eletrônica, a variação da amplitude em relação ao tempo é chamada de **modulação da amplitude**.

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valor inicial

$$s'' + s = 0{,}5 \cos 0{,}8t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0, \tag{22}$$

e faça o gráfico da solução

Nesse caso $\omega_0 = 1$, $\omega = 0{,}8$ e $F_0 = 0{,}5$, de modo que, pela Eq. (21), a solução do problema dado é

$$s = 2{,}77778(\operatorname{sen} 0{,}1t)(\operatorname{sen} 0{,}9t). \tag{23}$$

A Figura 3.8.7 mostra um gráfico desta solução. A variação de amplitude tem uma frequência baixa de 0,1 e um período lento correspondente de 20π. Note que um meio período de 10π corresponde a um único ciclo de amplitude crescente e depois decrescente. O deslocamento do sistema mola-massa oscila com uma frequência relativamente rápida de 0,9, que só é ligeiramente menor do que a frequência natural ω_0.

Imagine agora que a frequência ω da força externa é ainda mais aumentada, digamos para $\omega = 0{,}9$. Então a frequência baixa é cortada pela metade para 0,05 e o meio período lento correspondente dobra para 20π. O multiplicador 2,7778 também aumenta substancialmente para 5,2632. No entanto, a frequência rápida aumenta pouco, para 0,95. Você pode visualizar o que acontece quando ω vai assumindo valores cada vez mais próximos da frequência natural $\omega_0 = 1$?

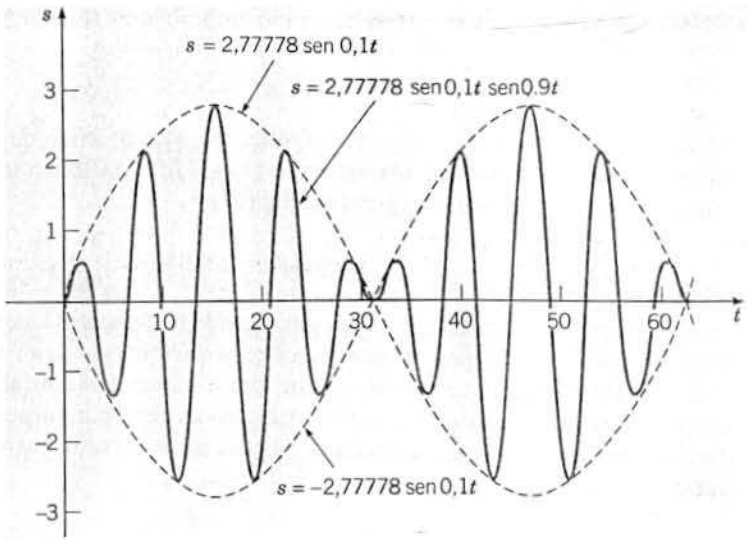


FIGURA 3.8.7 Um batimento: solução de $s'' + s = 0{,}5 \cos 0{,}8t, s(0) = 0, s'(0) = 0; s = 2{,}77778(\text{sen } 0{,}1t)(\text{sen } 0{,}9t)$.

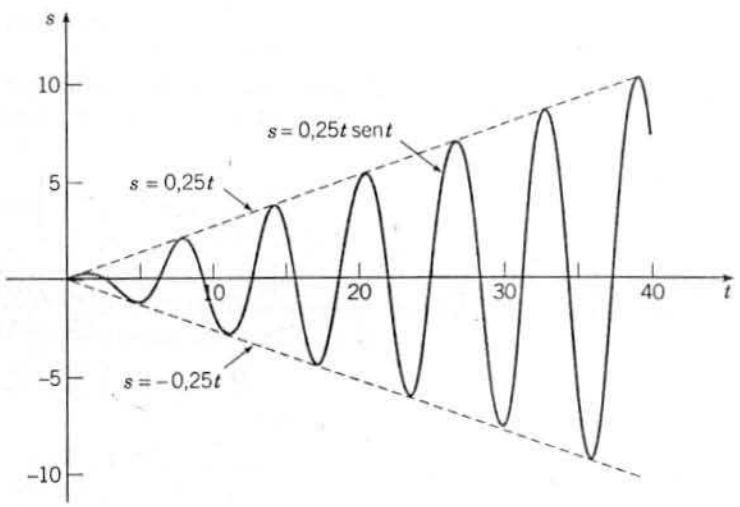


FIGURA 3.8.8 Ressonância; solução de $s'' + s = 0{,}5 \cos t, s(0) = 0, s'(0) = 0; s = 0{,}25t \text{ sen } t$.

Vamos voltar para a Eq. (17) e considerar o caso da ressonância, onde $\omega = \omega_0$, ou seja, a frequência da função externa é igual à frequência natural do sistema. Então o termo não homogêneo $F_0 \cos \omega t$ é uma solução da equação homogênea associada. Nesse caso, a solução da Eq. (17) é

$$s = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \text{sen } \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \text{ sen } \omega_0 t. \tag{24}$$

Por causa do termo t sen $\omega_0 t$, a solução (24) prevê que o movimento ficará ilimitado quando $t \to \infty$, independentemente dos valores de c_1 e c_2; veja a Figura 3.8.8 para um exemplo típico. É claro que oscilações ilimitadas não ocorrem na vida real. Quando s fica grande, o modelo matemático no qual a Eq. (17) se baseia não é mais válido, já que a hipótese de que a força da mola depende linearmente do deslocamento requer que s seja pequeno. Como vimos, se o amortecimento é incluído no modelo, o movimento previsto permanece limitado; no entanto, a resposta à função de entrada $F_0 \cos \omega t$ pode ser muito grande se o amortecimento é pequeno e ω está próximo de ω_0.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, escreva a expressão dada como um produto de duas funções trigonométricas com frequências diferentes.

1. $\cos 9t - \cos 7t$
2. $\operatorname{sen} 7t - \operatorname{sen} 6t$
3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$
4. $\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 4t$
5. Uma massa pesando 4 lb (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 1,5 in (cerca de 5 cm). A massa é deslocada 2 in no sentido positivo a partir de sua posição de equilíbrio e solta sem velocidade inicial. Supondo que não há amortecimento e que a massa sofre a ação de uma força externa de 2 cos t lb, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento dessa massa.
6. Uma massa de 5 kg estica uma mola de 10 cm. A massa sofre a ação de uma força externa de 10 sen(t/2) N (newtons) e se move em um meio que amortece o movimento com uma força viscosa de 2 N quando a velocidade da massa é de 4 cm/s. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de 3 cm/s, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa.
7. (a) Encontre a solução do Problema 5.
   (b) Faça o gráfico da solução.
   (c) Se a força externa dada for substituída por uma força 4 sen ωt com a mesma frequência ω, encontre o valor de ω para o qual ocorre ressonância.
8. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial no Problema 6.
   (b) Identifique as partes transiente e estado estacionário da solução.
   (c) Faça o gráfico da solução estado estacionário.
   (d) Se a força externa dada for substituída por uma força 2 cos ωt com frequência ω, encontre o valor de ω para o qual a amplitude da resposta forçada é máxima.
9. Se um sistema mola-massa não amortecido com uma massa pesando 6 lb (cerca de 2,7 kg) e uma constante da mola de 1 lb/in é colocado em movimento de repente, no instante $t = 0$, por uma força externa de 4 cos $7t$ lb, determine a posição da massa em qualquer instante e desenhe o gráfico de seu deslocamento em função de t.
10. Uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Uma força externa de 8 sen $8t$ lb age sobre o sistema. Se a massa é puxada 3 in para baixo e depois solta, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine os quatro primeiros instantes em que a velocidade da massa é nula.
11. Uma mola é esticada 6 in (cerca de 15 cm) por uma massa pesando 8 lb (cerca de 3,6 kg). A massa está presa a um mecanismo amortecedor que tem uma constante de amortecimento de 0,25 lb s/ft e está sob a ação de uma força externa igual a 4 cos $2t$ lb.
   (a) Determine a resposta estado estacionário desse sistema.
   (b) Se a massa dada é substituída por uma massa m, determine o valor de m para o qual a amplitude da resposta estado estacionário é máxima.
12. A mola de um sistema mola-massa tem constante de 3 N/m. É presa uma massa de 2 kg na mola e o movimento se dá em um fluido viscoso que oferece uma resistência numericamente igual ao módulo da velocidade instantânea. Se o sistema sofre a ação de uma força externa de (3 cos $3t$ – 2 sen $3t$) N, determine a resposta estado estacionário. Expresse sua resposta na forma $R\cos(\omega t - \delta)$.
13. Neste problema, pedimos que você forneça alguns dos detalhes na análise de um oscilador forçado com amortecimento.
   (a) Deduza as Eqs. (10), (11) e (12) para a solução estado estacionário da Eq. (8).
   (b) Deduza a expressão na Eq. (13) para Rk/F_0.
   (c) Mostre que $\omega_{máx}^2$ e $R_{máx}$ são dados pelas Eqs. (14) e (15), respectivamente.
14. Encontre a velocidade da resposta estado estacionário dada pela Eq. (10). Depois mostre que a velocidade é máxima quando $\omega = \omega_0$.
15. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$s'' + s = F(t), \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0,$$

onde

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Sugestão: Trate separadamente cada intervalo de tempo e iguale as soluções nos intervalos diferentes supondo que s e s' são funções contínuas de t.

16. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F, um resistor de $5 \times 10^3\ \Omega$ e um indutor de 1 H. A carga inicial no capacitor é zero. Se uma bateria de 12 volts é conectada ao circuito e o circuito é fechado

em $t = 0$, determine a carga no capacitor em $t = 0{,}001$ s, em $t = 0{,}01$ s e em qualquer instante t. Determine, também, a carga limite quando $t \to \infty$.

17. Considere um sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + \tfrac{1}{4}s' + 2s = 2\cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 2.$$

(a) Determine a parte estado estacionário da solução deste problema.
(b) Encontre a amplitude A da solução estado estacionário em função de ω.
(c) Faça o gráfico de A em função de ω.
(d) Encontre o valor máximo de A e a frequência ω onde ele ocorre.

18. Considere o sistema forçado, mas não amortecido, descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $s(t)$ para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $s(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Descreva como a resposta $s(t)$ muda quando ω varia nesse intervalo. O que acontece se ω assume valores cada vez mais próximos de 1? Note que a frequência natural do sistema sem a força externa é $\omega_0 = 1$.

19. Considere o sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$s'' + s = 3\cos\omega t, \qquad s(0) = 1, \quad s'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $s(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Compare os resultados com os do Problema 18, ou seja, descreva o efeito das condições iniciais não nulas.

20. Para o problema de valor inicial no Problema 18, faça o gráfico de s' em função de s para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Tal gráfico é chamado de retrato de fase. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que o retrato de fase apareça como uma curva fechada. Coloque setas na sua curva indicando o sentido de percurso quando t aumenta.

Os Problemas de 21 a 23 tratam do problema de valor inicial

$$s'' + 0{,}125s' + 4s = F(t), \qquad s(0) = 2, \quad s'(0) = 0.$$

Em cada um desses problemas:

(a) Faça os gráficos da função externa $F(t)$ e da solução $u(t)$ em função de t usando o mesmo conjunto de eixos. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que a solução transiente seja substancialmente reduzida. Observe a relação entre a amplitude e a fase da força externa e a amplitude e a fase da solução. Note que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$.
(b) Faça o retrato de fase da solução, ou seja, o gráfico de s' em função de s.

21. $F(t) = 3\cos(t/4)$
22. $F(t) = 3\cos 2t$
23. $F(t) = 3\cos 6t$
24. Um sistema mola-massa com uma mola dura (Problema 32 da Seção 3.7) sofre a ação de uma força externa periódica. Na ausência de amortecimento, suponha que o deslocamento da massa satisfaz o problema de valor inicial

$$s'' + s + \tfrac{1}{5}s^3 = \cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Seja $\omega = 1$ e gere, em um computador, a solução do problema dado. O sistema exibe batimento?
(b) Faça o gráfico da solução para diversos valores de ω entre 1/2 e 2. Descreva como a solução varia quando ω aumenta.

25. Suponha que o sistema do Problema 24 é modificado para incluir amortecimento e que o problema de valor inicial resultante é

$$s'' + \tfrac{1}{5}s' + s + \tfrac{1}{5}s^3 = \cos\omega t, \qquad s(0) = 0, \quad s'(0) = 0.$$

(a) Gere, em um computador, o gráfico da solução do problema dado para diversos valores de ω entre 1/2 e 2 e estime a amplitude R da resposta estado estacionário em cada caso.
(b) Usando os dados encontrados em (a), faça o gráfico de R em função de ω. Para que frequência ω a amplitude é máxima?
(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b) com os resultados correspondentes para a mola linear.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Existem muitos livros sobre vibrações mecânicas e circuitos elétricos. Um que trata de ambos é
Close, C. M., and Frederick,D. K., *Modeling andAnalysis of Dynamic Systems* (3rd ed.) (NewYork: Wiley, 2001).

Um livro clássico sobre vibrações mecânicas é
Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations* (4th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1956; New York: Dover, 1985).

Um livro de nível intermediário mais recente é
Thomson, W. T., *Theory of Vibrations with Applications* (5th ed.) (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1997).

Um livro elementar sobre circuitos elétricos é
Bobrow, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis* (New York: Oxford University Press, 1996).

CAPÍTULO

4

Equações Lineares de Ordem Mais Alta

A estrutura teórica e os métodos de resolução desenvolvidos no capítulo precedente para equações lineares de segunda ordem podem ser estendidos, diretamente, para equações lineares de terceira ordem e de ordem mais alta. Neste capítulo, vamos rever rapidamente essa generalização, apontando, em especial, os casos particulares em que aparecem fenômenos novos devido à grande variedade de situações que podem ocorrer para equações de ordem mais alta.

4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem *n*

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t). \tag{1}$$

Supomos que as funções $P_0, \ldots, P_n$ e G são funções reais e contínuas definidas em algum intervalo $I: \alpha < t < \beta$, e que P_0 nunca se anula nesse intervalo. Então, dividindo a Eq. (1) por $P_0(t)$, obtemos

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \tag{2}$$

O operador diferencial linear L de ordem n definido pela Eq. (2) é semelhante ao operador de segunda ordem definido no Capítulo 3. A teoria matemática associada à Eq. (2) é inteiramente análoga à teoria para equações lineares de segunda ordem; por essa razão, apenas enunciaremos os resultados para o problema de ordem n. As demonstrações da maioria dos resultados também são semelhantes às demonstrações para as equações de segunda ordem e são, em geral, deixadas como exercício.

Como a Eq. (2) envolve a n-ésima derivada de y em relação a t, serão necessárias, *grosso modo*, n integrações para se resolver a Eq. (2). Cada uma dessas integrações vai gerar uma constante arbitrária. Podemos esperar, portanto, que para obter uma única solução será preciso especificar n condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{3}$$

onde t_0 pode ser qualquer ponto no intervalo I e $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ é qualquer conjunto dado de constantes reais. O teorema a seguir, semelhante ao Teorema 3.2.1, garante que o problema de valor inicial (2), (3) tem solução e que ela é única.

Teorema 4.1.1 Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e g são contínuas em um intervalo aberto I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ da equação diferencial (2) que também satisfaz as condições iniciais (3). Essa solução existe em todo o intervalo I.

Não demonstraremos esse teorema aqui. No entanto, se os coeficientes $p_1, \ldots, p_n$ forem constantes, então podemos construir a solução do problema de valor inicial (2), (3) de modo semelhante ao que fizemos no Capítulo 3; veja as Seções de 4.2 a 4.4. Embora possamos encontrar a solução nesse caso, não saberemos se ela é única se não usarmos o Teorema 4.1.1. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada nos livros de Ince (Seção 3.32) e de Coddington (Capítulo 6).

A Equação Homogênea. Como no problema correspondente de segunda ordem, vamos discutir primeiro a equação homogênea

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \tag{4}$$

Se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4), segue, por cálculo direto, que a combinação linear

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t), \tag{5}$$

onde $c_1, \ldots, c_n$ são constantes arbitrárias, e também solução da Eq. (4). É natural, então, perguntar se todas as soluções da Eq. (4) podem ser expressas como uma combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$. Isso será verdade, independentemente das condições iniciais (3) dadas, se for possível escolher as constantes $c_1, \ldots, c_n$ de modo que a combinação linear (5) satisfaça as condições iniciais. Especificamente, para qualquer escolha do ponto t_0 em I e para qualquer escolha de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, precisamos ser capazes de determinar $c_1, \ldots, c_n$ de modo que as equações

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + \cdots + c_ny_n(t_0) &= y_0 \\ c_1y_1'(t_0) + \cdots + c_ny_n'(t_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

sejam satisfeitas. As Eqs. (6) podem ser resolvidas de maneira única para as constantes $c_1, \ldots, c_n$ desde que o determinante dos coeficientes não seja nulo. Por outro lado, se o determinante dos coeficientes for nulo então sempre é possível escolher valores de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ de modo que as Eqs. (6) não tenham solução. Portanto, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as Eqs. (6), para valores arbitrários de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, é que o wronskiano

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{7}$$

não se anule em $t = t_0$. Como t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I, é necessário e suficiente que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ não se anule em nenhum ponto do intervalo. Do mesmo modo que para equações de segunda ordem, pode-se mostrar que, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4), então $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ou é zero para todo t no intervalo I, ou nunca se anula aí; veja o Problema 20. Temos, portanto, o seguinte teorema:

Teorema 4.1.2 Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são contínuas no intervalo aberto I, se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4) e se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ para, pelo menos, um ponto t em I, então toda solução da Eq. (4) pode ser expressa como uma combinação linear das soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Um conjunto de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da Eq. (4) cujo wronskiano não se anula é chamado de **conjunto fundamental de soluções**. A existência de um conjunto fundamental de soluções pode ser demonstrada exatamente da mesma forma que para equações lineares de segunda ordem (veja o Teorema 3.2.5). Como todas as soluções da Eq. (4) são da forma (5), usamos o termo **solução geral** para nos referir a uma combinação linear arbitrária de qualquer conjunto fundamental de soluções da Eq. (4).

Dependência e Independência Lineares. Vamos explorar agora a relação entre conjuntos fundamentais de soluções e o conceito de independência linear, uma ideia central no estudo de álgebra linear. As funções

$f_1, f_2, \ldots, f_n$ são ditas **linearmente dependentes** em um intervalo I se existe um conjunto de constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$, nem todas nulas, tal que

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \cdots + k_n f_n(t) = 0 \tag{8}$$

para todo t em I. As funções $f_1, \ldots, f_n$ são ditas **linearmente independentes** em I se não forem linearmente dependentes aí.

EXEMPLO 1

Determine se as funções $f_1(t) = 1, f_2(t) = t$ e $f_3(t) = t^2$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes no intervalo $I: -\infty < t < \infty$.

Forme a combinação linear

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2,$$

e a iguale a zero para obter

$$k_1 + k_2 t + k_3 t^2 = 0. \tag{9}$$

Se a Eq. (9) for válida para todo t em I, então ela certamente será válida em três pontos distintos em I. Quaisquer três pontos servirão para nosso propósito, mas é conveniente escolher $t = 0, t = 1$ e $t = -1$. Calculando a Eq. (9) em cada um desses pontos, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} k_1 \qquad\quad &= 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Da primeira das Eqs. (10) observamos que $k_1 = 0$; das outras duas equações segue que $k_2 = k_3 = 0$ também. Então não existe conjunto de constantes k_1, k_2, k_3, nem todas nulas, para as quais a Eq. (9) seja válida em três pontos escolhidos, muito menos em todo I. Logo as funções dadas não são linearmente dependentes em I e, portanto, têm que ser linearmente independentes. De fato, elas são linearmente independentes em qualquer intervalo. Isso pode ser estabelecido como acabamos de fazer, possivelmente usando um conjunto diferente de três pontos.

EXEMPLO 2

Determine se as funções $f_1(t) = 1, f_2(t) = 2 + t, f_3(t) = 3 - t^2$ e $f_4(t) = 4t + t^2$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes em qualquer intervalo I.

Forme a combinação linear

$$\begin{aligned} k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + k_4 f_4(t) &= k_1 + k_2(2 + t) + k_3(3 - t^2) + k_4(4t + t^2) \\ &= (k_1 + 2k_2 + 3k_3) + (k_2 + 4k_4)t + (-k_3 + k_4)t^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Essa expressão é nula em todo um intervalo desde que

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \quad k_2 + 4k_4 = 0, \quad -k_3 + k_4 = 0.$$

Essas três equações com quatro incógnitas têm muitas soluções. Por exemplo, se $k_4 = 1$, então $k_3 = 1, k_2 = -4$ e $k_1 = 5$. Logo, as funções dadas são linearmente dependentes em qualquer intervalo.

O conceito de independência linear fornece uma caracterização alternativa do conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (4). Suponha que as funções $y_1, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4) em um intervalo I e considere a equação

$$k_1 y_1(t) + \cdots + k_n y_n(t) = 0. \tag{12}$$

Diferenciando repetidamente a Eq. (12), obtemos as $n - 1$ equações

$$\begin{aligned} k_1 y_1'(t) + \cdots + k_n y_n'(t) &= 0. \\ &\vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(t) + \cdots + k_n y_n^{(n-1)}(t) &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

O sistema consistindo nas Eqs. (12) e (13) é um sistema de n equações algébricas lineares para as n incógnitas $k_1, \ldots, k_n$. O determinante dos coeficientes desse sistema é o wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)(t)$ de $y_1, \ldots, y_n$. Isso nos leva ao teorema a seguir.

Teorema 4.1.3 Se $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (4)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

em um intervalo I, então $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ são linearmente independentes em I. Reciprocamente, se $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ são soluções da Eq. (4) linearmente independentes em I, então elas formam um conjunto fundamental de soluções em I.

Para demonstrar esse teorema, suponha primeiro que $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ seja um conjunto fundamental de soluções da Eq. (4) em I. Então o wronskiano $W(y_1, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ para todo t em I. Logo $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ não podem ser linearmente dependentes em I e, portanto, têm que ser linearmente independentes ali.

Para demonstrar a recíproca, sejam $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ linearmente independentes em I. Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, precisamos mostrar que seu wronskiano nunca se anula em I. Suponha que isso não seja verdade; então existe pelo menos um ponto t_0 onde o wronskiano é nulo. Nesse ponto o sistema (12), (13) tem uma solução não nula; vamos denotá-la por $k_1^*, \ldots, k_n^*$. Forme a combinação linear

$$\phi(t) = k_1^* y_1(t) + \cdots + k_n^* y_n(t). \tag{14}$$

Então $\phi(t)$ satisfaz o problema de valor inicial

$$L[y] = 0, \qquad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0. \tag{15}$$

A função ϕ satisfaz a equação diferencial porque é uma combinação linear de soluções; ela satisfaz as condições iniciais porque estas são simplesmente as equações no sistema (12), (13) calculadas em t_0. No entanto, a função $y(t) = 0$ para todo t em I também satisfaz este problema de valor inicial e, pelo Teorema 4.1.1, a solução é única. Logo $\phi(t) = 0$ para todo t em I. Em consequência, $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ são linearmente independentes em I, uma contradição. Então a hipótese de que existe um ponto onde o wronskiano se anula não é sustentável. Portanto, o wronskiano nunca se anula em I, como queríamos demonstrar.

Note que para um conjunto de funções $f_1, \ldots, f_n$ que não são soluções da Eq. (4), a recíproca no Teorema 4.1.3 não é necessariamente verdadeira. Elas podem ser linearmente independentes em I mesmo que seu wronskiano se anule em algum ponto, ou até em todos os pontos, mas com conjuntos diferentes de constantes $k_1, \ldots, k_n$ em pontos diferentes. Veja o Problema 25 para um exemplo.

A Equação Não Homogênea. Considere, agora, a equação não homogênea (2)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = g(t).$$

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções quaisquer da Eq. (2), segue imediatamente da linearidade do operador L que

$$L[Y_1 - Y_2](t) = L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Portanto, a diferença entre duas soluções quaisquer da equação não homogênea (2) é uma solução da equação homogênea (4). Como qualquer solução da equação homogênea pode ser expressa como uma combinação linear de um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, segue que qualquer solução da Eq. (2) pode ser escrita na forma

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + Y(t), \tag{16}$$

onde Y é alguma solução particular da equação não homogênea (2). A combinação linear (16) é chamada de solução geral da equação não homogênea (2).

Assim, o problema básico é determinar um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogênea (4). Se os coeficientes forem constantes, esse é um problema relativamente simples. Se os coeficientes não forem constantes, é necessário, em geral, usar métodos numéricos como os do Capítulo 8 ou métodos de expansão em série semelhantes aos do Capítulo 5. Esses últimos tendem a ficar cada vez mais complicados quando a ordem da equação aumenta.

O método de redução de ordem (Seção 3.4) também se aplica a equações lineares de ordem n. Se y_1 é uma solução da Eq. (4), então a substituição $y = v(t)y_1(t)$ leva a uma equação diferencial linear de ordem $n - 1$ para v' (veja o Problema 26 para o caso $n = 3$). No entanto, se $n \geq 3$, a equação reduzida é, pelo menos, de segunda ordem, e apenas em casos raros vai ser significativamente mais simples do que a equação original. Dessa forma, na prática a redução de ordem é raramente útil para equações de ordem maior do que dois.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 determine os intervalos nos quais existem, com certeza, soluções.

1. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$
2. $ty''' + (\operatorname{sen} t)y'' + 3y = \cos t$
3. $t(t-1)y^{(4)} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$
4. $y''' + ty'' + t^2 y' + t^3 y = \ln t$
5. $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$
6. $(x^2-4)y^{(6)} + x^2 y''' + 9y + 0$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10 determine se o conjunto de funções dado é linearmente dependente ou linearmente independente. Se for linearmente dependente, encontre uma relação linear entre os elementos do conjunto.

7. $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$
8. $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = 2t^2 + 1$, $f_3(t) = 3^2 t + t$
9. $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^2 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$, $f_4(t) = t^2 + t + 1$
10. $f_1(t) = 2t - 3$, $f_2(t) = t^3 + 1$, $f_3(t) = 2t^2 - t$, $f_4(t) = t^2 + t + 1$

Em cada um dos Problemas de 11 a 16 verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial e determine seu wronskiano.

11. $y''' + y' = 0$; 1, $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
12. $y^{(4)} + y'' = 0$; 1, t, $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$; e^t, e^{-t}, e^{-2t}
14. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0$; 1, t, e^{-t}, te^{-t}
15. $xy''' - y'' = 0$; 1, x, x^3
16. $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$; x, x^2, $1/x$

17. Mostre que $W(5, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t) = 0$ para todo t. Você pode obter esse resultado sem calcular diretamente o wronskiano?

18. Verifique que o operador diferencial definido por

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y$$

é um operador diferencial linear. Ou seja, mostre que

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2],$$

onde y_1 e y_2 são funções n vezes diferenciáveis e c_1, c_2 são constantes arbitrárias. Portanto, mostre que se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções de $L[y] = 0$, então a combinação linear $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ também é solução de $L[y] = 0$.

19. Seja L o operador diferencial linear definido por

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y,$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais.

(a) Encontre $L[t^n]$.

(b) Encontre $L[e^{rt}]$.

(c) Determine quatro soluções da equação $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$. Você acha que essas quatro soluções formam um conjunto fundamental de soluções? Por quê?

20. Neste problema, mostramos como generalizar o Teorema 3.2.6 (teorema de Abel) para equações de ordem maior. Vamos, primeiro, esboçar o procedimento para a equação de terceira ordem

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0.$$

Sejam y_1, y_2 e y_3 soluções dessa equação em um intervalo I.

(a) Se $W = W(y_1, y_2, y_3)$, mostre que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$

Sugestão: A derivada de um determinante 3×3 é a soma de três determinantes 3×3 obtidos derivando-se a primeira, a segunda e a terceira linha, respectivamente.

(b) Substitua y_1''', y_2''' e y_3''' a partir da equação diferencial; multiplique a primeira linha por p_3, a segunda por p_2 e some à última linha para obter

$$W' = -p_1(t)W.$$

(c) Mostre que

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)\, dt\right].$$

Logo, W ou é sempre igual a zero ou nunca é nulo em I.

(d) Generalize esse argumento para a equação de ordem n

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0$$

com soluções $y_1, \ldots, y_n$. Ou seja, estabeleça a fórmula de Abel

$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)\, dt\right]$$

para esse caso.

Para cada um dos Problemas de 21 a 24 use a fórmula de Abel (Problema 20) para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

21. $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$
22. $y^{(4)} + y = 0$
23. $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0$
24. $t^2y^{(4)} + ty''' + y'' - 4y = 0$

25. (a) Mostre que as funções $f(t) = t^2|t|$ e $g(t) = t^3$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$.
    (b) Mostre que $f(t)$ e $g(t)$ são linearmente independentes em $-1 < t < 1$.
    (c) Mostre que $W(f, g)(t)$ é zero para todo t em $-1 < t < 1$.
26. Mostre que se y_1 é uma solução de

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0,$$

então a substituição $y = y_1(t)v(t)$ nos leva à seguinte equação de segunda ordem para v':

$$y_1v''' + (3y_1' + p_1y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1y_1' + p_2y_1)v' = 0.$$

Nos Problemas 27 e 28 use o método de redução de ordem (Problema 26) para resolver a equação diferencial dada.

27. $(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2; \qquad y_1(t) = e^t$
28. $t^2(t + 3)y''' - 3t(t + 2)y'' + 6(1 + t)y' - 6y = 0, \quad t > 0; \qquad y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^3$

4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{1}$$

onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais. Do que sabemos sobre equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é natural esperar que $y = e^{rt}$ seja solução da Eq. (1) para valores apropriados de r. De fato,

$$L[e^{rt}] = e^{rt}(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n) = e^{rt}Z(r) \tag{2}$$

para todo r, onde

$$Z(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n. \tag{3}$$

Para os valores de r tais que $Z(r) = 0$, segue que $L[e^{rt}] = 0$ e $y = e^{rt}$ é uma solução da Eq. (1). O polinômio $Z(r)$ é chamado de **polinômio característico**, e a equação $Z(r) = 0$ é a **equação característica** da equação diferencial (1). Um polinômio de grau n tem n zeros,[1] digamos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, alguns dos quais podem ser iguais; podemos, portanto, escrever a equação característica na forma

[1]Uma pergunta que foi importante em matemática durante mais de 200 anos era se toda equação polinomial tinha pelo menos uma raiz. A resposta afirmativa a essa pergunta, que é o teorema fundamental da álgebra, foi dada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua dissertação de doutorado em 1799, embora sua demonstração não seja rigorosa o suficiente para os padrões atuais. Diversas outras demonstrações foram encontradas desde então, incluindo três pelo próprio Gauss. Hoje em dia, os alunos encontram o teorema fundamental da álgebra, muitas vezes, em um primeiro curso de variáveis complexas, onde pode ser demonstrado como consequência de algumas propriedades básicas de funções analíticas.

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n). \tag{4}$$

Raízes Reais e Distintas. Se as raízes da equação característica são reais e todas são diferentes, então temos n soluções distintas $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$ da Eq. (1). Se essas funções forem linearmente independentes, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}. \tag{5}$$

Um modo de estabelecer a independência linear de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$ é calcular seu wronskiano. Outra maneira está esquematizada no Problema 40.

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0. \tag{6}$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = -2, \qquad y'''(0) = -1 \tag{7}$$

e desenhe seu gráfico.

Supondo que $y = e^{rt}$, precisamos determinar r resolvendo a equação polinomial

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0. \tag{8}$$

As raízes dessa equação são $r_1 = 1, r_2 = -1, r_3 = 2$ e $r_4 = -3$. Portanto, a solução geral da Eq. (6) é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \tag{9}$$

As condições iniciais (7) exigem que $c_1, \ldots, c_4$ satisfaçam as quatro equações

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= -2, \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= -1. \end{aligned} \tag{10}$$

Resolvendo esse sistema de quatro equações algébricas lineares, encontramos

$$c_1 = \tfrac{11}{8}, \qquad c_2 = \tfrac{5}{12}, \qquad c_3 = -\tfrac{2}{3}, \qquad c_4 = -\tfrac{1}{8}.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{11}{8}e^t + \tfrac{5}{12}e^{-t} - \tfrac{2}{3}e^{2t} - \tfrac{1}{8}e^{-3t}. \tag{11}$$

O gráfico da solução está ilustrado na Figura 4.2.1.

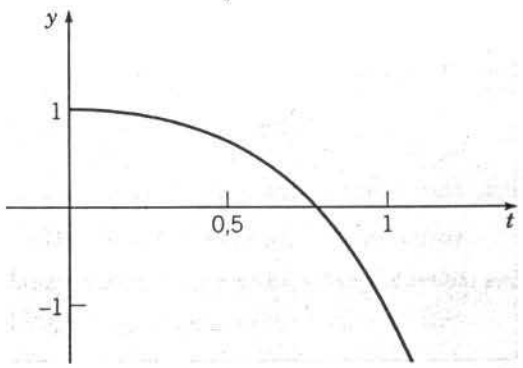


FIGURA 4.2.1 Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.

Como o Exemplo 1 ilustra, o procedimento para resolver uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes depende da obtenção das raízes de uma equação polinomial de ordem n associada. Se forem dadas condições iniciais, torna-se necessário resolver um sistema de n equações algébricas lineares para se determinar os valores apropriados das constantes $c_1, \ldots, c_n$. Embora cada

uma dessas tarefas se torne cada vez mais complicada à medida que n cresce, elas podem ser feitas, em geral, sem dificuldades com uma calculadora ou um computador.

Para polinômios de terceiro e quarto graus existem fórmulas,[2] análogas à fórmula para a equação de segundo grau, só que mais complicadas, que fornecem expressões exatas para as raízes. Algoritmos para encontrar raízes estão disponíveis em calculadores científicas e computadores. Algumas vezes eles estão incluídos no programa que resolve equações diferenciais, de modo que o processo de fatorar o polinômio característico fica escondido e a solução da equação diferencial é produzida automaticamente.

Se você tiver que fatorar o polinômio característico manualmente, eis um resultado que ajuda às vezes. Suponha que o polinômio

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{12}$$

tem coeficientes inteiros. Se $r = p/q$ é uma raiz racional, onde p e q não têm fatores comuns, então p tem que ser um fator de a_n e q tem que ser um fator de a_0. Por exemplo, na Eq. (8), os fatores de a_0 são ± 1 e os de a_n são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Dessa forma, as únicas raízes racionais possíveis para essa equação são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Testando essas raízes possíveis, encontramos que 1, -1, 2 e -3 são raízes de fato. Nesse caso não existem outras raízes, já que o polinômio tem grau quatro. Se algumas raízes forem irracionais ou complexas, como é o caso em geral, então esse processo não vai encontrá-las, mas pelo menos o grau do polinômio pode ser reduzido dividindo-o pelos fatores correspondentes às raízes racionais.

Se as raízes da equação característica forem reais e distintas, vimos que a solução geral (5) é, simplesmente, uma soma de funções exponenciais. Para valores grandes de t a solução será dominada pela parcela correspondente à raiz algebricamente maior. Se essa raiz for positiva, as soluções se tornarão exponencialmente ilimitadas, enquanto se a raiz for negativa as soluções tenderão exponencialmente a zero. Finalmente, se a maior raiz for nula, as soluções tenderão a uma constante não nula quando t se tornar muito grande. É claro que para determinadas condições iniciais os coeficientes da parcela que seria a dominante podem ser nulos; nesse caso a natureza da solução para valores grandes de t será determinada pela maior raiz presente na solução.

Raízes Complexas. Se a equação característica tiver raízes complexas, elas têm que aparecer em pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, já que os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são reais. Desde que nenhuma raiz se repita, a solução geral da Eq. (1) ainda é da forma (4). No entanto, da mesma forma que para equações de segunda ordem (Seção 3.3), podemos substituir as soluções complexas $e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $e^{(\lambda-i\mu)t}$ pela soluções reais

$$e^{\lambda t}\cos \mu t, \qquad e^{\lambda t}\operatorname{sen} \mu t \tag{13}$$

obtidas como as partes real e imaginária de $e^{(\lambda+i\mu)t}$. Dessa forma, mesmo que algumas das raízes da equação característica sejam complexas, ainda é possível expressar a solução geral da Eq. (1) como combinação linear de soluções reais.

EXEMPLO 2

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} - y = 0. \tag{14}$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 7/2, \qquad y'(0) = -4, \qquad y''(0) = 5/2, \qquad y'''(0) = -2 \tag{15}$$

e desenhe seu gráfico.

Substituindo y por e^{rt}, vemos que a equação característica é

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Logo, as raízes são $r = 1$, $r = -1$, $r = i$ e $r = -i$, e a solução geral da Eq. (14) é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t.$$

[2] O método para resolver equações de terceiro grau foi descoberto, aparentemente, por Scipione dal Ferro (1465-1526) em torno de 1500, embora tenha sido publicado primeiro em 1545 por Girolamo Cardano (1501-1576) em sua obra *Ars Magna*. Este livro contém, também, um método para resolver equações de quarta ordem, cuja autoria é atribuída, por Cardano, a seu aluno Ludovico Ferrari (1522-1565). O problema de existência de fórmulas análogas para as raízes de equações de ordem mais alta permaneceu em aberto por mais de dois séculos, até 1826, quando Niels Abel mostrou que não podem existir fórmulas para a solução geral de equações polinomiais de grau cinco ou maior. Uma teoria mais geral foi desenvolvida por Evariste Galois (1811-1832) em 1831, mas, infelizmente, não se tornou amplamente conhecida por muitas décadas.

Se impusermos as condições iniciais (15), encontraremos

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 1/2, \quad c_4 = -1;$$

assim, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = 3e^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t - \operatorname{sen} t. \tag{16}$$

O gráfico desta solução está ilustrado na Figura 4.2.2.

Observe que as condições iniciais (15) fazem com que o coeficiente c_1 da parcela exponencial crescente na solução geral seja zero. Essa parcela, portanto, está ausente na solução (16), que descreve um decaimento exponencial para uma oscilação estacionária, como mostra a Figura 4.2.2. No entanto, se as condições iniciais forem ligeiramente alteradas então c_1 não será, provavelmente, nulo, e a natureza da solução vai mudar tremendamente. Por exemplo, se as três primeiras condições iniciais permanecem iguais, mas o valor de $y'''(0)$ muda de -2 para $-15/8$, então a solução do problema de valor inicial se torna

$$y = \tfrac{1}{32}e^{t} + \tfrac{95}{32}e^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t - \tfrac{17}{16}\operatorname{sen} t. \tag{17}$$

Os coeficientes na Eq. (17) diferem pouco dos da Eq. (16), mas a parcela que cresce exponencialmente, mesmo com o coeficiente relativamente pequeno 1/32, domina por completo a solução quando t se torna maior do que, ou em torno de, 4 ou 5. Isso pode ser visto claramente na Figura 4.2.3, que mostra o gráfico das duas soluções (16) e (17).

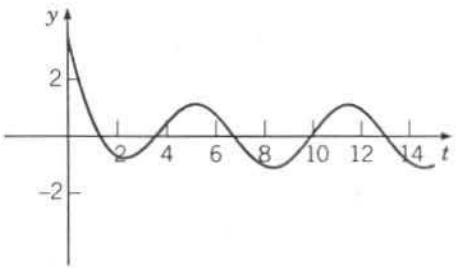


FIGURA 4.2.2 Um gráfico da solução (16).

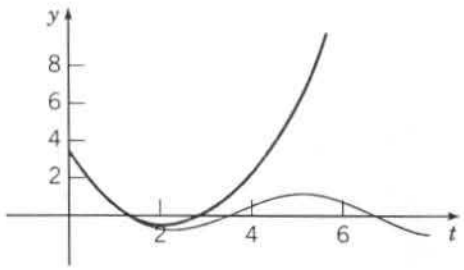


FIGURA 4.2.3 Gráficos das soluções (16) (curva mais fina) e (17) (curva mais grossa).

Raízes Repetidas. Se as raízes da equação característica não forem distintas — ou seja, se algumas das raízes forem repetidas — então a solução (5) não é, obviamente, a solução geral da Eq. (1). Lembre-se de que se r_1 for uma raiz repetida para a equação linear de segunda ordem $a_0y'' + a_1y' + a_0y = 0$, então as duas soluções linearmente independentes são e^{r_1t} e te^{r_1t}. Para uma equação de ordem n, se uma raiz de $Z(r) = 0$, digamos $r = r_1$, tem multiplicidade s (onde $s \le n$), então

$$e^{r_1t}, \quad te^{r_1t}, \quad t^2e^{r_1t}, \quad \ldots, \quad t^{s-1}e^{r_1t} \tag{18}$$

são as soluções correspondentes da Eq. (1); veja o Problema 41 para uma demonstração desta afirmação.

Se uma raiz complexa $\lambda + i\mu$ aparece repetida s vezes, a raiz complexa conjugada $\lambda - i\mu$ também aparece s vezes. Correspondendo a essas $2s$ soluções complexas, podemos encontrar $2s$ soluções reais observando que as partes real e imaginária de $e^{(\lambda+i\mu)t}, te^{(\lambda+i\mu)t}, \ldots, t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$ também são soluções linearmente independentes:

$$e^{\lambda t}\cos\mu t, \quad e^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t, \quad te^{\lambda t}\cos\mu t, \quad te^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t,$$
$$\ldots, \quad t^{s-1}e^{\lambda t}\cos\mu t, \quad t^{s-1}e^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t.$$

Portanto, a solução geral da Eq. (1) sempre pode ser expressa como uma combinação linear de n soluções reais. Considere o exemplo a seguir.

EXEMPLO 3

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \tag{19}$$

A equação característica é

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

As raízes são $r = i, i, -i, -i$, e a solução geral da Eq. (19) é

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 t \cos t + c_4 t \operatorname{sen} t.$$

Na determinação das raízes de uma equação característica pode ser necessário calcular raízes cúbicas, ou quartas, ou até mesmo raízes de ordem maior de um número (que pode ser complexo). Em geral, a maneira mais conveniente de fazer isso é usando a fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ e as regras algébricas dadas na Seção 3.3. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 4 Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + y = 0. \tag{20}$$

A equação característica é

$$r^4 + 1 = 0.$$

Para resolver a equação precisamos encontrar as raízes quartas de -1. Mas, considerado como um número complexo, -1 é $-1 + 0i$. Tem módulo 1 e ângulo polar π. Então,

$$-1 = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = e^{i\pi}.$$

Além disso, o ângulo está determinado a menos de um múltiplo de 2π. Assim,

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

onde m é zero ou qualquer inteiro positivo ou negativo. Logo,

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

As raízes quartas de -1 são obtidas fazendo-se $m = 0, 1, 2$ e 3; elas são

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

É fácil verificar que para qualquer outro valor de m obtemos uma dessas quatro raízes. Por exemplo, correspondendo a $m = 4$, obtemos $(1 + i)/\sqrt{2}$. A solução geral da Eq. (20) é

$$y = e^{t/\sqrt{2}}\left(c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{2}}\right) + e^{-t/\sqrt{2}}\left(c_3 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_4 \operatorname{sen} \frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{21}$$

Para concluir, observamos que o problema de encontrar todas as raízes de uma equação polinomial pode não ser inteiramente fácil, mesmo com a ajuda de um computador. Por exemplo, pode ser difícil determinar se duas raízes são iguais ou se estão, simplesmente, muito próximas. Lembre-se de que a forma da solução geral é diferente nesses dois casos.

Se as constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na Eq. (1) forem números complexos, a solução da Eq. (1) ainda é da forma (4). Nesse caso, no entanto, as raízes da equação característica são em geral complexas e não é mais verdade que o complexo conjugado de uma raiz é também raiz. As soluções correspondentes tomam valores complexos.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 expresse o número complexo dado na forma $R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = Re^{i\theta}$.

1. $1 + i$
2. $-1 + \sqrt{3}i$
3. -3
4. $-i$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $-1 - i$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10 siga o procedimento ilustrado no Exemplo 4 para determinar as raízes indicadas do número complexo dado.

7. $1^{1/3}$
8. $(1 - i)^{1/2}$
9. $1^{1/4}$
10. $[2(\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)]^{1/2}$

Em cada um dos Problemas de 11 a 28 encontre a solução geral da equação diferencial dada.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
14. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{(6)} + y = 0$
16. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
17. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$
18. $y^{(6)} - y'' = 0$
19. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$
20. $y^{(4)} - 8y' = 0$
21. $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$
22. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
23. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$
24. $y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$
25. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$
26. $y^{(4)} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0$
27. $12y^{(4)} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0$
28. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$

Em cada um dos Problemas de 29 a 36 encontre a solução do problema de valor inicial dado e faça seu gráfico. Como a solução se comporta quando $t \to \infty$?

29. $y''' + y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$
30. $y^{(4)} + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 0$
31. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0; \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 0, \quad y'''(1) = 0$
32. $y''' - y'' + y' - y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = -2$
33. $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0$
34. $4y''' + y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1$
35. $6y''' + 5y'' + y' = 0; \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 0$
36. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 3$

37. Mostre que a solução geral de $y^{(4)} - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cosh t + c_4 \operatorname{senh} t.$$

Determine a solução que satisfaça as condições iniciais $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 1$. Por que é conveniente usar as soluções cosh t e senh t, em vez de e^t e e^{-t}?

38. Considere a equação $y^{(4)} - y = 0$.
    (a) Use a fórmula de Abel [Problema 20(d) da Seção 4.1] para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções da equação dada.
    (b) Determine o wronskiano das soluções e^t, e^{-t}, cos t e sen t.
    (c) Determine o wronskiano das soluções cosh t, senh t, cos t e sen t.
39. Considere o sistema mola-massa ilustrado na Figura 4.2.4, consistindo em duas massas unitárias suspensas de molas com constantes 3 e 2, respectivamente. Suponha que não haja amortecimento no sistema.
    (a) Mostre que os deslocamentos u_1 e u_2 das massas a partir de suas respectivas posições de equilíbrio satisfazem as equações

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \qquad u_2'' + 2u_2 = 2u_1. \tag{i}$$

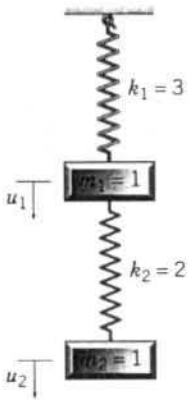


FIGURA 4.2.4 Um sistema com duas molas e duas massas.

    (b) Resolva a primeira das Eqs. (i) para u_2 e substitua o resultado na segunda equação, obtendo, assim, a seguinte equação de quarta ordem para u_1:

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0. \tag{ii}$$

Encontre a solução geral da Eq. (ii).

(c) Suponha que as condições iniciais sejam

$$u_1(0) = 1, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 2, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iii}$$

Use a primeira das Eqs. (i) e as condições iniciais (iii) para obter os valores de $u_1''(0)$ e de $u_1'''(0)$. Depois mostre que a solução da Eq. (ii) que satisfaz as quatro condições iniciais em u_1 é $u_1(t) = \cos t$. Mostre que a solução correspondente u_2 é $u_2(t) = 2\cos t$.

(d) Suponha, agora, que as condições iniciais sejam

$$u_1(0) = -2, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iv}$$

Proceda como no item (c) para mostrar que as soluções correspondentes são $u_1(t) = -2\cos\sqrt{6}\,t$ e $u_2(t) = \cos\sqrt{6}\,t$.

(e) Observe que as soluções obtidas nos itens (c) e (d) descrevem dois modos de vibração distintos. No primeiro, a frequência do movimento é 1 e as duas massas movem-se em fase, ambas se movendo para cima ou para baixo, juntas; a segunda massa se move duas vezes mais rápido do que a primeira. O segundo movimento tem frequência $\sqrt{6}$ e as massas se movem fora de fase, uma em relação à outra, uma movendo-se para baixo enquanto a outra se move para cima e vice-versa. Nesse modo, a primeira massa se move duas vezes mais rápido do que a segunda. Para outras condições iniciais que não são proporcionais à Eq. (iii) nem à (iv), o movimento das massas é uma combinação desses dois modos de vibração.

40. Esquematizamos, neste problema, um modo de mostrar que, se $r_1, \ldots, r_n$ são reais e distintos, então $e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}$ são linearmente independentes em $-\infty < t < \infty$. Para fazer isso, vamos considerar a relação linear

$$c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_n e^{r_n t} = 0, \qquad -\infty < t < \infty \tag{i}$$

e mostrar que todas as constantes são nulas.

(a) Multiplique a Eq. (i) por $e^{-r_1 t}$ e derive em relação a t obtendo, assim,

$$c_2(r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)t} + \cdots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n - r_1)t} = 0.$$

(b) Multiplique o resultado do item (a) por $e^{-(r_2 - r_1)t}$ e derive em relação a t para obter

$$c_3(r_3 - r_2)(r_3 - r_1(e^{(r_3 - r_2)t} + \cdots + c_n(r_n - r_2)(r_n - r_1)e^{(r_n - r_2)t} = 0.$$

(c) Continue o procedimento iniciado nos itens (a) e (b) obtendo, finalmente.

$$c_n(r_n - r_{n-1}) \cdots (r_n - r_1)e^{(r_n - r_{n-1})t} = 0.$$

Logo, $c_n = 0$ e, portanto,

$$c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} t} = 0.$$

(d) Repita o argumento precedente para mostrar que $c_{n-1} = 0$. De maneira análoga, segue que $c_{n-2} = \ldots = c_1 = 0$. Portanto, as funções $e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}$ são linearmente independentes.

41. Neste problema indicamos um modo de mostrar que se $r = r_1$ é uma raiz de multiplicidade s do polinômio característico $Z(r)$, então $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1 t}$ são soluções da Eq. (1). Este problema estende para equações de ordem n o método para equações de segunda ordem dado no Problema 22 da Seção 3.4. Começamos da Eq. (2) no texto

$$L[e^{rt}] = e^{rt}Z(r) \tag{i}$$

e diferenciamos repetidas vezes em relação a r, fazendo $r = r_1$ depois de cada diferenciação.

(a) Note que se r_1 é uma raiz de multiplicidade s então $Z(r) = (r - r_1)^s q(r)$, onde $q(r)$ é um polinômio de grau $n - s$ e $q(r_1) \neq 0$. Mostre que $Z(r_1), Z'(r_1), \ldots, Z^{(s-1)}(r_1)$ são todos nulos, mas $Z^s(r_1) \neq 0$.

(b) Diferenciando a Eq. (i) diversas vezes em relação a r, mostre que

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right] = L[te^{rt}],$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}}L[e^{rt}] = L[t^{s-1}e^{rt}].$$

(c) Mostre que $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1 t}$ são soluções da Eq. (1).

4.3 O Método dos Coeficientes Indeterminados

Uma solução particular Y da equação linear não homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = g(t) \tag{1}$$

pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados*, desde que $g(t)$ tenha uma forma apropriada. Embora o método dos coeficientes indeterminados não seja tão geral quanto o método de variação dos parâmetros descrito na próxima seção, é muito mais fácil de usar, em geral, quando aplicável.

Como no caso de equações lineares de segunda ordem, quando o operador diferencial linear com coeficientes constantes L é aplicado a um polinômio $A_0t^m + A_1t^{m-1} + \ldots + A_m$, a uma função exponencial $e^{\alpha t}$, a uma função seno sen βt ou a uma função cosseno cos βt, o resultado é um polinômio, uma função exponencial ou uma combinação linear de funções seno e cosseno, respectivamente. Logo, quando $g(t)$ é uma soma de polinômios, exponenciais, senos e cossenos ou um produto de tais funções, esperamos que seja possível encontrar $Y(t)$ através de uma escolha conveniente de combinações de polinômios, exponenciais etc. multiplicadas por um número de constantes indeterminadas. As constantes são, então, determinadas de modo que a Eq. (1) seja satisfeita.

A diferença principal em utilizar este método para equações de ordem mais alta vem do fato de que as raízes da equação polinomial característica podem ter multiplicidade maior do que 2. Em consequência, pode ser necessário multiplicar as parcelas propostas para a parte não homogênea da solução por potências mais altas de t de modo a obter funções diferentes das correspondentes à solução da equação homogênea associada. Os próximos exemplos ilustram isso. Nesses exemplos omitimos muitos passos algébricos diretos, pois nosso objetivo principal é mostrar como chegar à forma correta da pretensa solução.

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral de

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t. \tag{2}$$

O polinômio característico para a equação homogênea associada à Eq. (2) é

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r-1)^3,$$

de modo que a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t. \tag{3}$$

Para encontrar uma solução particular $Y(t)$ da Eq. (2), começamos supondo que $Y(t) = Ae^t$. No entanto, como e^t, te^t e t^2e^t são todas soluções da equação homogênea, precisamos multiplicar nossa escolha inicial por t^3. Assim, nossa hipótese final é supor que $Y(t) = At^3e^t$, onde A é um coeficiente indeterminado. Para encontrar o valor correto de A, diferenciamos $Y(t)$ três vezes, usamos esses resultados para substituir y e suas derivadas na Eq. (2) e juntamos os termos correspondentes na equação resultante. Dessa maneira, obtemos

$$6Ae^t = 4e^t.$$

Portanto, $A = \frac{2}{3}$ e a solução particular é

$$Y(t) = \tfrac{2}{3}t^3e^t. \tag{4}$$

A solução geral da Eq. (2) é a soma de $y_c(t)$ da Eq. (3) e $Y(t)$ da Eq. (4), ou seja

$$y = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \tfrac{2}{3}t^3e^t.$$

EXEMPLO 2

Encontre uma solução particular da equação

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3\operatorname{sen} t - 5\cos t. \tag{5}$$

Vimos, no Exemplo 3 da Seção 4.2, que a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3t\cos t + c_4t\operatorname{sen} t, \tag{6}$$

correspondendo às raízes $r = i, i, -i, -i$ da equação característica. Nossa hipótese inicial para uma solução particular é $Y(t) = A$ sen $t + B$ cos t, mas precisamos multiplicar essa escolha por t^2 para torná-la diferente de todas

*Também conhecido como *método dos coeficientes a determinar*. (N.T.)

as soluções da equação homogênea. Nossa hipótese final é, então,

$$Y(t) = At^2 \operatorname{sen} t + Bt^2 \cos t.$$

A seguir, diferenciamos $Y(t)$ quatro vezes, substituímos na equação diferencial (4) e juntamos os termos correspondentes, obtendo, finalmente,

$$-8A \operatorname{sen} t - 8B \cos t = 3 \operatorname{sen} t - 5 \cos t.$$

Assim, $A = -\frac{3}{8}$, $B = \frac{5}{8}$, e a solução particular da Eq. (4) é

$$Y(t) = -\tfrac{3}{8}t^2 \operatorname{sen} t + \tfrac{5}{8}t^2 \cos t. \tag{7}$$

Se $g(t)$ for uma soma de diversas parcelas, é mais fácil, muitas vezes, calcular separadamente a solução particular correspondente a cada parcela que compõe $g(t)$. Como para equações de segunda ordem, a solução particular do problema completo é a soma das soluções particulares dos problemas componentes. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

EXEMPLO 3 Encontre uma solução particular de

$$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}. \tag{8}$$

Vamos resolver primeiro a equação homogênea. A equação característica é $r^3 - 4r = 0$ e as raízes são $0, \pm 2$; portanto,

$$y_c(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}.$$

Podemos escrever uma solução particular da Eq. (8) como uma soma das soluções particulares das equações diferenciais

$$y''' - 4y' = t, \qquad y''' - 4y' = 3\cos t, \qquad y''' - 4y' = e^{-2t}.$$

Nossa escolha inicial para uma solução particular $Y_1(t)$ da primeira equação é $A_0 t + A_1$, mas como uma constante é solução da equação homogênea, multiplicamos por t. Assim,

$$Y_1(t) = t(A_0 t + A_1).$$

Para a segunda equação escolhemos

$$Y_2(t) = B\cos t + C \operatorname{sen} t,$$

e não há necessidade de modificar essa escolha inicial, já que $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$ não são soluções da equação homogênea. Finalmente, para a terceira equação, como e^{-2t} é uma solução da equação homogênea, supomos que

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}.$$

As constantes são determinadas substituindo-se as escolhas nas equações diferenciais individuais; elas são $A_0 = -\frac{1}{8}$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $C = -\frac{3}{5}$ e $E = \frac{1}{8}$. Portanto, uma solução particular da Eq. (8) é

$$Y(t) = -\tfrac{1}{8}t^2 - \tfrac{3}{5}\operatorname{sen} t + \tfrac{1}{8}te^{-2t}. \tag{9}$$

Você deve ter em mente que a quantidade de álgebra necessária para se calcular os coeficientes pode ser bem grande para equações de ordem mais alta, especialmente se o termo não homogêneo for complicado, ainda que moderadamente. Um sistema de álgebra computacional pode ser extremamente útil na execução desses cálculos algébricos.

O método de coeficientes indeterminados pode ser usado sempre que for possível inferir a forma correta de $Y(t)$. No entanto, isso é impossível, em geral, para equações diferenciais que não têm coeficientes constantes ou que contêm termos não homogêneos diferentes dos descritos anteriormente. Para problemas mais complicados podemos usar o método de variação dos parâmetros, que será discutido na próxima seção.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8 determine a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$
2. $y^{(4)} - y = 3t + \cos t$
3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$
4. $y''' - y' = 2\operatorname{sen} t$
5. $y^{(4)} - 4y'' = t^2 + e^t$
6. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$
7. $y^{(6)} + y''' = t$
8. $y^{(4)} + y''' = \operatorname{sen} 2t$

Em cada um dos Problemas de 9 a 12 encontre a solução do problema de valor inicial dado. Depois faça um gráfico da solução.

9. $y''' + 4y' = t; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
10. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3t + 4; \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 1$
11. $y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}, \quad y''(0) = -\frac{3}{2}$
12. $y^{(4)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12\operatorname{sen} t - e^{-t}; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$

Em cada um dos Problemas de 13 a 18 determine uma forma adequada para $Y(t)$ se for utilizado o método dos coeficientes indeterminados. Não calcule as constantes.

13. $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$
14. $y''' - y' = te^{-t} + 2\cos t$
15. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t + \operatorname{sen} t$
16. $y^{(4)} + 4y'' = \operatorname{sen} 2t + te^t + 4$
17. $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = t^2 + 4 + t\operatorname{sen} t$
18. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^t + 2te^{-t} + e^{-t}\operatorname{sen} t$

19. Considere a equação diferencial linear não homogênea de ordem n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(t), \tag{i}$$

onde $a_0, \ldots, a_n$ são constantes. Verifique que se $g(t)$ tiver a forma

$$e^{\alpha t}(b_0 t^m + \cdots + b_m),$$

então a substituição $y = e^{\alpha t} v(t)$ reduz a Eq. (i) à forma

$$k_0 v^{(n)} + k_1 v^{(n-1)} + \cdots + k_n v = b_0 t^m + \cdots + b_m, \tag{ii}$$

onde $k_0, \ldots, k_n$ são constantes. Determine k_0 e k_n em função dos a_i e de α. Assim, o problema de determinar uma solução particular da equação original é reduzido ao problema mais simples de determinar uma solução particular de uma equação com coeficientes constantes e contendo um polinômio como termo não homogêneo.

O Método dos Aniquiladores. Nos Problemas de 20 a 22 consideramos outra maneira de chegar a uma forma adequada para $Y(t)$ para usar no método dos coeficientes indeterminados. O procedimento baseia-se na observação de que as funções exponenciais, polinomiais ou senoidais (ou somas e produtos de tais funções) podem ser consideradas como soluções de certas equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes. É conveniente usar o símbolo D para d/dt. Então, por exemplo, e^{-t} é uma solução de $(D + 1)y = 0$; diz-se que o operador diferencial $D + 1$ *aniquila*, ou é um *aniquilador* de, e^{-t}. Analogamente, $D^2 + 4$ é um aniquilador de sen $2t$ ou cos $2t$, $(D - 3)^2 = D^2 - 6D + 9$ é um aniquilador de e^{3t} ou te^{3t}, e assim por diante.

20. Mostre que os operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes comutam. Ou seja, mostre que

$$(D - a)(D - b)f = (D - b)(D - a)f$$

quaisquer que sejam a função duas vezes diferenciável f e as constantes a e b. O resultado pode ser imediatamente estendido a qualquer número finito de fatores.

21. Considere o problema de encontrar a forma da solução particular $Y(t)$ de

$$(D - 2)^3(D + 1)Y = 3e^{2t} - te^{-t}, \tag{i}$$

onde a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação está escrita de uma forma que corresponde à fatoração do polinômio característico.

(a) Mostre que $D - 2$ e $(D + 1)^2$ são aniquiladores, respectivamente, das parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) e que o operador composto $(D - 2)(D + 1)^2$ aniquila ambas as parcelas simultaneamente.

(b) Aplique o operador $(D - 2)(D + 1)^2$ à Eq. (i) e use o resultado do Problema 20 para obter

$$(D - 2)^4(D + 1)^3 Y = 0. \tag{ii}$$

Logo, Y é uma solução da equação homogênea (ii). Resolvendo a Eq. (ii), mostre que

$$Y(t) = c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3t^2e^{2t} + c_4t^3e^{2t} + c_5e^{-t} + c_6te^{-t} + c_7t^2e^{-t}, \tag{iii}$$

onde $c_1, \ldots, c_7$ são constantes, ainda indeterminadas.

(c) Note que $e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t}$ e e^{-t} são soluções da equação homogênea associada à Eq. (i); portanto, essas expressões não servem para resolver a equação não homogênea. Escolha, então, c_1, c_2, c_3 e c_5 como zero na Eq. (iii), de modo que

$$Y(t) = c_4t^3e^{2t} + c_6te^{-t} + c_7t^2e^{-t}. \tag{iv}$$

Essa é a forma da solução particular Y da Eq. (i). Os valores dos coeficientes c_4, c_6 e c_7 podem ser encontrados usando-se a Eq. (iv) na equação diferencial (i).

Resumo. Suponha que

$$L(D)y = g(t), \tag{v}$$

onde $L(D)$ é um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $g(t)$ é uma soma ou produto de funções exponenciais, polinomiais ou senoidais. Para encontrar a forma da solução particular da Eq. (v), você pode proceder da seguinte maneira:

(a) Encontre um operador diferencial $H(D)$ com coeficientes constantes que aniquila $g(t)$, ou seja, um operador tal que $H(D)g(t) = 0$.

(b) Aplique $H(D)$ à Eq. (v), obtendo

$$H(D)L(D)y = 0, \tag{vi}$$

que é uma equação homogênea de ordem maior.

(c) Resolva a Eq. (vi).

(d) Elimine da solução encontrada em (c) os termos que também aparecem na solução de $L(D)y = 0$. Os termos restantes constituem a forma correta da solução particular para a Eq. (v).

22. Use o método dos aniquiladores para encontrar a forma de uma solução particular $Y(t)$ para cada uma das equações nos Problemas de 13 a 18. Não calcule os coeficientes.

4.4 O Método de Variação dos Parâmetros

O método de variação dos parâmetros para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear não homogênea de ordem n

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t) \tag{1}$$

é uma extensão direta do método para equações diferenciais de segunda ordem (veja a Seção 3.6). Como antes, para se usar o método de variação de parâmetros é necessário, primeiro, resolver a equação diferencial homogênea associada. Isso pode ser difícil, em geral, a menos que os coeficientes sejam constantes. No entanto, o método de variação dos parâmetros é mais geral do que o método de coeficientes indeterminados, pois nos leva a uma expressão para a solução particular para *qualquer* função contínua g, enquanto o método dos coeficientes indeterminados fica restrito, na prática, a uma classe limitada de funções g.

Suponha, então, que conhecemos um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogênea. Então, a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \cdots + c_ny_n(t). \tag{2}$$

O método de variação dos parâmetros para determinar uma solução particular da Eq. (1) depende da possibilidade de se determinar n funções $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tais que $Y(t)$ seja da forma

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t). \tag{3}$$

Como precisamos determinar n funções, teremos que especificar n condições. É claro que uma dessas é que Y satisfaça a Eq. (1). As outras $n - 1$ condições são escolhidas de modo a tornar os cálculos os mais simples possível. Como não podemos esperar uma simplificação na determinação de Y se tivermos que resolver equações diferenciais de ordem alta para $u_1, \ldots, u_n$, é natural impor condições que suprimam as parcelas contendo as derivadas de ordem mais alta de $u_1, \ldots, u_n$. Da Eq. (3), obtemos

$$Y' = (u_1y_1' + u_2y_2' + \cdots + u_ny_n') + (u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n), \tag{4}$$

onde omitimos a variável independente t, da qual dependem todas as funções na Eq. (4). Então, a primeira condição que impomos é que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 + \cdots + u_n'y_n = 0. \tag{5}$$

Continuando esse processo de maneira semelhante até a derivada $n-1$ de Y, obtemos

$$Y^{(m)} = u_1y_1^{(m)} + u_2y_2^{(m)} + \cdots + u_ny_n^{(m)}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{6}$$

e as $n-1$ condições seguintes sobre as funções $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_1'y_1^{(m-1)} + u_2'y_2^{(m-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(m-1)} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

A n-ésima derivada de Y é

$$Y^{(n)} = (u_1y_1^{(n)} + \cdots + u_ny_n^{(n)}) + (u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)}). \tag{8}$$

Finalmente, impomos a condição que Y tem que ser solução da Eq. (1). Usando as derivadas de Y dadas pelas Eqs. (6) e (8), juntando termos semelhantes e usando o fato de que $L[y_i] = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos

$$u_1'y_1^{(n-1)} + u_2'y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} = g. \tag{9}$$

A Eq. (9), junto com as $n-1$ Eqs. (7), nos dá n equações algébricas lineares não homogêneas simultâneas para $u_1', u_2', \ldots, u_n'$:

$$\begin{aligned}
y_1u_1' + y_2u_2' + \cdots + y_nu_n' &= 0,\\
y_1'u_1' + y_2'u_2' + \cdots + y_n'u_n' &= 0,\\
y_1''u_1' + y_2''u_2' + \cdots + y_n''u_n' &= 0,\\
&\vdots\\
y_1^{(n-1)}u_1' + \cdots + y_n^{(n-1)}u_n' &= g.
\end{aligned} \tag{10}$$

O sistema (10) é um sistema algébrico linear para as quantidades desconhecidas $u_1', \ldots, u_n'$. Resolvendo esse sistema e integrando as expressões resultantes, você pode obter os coeficientes $u_1, \ldots, u_n$. Uma condição suficiente para a existência de uma solução do sistema de Eqs. (10) é que o determinante dos coeficientes não seja nulo para cada valor de t. No entanto, o determinante dos coeficientes é exatamente $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, que nunca se anula, já que $y_1, \ldots, y_n$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Portanto, é possível determinar $u_1', \ldots, u_n'$. Usando a regra de Cramer[3], podemos escrever a solução do sistema de Eqs. (10) na forma

$$u_m'(t) = \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Aqui, $W(t) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t)$ e W_m é o determinante obtido de W substituindo-se a m-ésima coluna pela coluna $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Com essa notação, uma solução particular da Eq. (1) é dada por

$$Y(t) = \sum_{m=1}^{n} y_m(t) \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)W_m(s)}{W(s)}\, ds, \tag{12}$$

onde t_0 é arbitrário. Embora o procedimento seja bastante direto, os cálculos envolvidos na determinação de $Y(t)$ pela Eq. (12) se tornam cada vez mais complicados quando n aumenta. Em alguns casos, os cálculos podem ser um pouco simplificados usando-se a identidade de Abel (Problema 20 da Seção 4.1)

$$W(t) = W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)\, dt\right].$$

A constante c pode ser determinada calculando-se W em algum ponto conveniente.

[3]O crédito da regra de Cramer é dado a Gabriel Cramer (1704-1752), professor na Academia de Calvin em Genebra, que publicou a regra em uma forma geral (mas sem demonstração) em 1750. Para sistemas pequenos, o resultado já era conhecido antes.

EXEMPLO 1

Sabendo que $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$ e $y_3(t) = e^{-t}$ são soluções da equação homogênea associada a

$$y''' - y'' - y' + y = g(t), \tag{13}$$

determine uma solução particular da Eq. (13) como uma integral.

Usaremos a Eq. (12). Em primeiro lugar, temos

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Fatorando e^t das duas primeiras colunas e e^{-t} da terceira coluna, obtemos

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtraindo, então, a primeira linha da segunda e da terceira, temos

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, calculando este último determinante expandindo em relação à primeira coluna, vemos que

$$W(t) = 4e^t.$$

A seguir,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Expandindo em relação à primeira coluna, obtemos

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1.$$

De maneira análoga,

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2,$$

e

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

Substituindo esses resultados na Eq. (12), temos

$$Y(t) = e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s}\,ds + te^t \int_{t_0}^t \frac{g(s)(2)}{4e^s}\,ds + e^{-t} \int_{t_0}^t \frac{g(s)e^{2s}}{4e^s}\,ds$$

$$= \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left\{e^{t-s}[-1 + 2(t-s)] + e^{-(t-s)}\right\} g(s)\,ds.$$

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6 use o método de variação dos parâmetros para determinar a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y''' + y' = \tan t, \quad 0 < t < \pi$
2. $y''' - y' = t$
3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$
4. $y''' + y' = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
5. $y''' - y'' + y' - y = e^{-t}\operatorname{sen} t$
6. $y^{(4)} + 2y'' + y = \operatorname{sen} t$

Em cada um dos Problemas 7 e 8 encontre a solução geral da equação diferencial dada. Deixe sua resposta em função de uma ou mais integrais.

7. $y''' - y'' + y' - y = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
8. $y''' - y' = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

Em cada um dos Problemas de 9 a 12 encontre a solução do problema de valor inicial dado. Depois faça um gráfico da solução.

9. $y''' + y' = \sec t; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2$
10. $y^{(4)} + 2y'' + y = \operatorname{sen} t; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 1$
11. $y''' - y'' + y' - y = \sec t; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$
12. $y''' - y' = \csc t; \quad y(\pi/2) = 2, \quad y'(\pi/2) = 1, \quad y''(\pi/2) = -1$
13. Dado que x, x^2 e $1/x$ são soluções da equação homogênea associada a

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \qquad x > 0,$$

determine uma solução particular.

14. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial

$$y''' - y'' + y' - y = g(t).$$

15. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial

$$y^{(4)} - y = g(t).$$

Sugestão: as funções sen t, cos t, senh t e cosh t formam um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea.

16. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t).$$

Se $g(t) = t^2e^t$, determine $Y(t)$.

17. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x), \qquad x > 0.$$

Sugestão: verifique que x, x^2 e x^3 são soluções da equação homogênea.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; NewYork: Dover, 1953).

CAPÍTULO

5

Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem

Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear depende da determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Até agora só vimos um procedimento sistemático para a construção de soluções fundamentais no caso de coeficientes constantes. Para tratar a classe muito maior de equações com coeficientes variáveis é necessário estender nossa procura de soluções além das funções elementares usuais do Cálculo. A ferramenta principal de que precisamos é a representação de uma função dada em série de potências. A ideia básica é semelhante ao método dos coeficientes indeterminados: supomos que a solução de uma equação diferencial dada tem expansão em série de potências e, depois, tentamos determinar os coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial.

5.1 Revisão de Séries de Potências

Neste capítulo vamos discutir a utilização de séries de potências para construir conjuntos fundamentais de soluções para equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções da variável independente. Começamos resumindo, muito rapidamente, os resultados pertinentes sobre séries de potências que precisaremos. Os leitores familiarizados com séries de potências podem ir diretamente para a Seção 5.2. Os que precisarem de mais detalhes do que os contidos aqui devem consultar um livro de Cálculo.

1. Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge em um ponto x se

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x - x_0)^n$$

existe para esse x. A série certamente converge em $x = x_0$; pode convergir em todo x ou pode convergir para alguns valores de x e não convergir para outros.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge absolutamente em um ponto x se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n$$

converge. Pode-se mostrar que se a série converge absolutamente, então ela converge; no entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira.

3. Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão. Se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|L,$$

então a série de potências converge absolutamente naquele valor de x se $|x-x_0|L<1$ e diverge se $|x-x_0|L>1$. Se $|x-x_0| = 1/L$, o teste não é conclusivo.

EXEMPLO 1

Para quais valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-2)^n$$

converge?

Vamos usar o teste da razão para testar a convergência. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

De acordo com o item 3, a série converge absolutamente para $|x-2|<1$, ou $1<x<3$, e diverge para $|x-2|>1$. Os valores de x para os quais $|x-2|=1$ são $x=1$ e $x=3$. A série diverge para cada um desses valores de x, já que o n-ésimo termo da série não tende a zero quando $n\to\infty$.

4. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ converge em $x=x_1$, então ela converge absolutamente para $|x-x_0|<|x_1-x_0|$; e se ela diverge em $x=x_1$, então diverge para $|x-x_0|>|x_1-x_0|$.
5. Existe um número não negativo ρ, chamado de **raio de convergência**, tal que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente para $|x-x_0|<\rho$ e diverge para $|x-x_0|>\rho$. Para uma série que converge apenas em x_0, definimos ρ como zero; para uma série que converge em todo x, dizemos que ρ é infinito. Se $\rho>0$, o intervalo $|x-x_0|<\rho$ é chamado de **intervalo de convergência**; é indicado pelo trecho hachurado na Figura 5.1.1. A série pode convergir ou divergir quando $|x-x_0|=\rho$.

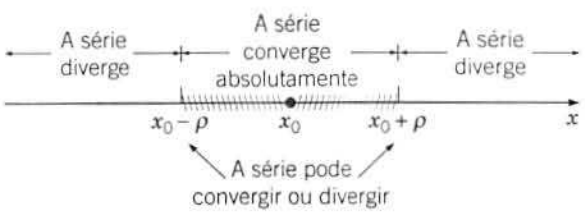


FIGURA 5.1.1 O intervalo de convergência de uma série de potências.

EXEMPLO 2

Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

Vamos aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Assim, a série converge absolutamente para $|x+1|<2$, ou $-3<x<1$, e diverge para $|x+1|>2$. O raio de convergência da série de potências é $\rho=2$. Finalmente, vamos verificar os extremos do intervalo de convergência. Em $x=1$, a série é a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

que diverge. Em $x=-3$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, mas não converge absolutamente. Dizemos que a série converge condicionalmente em $x = -3$. Para resumir, a série de potências dada converge para $-3 \le x < 1$ e diverge caso contrário. Ela converge absolutamente em $-3 < x < 1$ e tem raio de convergência 2.

Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ convergem para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$.

6. As séries podem ser somadas ou subtraídas termo a termo e

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n;$$

a série resultante converge pelo menos para $|x - x_0| < \rho$.

7. As séries podem ser multiplicadas formalmente e

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. A série resultante converge para pelo menos $|x - x_0| < \rho$. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, as séries podem ser formalmente divididas e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n.$$

Na maioria dos casos, os coeficientes d_n podem ser obtidos mais facilmente igualando-se os coeficientes correspondentes na relação equivalente

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right)(x - x_0)^n.\end{aligned}$$

No caso da divisão, o raio de convergência da série de potências resultante pode ser menor do que ρ.

8. A função f é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x - x_0| < \rho$. Além disso, $f', f'', \ldots$ podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, ou seja,

$$\begin{aligned}f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \\ f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},\end{aligned}$$

e assim por diante, e cada uma dessas séries converge absolutamente no intervalo $|x - x_0| < \rho$.

9. O valor de a_n é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

A série é chamada de série de Taylor[1] para a função f em torno de $x = x_0$.

10. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ para todo x em algum intervalo centrado em x_0, então $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Em particular, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para todo x, então $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

[1]Brook Taylor (1685-1731) foi o matemático inglês mais importante da geração seguinte à de Newton. Em 1715, publicou uma versão geral do teorema de expansão que leva seu nome, um resultado fundamental em todos os ramos da análise. Foi, também, um dos fundadores do cálculo de diferenças finitas e o primeiro a reconhecer a existência de soluções singulares de equações diferenciais.

Uma função f que tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

com raio de convergência $\rho > 0$ é dita **analítica** em $x = x_0$. Todas as funções usuais do Cálculo são analíticas, talvez com a exceção de alguns pontos facilmente reconhecíveis. Por exemplo, sen x e e^x são analíticas em todos os pontos, $1/x$ é analítica exceto em $x = 0$ e tan x é analítica exceto em múltiplos ímpares de $\pi/2$. De acordo com as afirmações 6 e 7, se f e g forem analíticas em x_0, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g [desde que $g(x_0) \neq 0$] também serão analíticas em $x = x_0$.

Deslocamento do Índice de Somatório. O índice de somatório em uma série infinita é uma variável muda, da mesma forma que a variável de integração em uma integral definida é uma variável muda. Logo, não importa a letra usada para o índice de um somatório. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

Da mesma forma que podemos mudar a variável de integração em uma integral definida, é conveniente fazer mudanças no índice de somatório ao se calcular soluções em série para equações diferenciais. Vamos ilustrar através de diversos exemplos como mudar o índice de somatório.

EXEMPLO 3 Escreva $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ como uma série cujo primeiro termo corresponde a $n = 0$, em vez de $n = 2$.

Seja $m = n - 2$; então $n = m + 2$ e $n = 2$ corresponde a $m = 0$. Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2}. \tag{1}$$

Escrevendo alguns termos iniciais de cada uma dessas séries pode-se verificar que elas contêm precisamente os mesmos termos. Finalmente, na série à direita do sinal de igualdade na Eq. (1) podemos substituir a variável muda m por n, obtendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \tag{2}$$

De fato, deslocamos o índice de 2 para cima e compensamos começando a contar 2 níveis mais baixos do que originalmente.

EXEMPLO 4 Escreva a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1) a_n (x - x_0)^{n-2} \tag{3}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x - x_0)^n$, em vez de $(x - x_0)^{n-2}$.

Novamente, deslocamos o índice de somatório por 2, de modo que n é substituído por $n + 2$ e começamos a contar de 2 unidades abaixo. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3) a_{n+2} (x - x_0)^n. \tag{4}$$

Você pode verificar facilmente que os termos nas séries (3) e (4) são exatamente os mesmos.

EXEMPLO 5 Escreva a expressão

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1} \tag{5}$$

como uma série cujo termo geral envolve x^{r+n}.

Coloque, primeiro, x^2 dentro do somatório, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n+1}. \tag{6}$$

A seguir, mude o índice do somatório por 1 e comece a contar 1 acima. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n}. \tag{7}$$

Novamente, você pode verificar que as duas séries na Eq. (7) são idênticas e que ambas são exatamente iguais à expressão em (5).

EXEMPLO 6

Suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{8}$$

para todo x, e determine o que isso implica sobre os coeficientes a_n.

Queremos usar a afirmação 10 para igualar os coeficientes correspondentes nas duas séries. Para fazer isso precisamos, primeiro, escrever a Eq. (8) de modo que as duas séries tenham a mesma potência de x em seus termos gerais. Por exemplo, podemos substituir n por $n+1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (8) e começar a contar de 1 a menos. Assim, a Eq. (8) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{9}$$

De acordo com a afirmação 10, podemos concluir que

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Logo, escolhendo valores sucessivos de n na Eq. (10), temos

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!},$$

e assim por diante. Em geral,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Portanto, a relação (8) determina todos os coeficientes a seguir em função de a_0. Finalmente, usando os coeficientes dados pela Eq. (11), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

onde seguimos a convenção usual de que $0! = 1$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, determine o raio de convergência da série de potências dada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2(x+2)^n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 16, determine a série de Taylor da função dada em torno do ponto x_0. Determine, também, o raio de convergência da série.

9. $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0$
10. $e^x, \quad x_0 = 0$
11. $x, \quad x_0 = 1$
12. $x^2, \quad x_0 = -1$
13. $\ln x, \quad x_0 = 1$
14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$
15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$
16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral.

18. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral. Mostre que se $y'' = y$, então os coeficientes a_0 e a_1 são arbitrários; determine a_2 e a_3 em função de a_0 e a_1. Mostre que $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Em cada um dos Problemas 19 e 20, verifique a equação dada.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$

20. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} + a_{k-1})x^k$

Em cada um dos Problemas de 21 a 27, escreva a expressão dada como uma série cujo termo geral envolve x^n.

21. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$

23. $x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

24. $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

25. $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

27. $x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

28. Determine a_n de modo que a equação

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

seja satisfeita. Tente identificar a função representada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

5.2 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte I

No Capítulo 3 descrevemos métodos para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, métodos para resolver equações lineares de segunda ordem quando os coeficientes são funções da variável independente. Neste capítulo denotaremos a variável independente por x. Basta considerar a equação homogênea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \tag{1}$$

já que o procedimento para a equação não homogênea associada é semelhante.

Muitos problemas em física matemática levam a equações da forma (1) com coeficientes polinomiais; exemplos incluem a equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

onde ν é uma constante, e a equação de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

onde α é constante. Por essa razão, assim como para simplificar os cálculos algébricos, vamos considerar principalmente o caso em que as funções P, Q e R são polinômios. No entanto, como veremos, o método de solução também é aplicável quando P, Q e R são funções analíticas genéricas.

Por enquanto, então, vamos supor que P, Q e R são polinômios e que não têm fatores comuns. Suponha, também, que queremos resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto x_0. A solução da Eq. (1) em um intervalo contendo x_0 está intimamente associada ao comportamento de P nesse intervalo.

Um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ é chamado de **ponto ordinário**. Como P é contínuo, segue que existe um intervalo em torno de x_0 no qual $P(x)$ nunca se anula. Nesse intervalo, podemos dividir a Eq. (1) por $P(x)$ para obter

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{2}$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ são funções contínuas. Logo, pelo Teorema 3.2.1 de existência e unicidade existe uma única solução da Eq. (1) nesse intervalo que também satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ para valores arbitrários de y_0 e y_0'. Nesta e na próxima seção vamos discutir soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto ordinário.

Por outro lado, se $P(x_0) = 0$, então x_0 é chamado de **ponto singular** da Eq. (1). Nesse caso, pelo menos um entre $Q(x_0)$ e $R(x_0)$ é diferente de zero. Em consequência, pelo menos um dos coeficientes p e q na Eq. (2) torna-se ilimitado quando $x \to x_0$ e, portanto, o Teorema 3.2.1 não se aplica nesse caso. As Seções de 5.4 a 5.7 tratam do problema de encontrar soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular.

Vamos começar o problema de resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto ordinário x_0. Procuramos soluções da forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{3}$$

e supomos que a série converge no intervalo $|x - x_0| < \rho$ para algum $\rho > 0$. Enquanto, à primeira vista, pode não parecer atraente procurar uma solução em forma de série de potências, essa é, de fato, uma forma conveniente e útil para uma solução. Dentro de seu intervalo de convergência, séries de potências se comportam de maneira muito semelhante a polinômios e são fáceis de manipular tanto analítica quanto numericamente. De fato, mesmo se obtivermos uma solução em termos de funções elementares, tais como funções exponenciais ou trigonométricas, precisaremos, provavelmente, de uma série de potências ou expressão equivalente se quisermos calculá-la numericamente ou desenhar seu gráfico.

O modo mais prático de determinar os coeficientes a_n é substituir a série (3) e suas derivadas por y, y' e y'' na Eq. (1). Os exemplos a seguir ilustram esse processo. As operações envolvidas nos procedimentos, como a diferenciação, são justificáveis desde que permaneçamos no intervalo de convergência. As equações diferenciais nesses exemplos também têm uma importância considerável por si mesmas.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução em série para a equação

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

Como sabemos, um conjunto fundamental de soluções para essa equação é composto por sen x e cos x, de modo que os métodos de expansão em série não são necessários para resolver essa equação. No entanto, esse exemplo ilustra o uso de séries de potências em um caso relativamente simples. Para a Eq. (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = 1$, logo todo ponto é um ponto ordinário.

Vamos procurar uma solução em forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{5}$$

e supor que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$. Diferenciando a Eq. (5) termo a termo, obtemos

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \tag{6}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}. \tag{7}$$

Substituindo y e y'' pelas séries (5) e (7) na Eq. (4) fornece

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

Para combinar as duas séries precisamos reescrever pelo menos uma delas de modo que ambas tenham o mesmo termo geral. Assim, mudamos o índice do somatório na primeira série substituindo n por $n + 2$ e começando a soma em 0 em vez de 2. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0.$$

Para que essa equação seja satisfeita para todo x é preciso que o coeficiente de cada potência de x seja nulo; logo, podemos concluir que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

A Eq. (8) é conhecida como uma **relação de recorrência**. Os coeficientes sucessivos podem ser calculados um a um escrevendo-se a relação de recorrência primeiro para $n = 0$, depois para $n = 1$ e assim por diante. Neste exemplo, a Eq. (8) relaciona cada coeficiente com o que está dois antes dele. Assim, os coeficientes com índices pares ($a_0, a_2, a_4, \ldots$) e os com índices ímpares ($a_1, a_3, a_5, \ldots$) são determinados separadamente. Para os pares, temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2\cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6\cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem que, em geral, se $n = 2k$, então

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

Podemos provar a Eq. (9) por indução matemática. Observe, primeiro, que ela é válida para $k = 1$. A seguir, suponha que é válida para um valor arbitrário de k e considere o caso $k + 1$. Temos

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0.$$

Portanto, a Eq. (9) também é verdadeira para $k + 1$ e, em consequência, é verdadeira para todos os inteiros positivos k.

Analogamente, para os coeficientes com índices ímpares,

$$a_3 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5\cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7\cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \ldots.$$

e, em geral, se $n = 2k + 1$, então[2]

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{10}$$

Substituindo esses coeficientes na Eq. (5), temos

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Agora que obtivemos formalmente as duas soluções em série da Eq. (4), podemos testá-las quanto à convergência. Usando o teste da razão, é fácil mostrar que cada uma das séries na Eq. (11) converge para todo x, e isso justifica, de forma retroativa, todos os passos usados para se obter as soluções. De fato, reconhecemos que a primeira série na Eq. (11) é exatamente a série de Taylor para cos x em torno de $x = 0$ e que a segunda é a série de Taylor para sen x em torno de $x = 0$. Assim, como esperado, obtivemos a solução $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

Note que não foram impostas condições sobre a_0 e a_1; portanto, elas são constantes arbitrárias. Das Eqs. (5) e (6) vemos que y e y' calculadas em $x = 0$ tomam os valores a_0 e a_1, respectivamente. Como as condições iniciais $y(0)$ e $y'(0)$ podem ser escolhidas arbitrariamente, segue que a_0 e a_1 devem ser arbitrárias até que sejam dadas condições iniciais específicas.

As Figuras 5.2.1 e 5.2.2 mostram como as somas parciais das séries na Eq. (11) aproximam cos x e sen x. À medida que cresce o número de termos, o intervalo no qual a aproximação é satisfatória torna-se maior e, para cada x nesse intervalo, a precisão da aproximação melhora. No entanto, você sempre deve se lembrar de

[2] O resultado dado na Eq. (10) e outras fórmulas análogas neste capítulo podem ser provadas por um argumento de indução semelhante ao que acabamos de dar para a Eq. (9). Supomos que esses resultados são plausíveis e omitimos o argumento de indução daqui para a frente.

que uma série de potências truncada fornece apenas uma aproximação local da solução em uma vizinhança do ponto inicial $x = 0$; ela não pode representar adequadamente a solução para valores grandes de $|x|$.

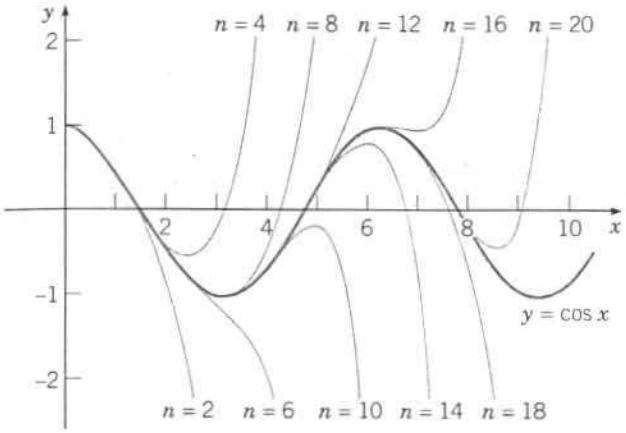


FIGURA 5.2.1 Aproximações polinomiais de cos x. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

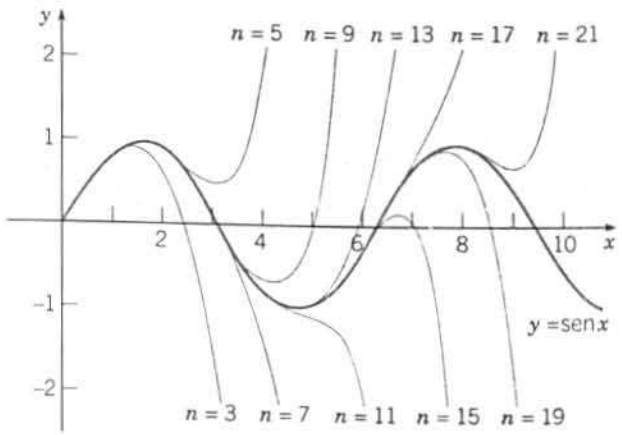


FIGURA 5.2.2 Aproximações polinomiais de sen x. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

No Exemplo 1 sabíamos desde o início que sen x e cos x formavam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (4). No entanto, se não soubéssemos disso e tivéssemos tentado simplesmente resolver a Eq. (4) usando expansão em série ainda assim teríamos obtido a solução (11). Em reconhecimento do fato de que a Eq. (4) ocorre com frequência em aplicações, poderíamos decidir dar nomes especiais às duas soluções da Eq. (11), talvez

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{12}$$

Poderíamos, então, perguntar quais as propriedades dessas funções. Por exemplo, podemos ter certeza de que $C(x)$ e $S(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções? Segue imediatamente da expansão em série que $C(0) = 1$ e $S(0) = 0$. Diferenciando as séries para $C(x)$ e $S(x)$ termo a termo, vemos que

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x). \tag{13}$$

Assim, em $x = 0$ temos que $S'(0) = 1$ e $C'(0) = 0$. Em consequência, o wronskiano de C e S em $x = 0$ é

$$W(C,S)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{14}$$

de modo que essas funções formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções. Substituindo x por $-x$ em cada uma das Eqs. (12), vemos que $C(-x) = C(x)$ e que $S(-x) = -S(x)$. Além disso, calculando a série infinita[2] podemos mostrar que as funções $C(x)$ e $S(x)$ têm todas as propriedades analíticas e algébricas das funções cosseno e seno, respectivamente.

Embora você tenha visto, provavelmente, as funções seno e cosseno pela primeira vez de um modo mais elementar em termos de triângulos retângulos, é interessante que essas funções podem ser definidas como soluções de certas equações diferenciais lineares de segunda ordem simples. Para ser preciso, a função sen x pode ser definida como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; analogamente, cos x pode ser definido como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Muitas outras funções importantes em física matemática também são definidas como soluções de determinados problemas de valor inicial. Para a maioria dessas funções não existe maneira mais simples ou mais elementar de se estudá-las.

EXEMPLO 2

Encontre uma solução em série de potências de x para a equação de Airy[4]

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{15}$$

[2]Tal análise é feita na Seção 24 do livro de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series* (Nova York: Hafner, 1951).

[4]Sir George Biddell Airy (1801-1892), astrônomo e matemático inglês, foi diretor do Observatório de Greenwich de 1835 a 1881. Uma das razões pelas quais a equação de Airy é interessante é que as soluções são oscilatórias para x negativo, semelhante às funções trigonométricas, e monótonas para x positivo, semelhante às funções hiperbólicas. Você pode explicar por que é razoável esperar um tal comportamento?

Para essa equação, $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = -x$, logo todo ponto é um ponto ordinário. Vamos supor que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{16}$$

e que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$. A série para y'' é dada pela Eq. (7); como explicado no exemplo precedente, podemos reescrevê-la como

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \tag{17}$$

Substituindo y e y'' na Eq. (15) pelas séries (16) e (17), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \tag{18}$$

A seguir, mudamos o índice da última série à direita na Eq. (18) substituindo n por $n - 1$ e começando a somar a partir de 1 em vez de zero. Temos, então,

$$2 \cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Novamente, para que essa equação seja satisfeita para todo x é preciso que os coeficientes das potências iguais de x sejam iguais; portanto, $a_2 = 0$, e obtemos a relação de recorrência

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{19}$$

Como a_{n+2} é dado em função de a_{n-1}, os coeficientes são determinados de três em três. Assim, a_0 determina a_3, que por sua vez determina a_6, ...; a_1 determina a_4, que determina a_7, ...; e a_2 determina a_5, que determina a_8, ... Como $a_2 = 0$, concluímos imediatamente que $a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$.

Para a sequência $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$, fazemos $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \qquad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem a fórmula geral

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)}, \qquad n \geq 4.$$

Para a sequência $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, fazemos $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \qquad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots.$$

Em geral, temos

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}, \qquad n \geq 4.$$

Assim, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right]. \tag{20}$$

Tendo obtido essas duas soluções em série, podemos investigar agora sua convergência. Devido ao crescimento rápido dos denominadores dos termos na série (20), poderíamos esperar que essas séries tivessem um raio de convergência grande. De fato, é fácil usar o teste da razão para mostrar que ambas as séries convergem para todo x; veja o Problema 20.

Supondo, por um instante, que as séries convergem para todo x, sejam y_1 e y_2 as funções definidas pelas expressões no primeiro e no segundo par de colchetes, respectivamente, na Eq. (20). Então, escolhendo primeiro $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e depois $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, segue que y_1 e y_2 são soluções da Eq. (15). Note que y_1 satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, e que y_2 satisfaz as condições iniciais $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$. Portanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ e, em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

As Figuras 5.2.3 e 5.2.4 mostram os gráficos das soluções y_1 e y_2, respectivamente, da equação de Airy, assim como os gráficos de diversas somas parciais das duas séries na Eq. (20). Novamente, as somas parciais forne-

cem aproximações locais para as soluções em uma vizinhança da origem. Embora a qualidade da aproximação melhore à medida que aumenta o número de termos, nenhum polinômio pode representar de modo adequado y_1 e y_2 para valores grandes de $|x|$. Um modo prático de estimar o intervalo no qual uma soma parcial dada é razoavelmente precisa é comparar os gráficos daquela soma parcial e da próxima, obtida incluindo-se mais um termo. Assim que se puder notar a separação dos gráficos, pode-se ter certeza de que a soma parcial original não é precisa. Por exemplo, na Figura 5.2.3 os gráficos para $n = 24$ e $n = 27$ começam a se separar em torno de $x = -9/2$. Portanto, além desse ponto a soma parcial de grau 24 não serve como uma aproximação da solução.

Observe que ambas as funções y_1 e y_2 são monótonas para $x > 0$ e oscilatórias para $x < 0$. Você também pode ver das figuras que as oscilações não são uniformes, mas decaem em amplitude e aumentam em frequência quando aumenta a distância da origem. Em contraste com o Exemplo 1, as soluções y_1 e y_2 da equação de Airy não são funções elementares que você já encontrou em Cálculo. No entanto, pela sua importância em algumas aplicações físicas essas funções têm sido estudadas extensamente, e suas propriedades são bem conhecidas entre matemáticos aplicados e cientistas.

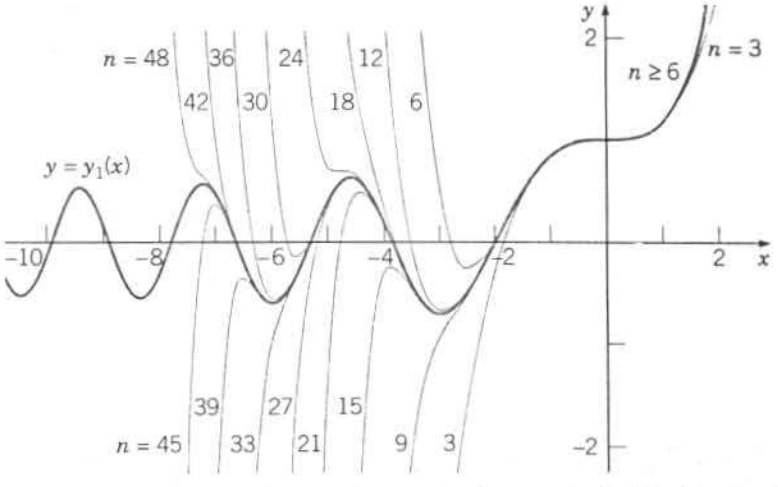


FIGURA 5.2.3 Aproximações polinomiais da solução $y_1(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

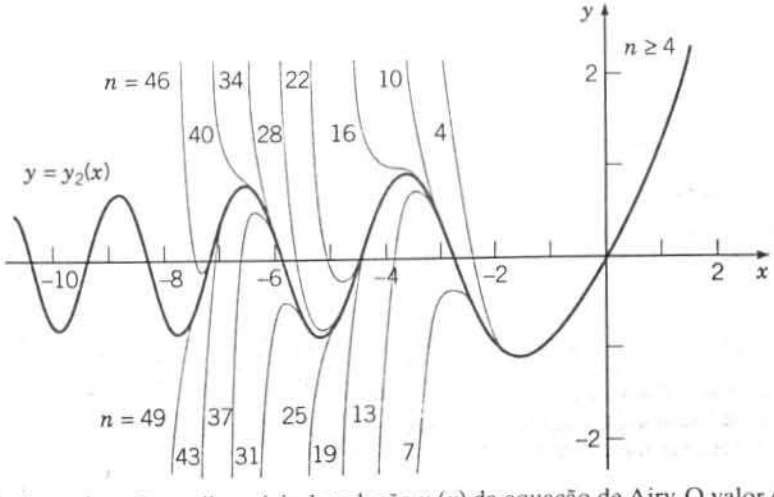


FIGURA 5.2.4 Aproximações polinomiais da solução $y_2(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

EXEMPLO 3 Encontre uma solução da equação de Airy em potências de $x - 1$.

O ponto $x = 1$ é um ponto ordinário da Eq. (15) e, portanto, procuramos por uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n,$$

onde supomos que a série converge em algum intervalo $|x - 1| < \rho$. Então

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n,$$

e

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n.$$

Substituindo y e y'' na Eq. (15), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n. \tag{21}$$

Para igualar os coeficientes das potências iguais de $(x-1)$ precisamos escrever x, o coeficiente de y na Eq. (15), em potências de $(x-1)$; ou seja, escrevemos $x = 1 + (x-1)$. Note que essa é precisamente a série de Taylor de x em torno de $x = 1$. Então, a Eq. (21) fica

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n &= [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Mudando o índice da última série à direita, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n.$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de $x-1$, encontramos

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_0, \\ (3 \cdot 2) a_3 &= a_1 + a_0, \\ (4 \cdot 3) a_4 &= a_2 + a_1, \\ (5 \cdot 4) a_5 &= a_3 + a_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

A relação de recorrência geral é

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1. \tag{22}$$

Resolvendo para os primeiros coeficientes em função de a_0 e a_1, vemos que

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \qquad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}, \qquad a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y = a_0 &\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots \right] \\ &+ a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots \right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Em geral, quando a relação de recorrência tem mais de dois termos, como na Eq. (22), a determinação de uma fórmula para a_n em função de a_0 e a_1 é bem complicada, se não impossível. Neste exemplo, tal fórmula não parece ser fácil. Sem tal fórmula não podemos testar a convergência das duas séries na Eq. (23) por métodos diretos, como o teste da razão. No entanto, mesmo sem ter uma fórmula para a_n vamos ver na Seção 5.3 que é possível mostrar que as duas séries na Eq. (23) convergem para todo x. Além disso, elas definem funções y_3 e y_4 que formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Airy (15). Assim,

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

é a solução geral da equação de Airy para $-\infty < x < \infty$.

Vale a pena enfatizar que, como vimos no Exemplo 3, se procurarmos uma solução da Eq. (1) da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, teremos, também, que expressar os coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ em potências de

$(x - x_0)$. De outro modo, podemos fazer uma mudança de variável $x - x_0 = t$, obtendo uma nova equação diferencial para y em função de t e depois procurar soluções dessa nova equação da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Ao terminar os cálculos, substituímos t por $x - x_0$ (veja o Problema 19).

Nos Exemplos 2 e 3 encontramos dois conjuntos de soluções da equação de Airy. As funções y_1 e y_2 definidas pelas séries na Eq. (20) formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (15) para todo x, o que também é verdade para as funções y_3 e y_4 definidas pelas séries na Eq. (23). De acordo com a teoria geral de equações lineares de segunda ordem, cada uma entre as duas primeiras funções pode ser expressa como combinação linear das duas últimas funções e vice-versa — um resultado que, certamente, não é óbvio examinando-se apenas as séries.

Finalmente, enfatizamos que não é terrivelmente importante se não formos capazes de determinar o coeficiente geral a_n em função de a_0 e a_1, como no Exemplo 3. O essencial é podermos determinar *quantos coeficientes quisermos*. Assim, podemos encontrar quantos termos quisermos nas duas soluções em série, mesmo sem conhecer o termo geral. Embora a tarefa de calcular diversos coeficientes em uma solução em série de potências não seja difícil, pode ser tediosa. Um pacote de manipulação simbólica pode ajudar aqui; alguns são capazes de encontrar um número de termos especificado em uma solução em série de potências em resposta a um único comando. Com um pacote gráfico apropriado pode-se, também, produzir gráficos como os que aparecem nas figuras desta seção.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 14:

(a) Procure soluções em séries de potências da equação diferencial dada em torno do ponto dado x_0; encontre a relação de recorrência.

(b) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma das duas soluções y_1 e y_2 (a menos que a série termine antes).

(c) Calculando o wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0)$, mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

(d) Se possível, encontre o termo geral em cada solução

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k$ constante
5. $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
9. $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
10. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
11. $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
12. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
13. $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
14. $2y'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18:

(a) Encontre os cinco primeiros termos não nulos na solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça gráficos das aproximações da solução com quatro e cinco termos no mesmo conjunto de eixos.

(c) Estime, a partir dos gráficos no item (b), o intervalo no qual a aproximação com quatro termos é razoavelmente precisa.

15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 2
16. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$; Veja o Problema 6
17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$; Veja o Problema 7
18. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$; Veja o Problema 12

19. (a) Fazendo a mudança de variável $x - x_0 = t$ e supondo que y tem uma série de Taylor em potências de t, encontre duas soluções de

$$y'' + (x - 1)^2y' + (x^2 - 1)y = 0$$

em séries de potências de $x - 1$.

(b) Mostre que você obtém o mesmo resultado diretamente supondo que y é dado por uma série de Taylor em potências de $x - 1$ e expressando o coeficiente $x^2 - 1$ em potências de $x - 1$.

20. Mostre diretamente, usando o teste da razão, que as duas soluções em série em torno do ponto $x = 0$ da equação de Airy convergem para todo x; veja a Eq. (20) do texto.

21. **A Equação de Hermite.** A equação

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

onde λ é constante, é conhecida como a equação de Hermite.[5] Esta é uma equação importante na física matemática.

(a) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma de duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 0$.

(b) Note que se λ for um inteiro par não negativo, então uma ou outra das soluções em série termina e torna-se um polinômio. Encontre as soluções polinomiais para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10. Note que cada polinômio é determinado a menos de uma constante multiplicativa.

(c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Hermite com $\lambda = 2n$ para a qual o coeficiente de x^n é 2^n. Encontre $H_0(x), \ldots, H_5(x)$.

22. Considere o problema de valor inicial $y' = \sqrt{1 - y^2}, y(0) = 0$.

(a) Mostre que $y = \operatorname{sen} x$ é a solução deste problema de valor inicial.

(b) Procure uma solução do problema de valor inicial em forma de série de potências em torno de $x = 0$. Encontre os coeficientes dessa série até o termo contendo x^5.

Em cada um dos Problemas de 23 a 28, faça o gráfico de diversas somas parciais da solução em série do problema de valor inicial dado em torno de $x = 0$, obtendo, assim, gráficos análogos aos ilustrados nas Figuras 5.2.1 até 5.2.4.

23. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 2

24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 6

25. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 7

26. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$; Veja o Problema 10

27. $y'' + x^2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$; Veja o Problema 4

28. $(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.3 Soluções em Série Perto de um Ponto Ordinário, Parte II

Consideramos, na seção precedente, o problema de encontrar soluções de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

onde P, Q e R são polinômios, na vizinhança de um ponto ordinário x_0. Supondo que a Eq. (1) tem, de fato, uma solução $y = \phi(x)$ e que ϕ tem uma série de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{2}$$

que converge para $|x - x_0| < \rho$, onde $\rho > 0$, vimos que a_n pode ser determinado substituindo-se, diretamente, y na Eq. (1) pela série (2).

Vamos considerar, agora, como justificar a afirmação de que se x_0 é um ponto ordinário da Eq. (1), então existem soluções da forma (2). Vamos considerar, também, a questão do raio de convergência de tal série. Ao fazer isso, seremos levados a uma generalização da definição de ponto ordinário.

Suponha, então, que existe uma solução da Eq. (1) da forma (2). Diferenciando a Eq. (2) m vezes e fazendo x igual a x_0, segue que

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

Logo, para calcular a_n na série (2) precisamos mostrar que podemos determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir da equação diferencial (1).

Suponha que $y = \phi(x)$ é uma solução da Eq. (1) satisfazendo as condições iniciais $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. Então, $a_0 = y_0$ e $a_1 = y_0'$. Se estivermos interessados apenas em encontrar uma solução da Eq. (1) sem especificar condições iniciais, então a_0 e a_1 permanecem arbitrários. Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ e os coeficientes correspondentes a_n para $n = 2, 3, \ldots$, voltamos para a Eq. (1). Como ϕ é uma solução da Eq. (1), temos

[5] Charles Hermite (1822-1901) foi um analista e algebrista francês influente. Introduziu as funções de Hermite em 1864 e mostrou, em 1873, que e é um número transcendental (ou seja, e não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais). Seu nome também está associado às matrizes hermitianas (veja a Seção 7.3), algumas de cujas propriedades ele descobriu.

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

No intervalo em torno de x_0 onde P nunca se anula, podemos escrever essa equação na forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x), \tag{3}$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$. Fazendo x igual a x_0 na Eq. (3), temos

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

Portanto, a_2 é dado por

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \tag{4}$$

Para determinar a_3, diferenciamos a Eq. (3) e depois fazemos x igual a x_0, obtendo

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

A substituição de a_2 pela expressão obtida da Eq. (4) fornece a_3 em termos de a_1 e a_0. Como P, Q e R são polinômios e $P(x_0) \neq 0$, todas as derivadas de p e q existem em x_0. Logo, podemos continuar a diferenciar a Eq. (3) indefinidamente, determinando, após cada diferenciação, os coeficientes sucessivos a_4, a_5, ... fazendo x igual a x_0.

Note que a propriedade importante que usamos na determinação de a_n é que podemos calcular uma infinidade de derivadas das funções p e q. Pode parecer razoável relaxar nossa hipótese de que as funções p e q são quocientes de polinômios e supor, simplesmente, que sejam infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de x_0. Infelizmente, essa condição é muito fraca para garantir que podemos provar a convergência da expansão em série resultante para $y = \phi(x)$. É necessário supor que as funções p e q são *analíticas* em x_0; ou seja, que elas têm expansões em série de Taylor que convergem em algum intervalo em torno do ponto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \tag{6}$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \tag{7}$$

Com essa ideia em mente, podemos generalizar as definições de ponto ordinário e ponto singular da Eq. (1) da seguinte maneira: se as funções $p = Q/P$ e $q = R/P$ forem analíticas em x_0, então o ponto x_0 é dito um **ponto ordinário** da equação diferencial (1); caso contrário, é um **ponto singular**.

Vamos agora considerar o problema do intervalo de convergência da solução em série. Uma possibilidade é calcular, explicitamente, a solução em série para cada problema e usar um dos testes de convergência de uma série infinita para determinar seu raio de convergência. Infelizmente, esses testes requerem que obtenhamos uma expressão para o coeficiente geral a_n em função de n, uma tarefa muito difícil, se não impossível, com frequência; lembre o Exemplo 3 na Seção 5.2. No entanto, essa questão pode ser respondida imediatamente para uma classe ampla de problemas pelo teorema a seguir.

Teorema 5.3.1 Se x_0 for um ponto ordinário da equação diferencial (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

ou seja, se $p = Q/P$ e $q = R/P$ forem analíticas em x_0, então a solução geral da Eq. (1) será

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x), \tag{8}$$

onde a_0 e a_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são duas soluções em séries de potências que são analíticas em x_0. As soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, o raio de convergência de cada uma das soluções em série y_1 e y_2 é pelo menos tão grande quanto o mínimo dos raios de convergência das séries para p e q.

Para ver que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, note que eles têm a forma $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \ldots$ e $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$, onde $b_2 + c_2 = a_2$. Logo, y_1 satisfaz as condições iniciais $y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0$ e y_2 satisfaz as condições iniciais $y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1$. Logo, $W(y_1, y_2)(x_0) = 1$.

Note também que embora o cálculo dos coeficientes através de diferenciações sucessivas da equação diferencial seja excelente do ponto de vista teórico, não é, em geral, um procedimento computacional prático. Em vez disso, é melhor substituir y na Eq. (1) pela série (2) e determinar os coeficientes de modo que a equação diferencial seja satisfeita, como nos exemplos da seção precedente.

Não demonstraremos esse teorema que, em uma forma ligeiramente mais geral, é devido a Fuchs.[6] O que importa para nossos propósitos é que existe uma solução em série da forma (2) e que o raio de convergência dessa solução em série não pode ser menor do que o menor entre os raios de convergência das séries para p e q; logo, precisamos apenas determinar esses raios.

Isso pode ser feito de duas maneiras. Novamente, uma possibilidade é calcular as séries de potências para p e q e depois determinar seus raios de convergência usando um dos testes de convergência para séries infinitas. No entanto, existe um modo mais fácil quando P, Q e R são polinômios. Na teoria de funções de uma variável complexa mostra-se que a razão de dois polinômios, digamos Q/P, tem uma expansão em série de potências que converge em torno de um ponto x_0 se $P(x_0) \neq 0$. Além disso, supondo que todos os fatores comuns entre Q e P foram cancelados, o raio de convergência da série de potências para Q/P em torno do ponto x_0 é exatamente a distância de x_0 à raiz mais próxima de P. Ao determinar essa distância, precisamos lembrar que $P(x) = 0$ pode ter raízes complexas, e elas também têm que ser levadas em consideração.

EXEMPLO 1

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(1 + x^2)^{-1}$ em torno de $x = 0$?

Um modo de proceder é encontrar a série de Taylor em questão, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Pode-se verificar, então, pelo teste da razão, que $\rho = 1$. Outra abordagem é notar que os zeros de $1 + x^2$ são $x = \pm i$. Como a distância de 0 a i ou a $-i$ no plano complexo é 1, o raio de convergência da série de potências em torno de $x = 0$ é 1.

EXEMPLO 2

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 0$? E em torno de $x = 1$?

Em primeiro lugar, note que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tem soluções $x = 1 \pm i$. A distância de $x = 0$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ no plano complexo é $\sqrt{2}$, logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em torno de $x = 0$ é $\sqrt{2}$.

A distância no plano complexo de $x = 1$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ é 1; logo o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - 1)^n$ em torno de $x = 1$ é 1.

De acordo com o Teorema 5.3.1, as soluções em série da equação de Airy nos Exemplos 2 e 3 da seção precedente convergem para todos os valores de x, já que, em cada um dos problemas, $P(x) = 1$ e, portanto, nunca se anula.

Uma solução em série pode convergir para outros valores de x, além dos indicados no Teorema 5.3.1, de modo que o teorema fornece, de fato, apenas uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série. Isso é ilustrado pelos polinômios de Legendre, que satisfazem a equação de Legendre dada no próximo exemplo.

EXEMPLO 3

Determine uma cota inferior para o raio de convergência das soluções em série em torno de $x = 0$ da equação de Legendre

[6] Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902) foi estudante e, mais tarde, professor na University of Berlim. Provou o resultado do Teorema 5.3.1 em 1866. Sua pesquisa mais importante foi sobre pontos singulares de equações diferenciais lineares. Ele reconheceu a importância dos pontos singulares regulares (Seção 5.4), e as equações cujas únicas singularidades, incluindo o ponto no infinito, são pontos singulares regulares; são conhecidas como equações de Fuchs.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

onde α é constante.

Note que $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ são polinômios e que os zeros de P, a saber, $x = \pm 1$, distam 1 de $x = 0$. Logo, uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para $|x| < 1$ e, possivelmente, para valores maiores de x. De fato, pode-se mostrar que se α é um inteiro positivo, uma das soluções em série termina após um número finito de termos e, portanto, converge para todo x e não apenas para $|x| < 1$. Por exemplo, se $\alpha = 1$, a solução polinomial é $y = x$. Veja os Problemas 22 até 29, ao final desta seção, para uma discussão mais completa da equação de Legendre.

EXEMPLO 4 Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \tag{9}$$

em torno do ponto $x = 0$ e em torno do ponto $x = -\frac{1}{2}$.

Novamente, Q, P e R são polinômios e P tem raízes $x = \pm i$. A distância no plano complexo de 0 a $\pm i$ é 1 e a distância de $-\frac{1}{2}$ a $\pm i$ é $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. Assim, no primeiro caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para $|x| < 1$ e, no segundo caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x + \frac{1}{2})^n$ converge pelo menos para $|x + \frac{1}{2}| < \sqrt{5}/2$.

Uma observação interessante que podemos fazer sobre a Eq. (9) segue dos Teoremas 3.2.1 e 5.3.1. Suponha que são dadas as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. Como $1 + x^2 \neq 0$ para todo x, sabemos, do Teorema 3.2.1, que o problema de valor inicial tem uma única solução em $-\infty < x < \infty$. Por outro lado, o Teorema 5.3.1 garante apenas uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (com $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$) para $-1 < x < 1$. A solução única no intervalo $-\infty < x < \infty$ pode não ter uma expansão em série de potências em torno de $x = 0$ que convirja para todo x.

EXEMPLO 5 Podemos determinar uma solução em série em torno de $x = 0$ para a equação diferencial

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1 + x^2)y = 0,$$

e, se for o caso, qual o raio de convergência?

Para esta equação diferencial, $p(x) = \operatorname{sen} x$ e $q(x) = 1 + x^2$. Lembre-se do Cálculo que sen x tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$ que converge para todo x. Além disso, q também tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$, a saber, $q(x) = 1 + x^2$, que converge para todo x. Portanto, a equação tem uma solução em série da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com a_0 e a_1 arbitrários, e a série converge para todo x.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, determine $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ e $\phi^{(4)}(x_0)$ para o ponto dado x_0, se $y = \phi(x_0)$ é uma solução do problema de valor inicial dado.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

Em cada um dos Problemas de 5 a 8, determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial dada em torno de cada ponto x_0 dado.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$
9. Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série em torno de x_0 dado para cada uma das equações diferenciais dadas nos Problemas de 1 a 14 da Seção 5.2.

10. **A Equação de Chebyshev.** A equação diferencial de Chebyshev[7] é

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

onde α é constante.

(a) Determine duas soluções em séries de potências de x para $|x| < 1$ e mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções.

(b) Mostre que, se α for um inteiro não negativo n, então existe uma solução polinomial de grau n. Esses polinômios, quando normalizados adequadamente, são chamados de polinômios de Chebyshev. Eles são muito úteis em problemas que necessitam de uma aproximação polinomial para uma função definida em $-1 \le x \le 1$.

(c) Encontre uma solução polinomial para cada um dos casos $\alpha = n = 0, 1, 2$ e 3.

Para cada uma das equações diferenciais nos Problemas de 11 a 14, encontre os quatro primeiros termos não nulos em cada uma de duas soluções em série em torno da origem. Qual o valor que você espera que tenha o raio de convergência de cada solução?

11. $y'' + (\text{sen}x)y = 0$
12. $e^x y'' + xy = 0$
13. $(\cos x)y'' + xy' - 2y = 0$
14. $e^{-x}y'' + \ln(1 + x)y' - xy = 0$
15. Sejam x e x^2 soluções da equação diferencial $P(x)y' - Q(x)y' + R(x)y = 0$. Você pode dizer se o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário ou singular? Prove sua resposta.

Equações de Primeira Ordem. Os métodos de expansão em séries discutidos nesta seção são diretamente aplicáveis à equação diferencial linear de primeira ordem $P(x)y' + Q(x)y = 0$ em um ponto x_0, se a função $p = Q/P$ tiver uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto. Tal ponto é chamado de ponto ordinário e, além disso, o raio de convergência da série $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é pelo menos tão grande quanto o raio de convergência da série para Q/P. Em cada um dos Problemas de 16 a 21, resolva a equação diferencial dada por uma série de potências em x e verifique que a_0 é arbitrário em cada caso. Os Problemas 20 e 21 envolvem equações diferenciais não homogêneas para as quais os métodos de expansão em séries podem ser estendidos facilmente. Sempre que possível, compare a solução em série com a obtida pelos métodos do Capítulo 2.

16. $y' - y = 0$
17. $y' - xy = 0$
18. $y' = e^{x^2}y$, só três termos
19. $(1 - x)y' = y$
20. $y' - y = x^2$
21. $y' + xy = 1 + x$

A Equação de Legendre. Os Problemas de 22 a 29 tratam da equação de Legendre[8]

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

Como indicado no Exemplo 3, o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário dessa equação, e a distância da origem ao zero mais próximo de $P(x) = 1 - x^2$ é 1. Logo, o raio de convergência da solução em série em torno de $x = 0$ é pelo menos 1. Note, também, que basta considerar $\alpha > -1$, pois, se $\alpha \le -1$, então a substituição $\alpha = -(1 + \gamma)$, onde $\gamma \ge 0$, leva à equação de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma + 1)y = 0$.

22. Mostre que duas soluções da equação de Legendre para $|x| < 1$ são

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha - 2)(\alpha + 1)(\alpha + 3)}{4!}x^4 + \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha \cdots (\alpha - 2m + 2)(\alpha + 1) \cdots (\alpha + 2m - 1)}{(2m)!}x^{2m},$$

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 3)(\alpha + 2)(\alpha + 4)}{5!}x^5 + \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{(\alpha - 1) \cdots (\alpha - 2m + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + 2m)}{(2m + 1)!}x^{2m+1}.$$

[7]Pafnuty L. Chebyshev (1821-1894), professor da Petersburg University durante 35 anos e o matemático russo mais influente do século XIX, fundou a chamada escola de São Petersburgo, que produziu uma longa linhagem de matemáticos importantes. Seus estudos sobre os polinômios de Chebyshev começaram em torno de 1854, como parte de uma investigação de aproximação de funções por polinômios. Chebyshev também é conhecido por seu trabalho em teoria dos números e probabilidade.

[8]Adrien-Marie Legendre (1752-1833) teve várias posições na *Académie des Sciences* francesa a partir de 1783. Seus trabalhos principais foram nos campos de funções elíticas e teoria dos números. As funções de Legendre, soluções da equação de Legendre, apareceram pela primeira vez em 1784 em seu estudo sobre a atração de esferoides.

23. Mostre que se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série y_1 se reduz a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potências pares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 0, 2$ e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n + 1$, então a solução em série y_2 se reduz a um polinômio de grau $2n + 1$ contendo apenas potências ímpares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 1$, 3 e 5.

24. O polinômio de Legendre $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz, também, a condição $P_n(1) = 1$.
   (a) Usando os resultados do Problema 23, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.
   (b) Faça os gráficos de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ para $-1 \le x \le 1$.
   (c) Encontre os zeros de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.

25. Pode-se mostrar que a fórmula geral para $P_n(x)$ é

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

onde $\lfloor n/2 \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $n/2$. Observando a forma de $P_n(x)$ para n par e ímpar, mostre que $P_n(-1) = (-1)^n$.

26. Os polinômios de Legendre têm um papel importante em física matemática. Por exemplo, ao se resolver a equação de Laplace (equação do potencial) em coordenadas esféricas, encontramos a equação

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

onde n é um inteiro positivo. Mostre que a mudança de variável $x = \cos\varphi$ leva a uma equação de Legendre com $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\arccos x)$.

27. Mostre que, para $n = 0, 1, 2, 3$, o polinômio de Legendre correspondente é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Esta fórmula, conhecida como fórmula de Rodrigues,[9] é válida para todos os inteiros positivos n.

28. Mostre que a equação de Legendre também pode ser escrita como

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y.$$

Segue, então, que

$$[(1 - x^2)P_n'(x)]' = -n(n+1)P_n(x) \quad \text{e} \quad [(1 - x^2)P_m'(x)]' = -m(m+1)P_m(x).$$

Multiplicando a primeira equação por $P_m(x)$, a segunda por $P_n(x)$, integrando por partes e depois subtraindo uma equação da outra, mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

Esta propriedade dos polinômios de Legendre é conhecida como a propriedade de ortogonalidade. Se $m = n$, pode-se mostrar que o valor desta integral é $2/(2n + 1)$.

29. Dado um polinômio f de grau n, é possível expressar f como uma combinação linear de $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Usando o resultado do Problema 28, mostre que

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

5.4 Equações de Euler; Pontos Singulares Regulares

Nesta seção vamos começar considerando como resolver equações da forma

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

[9] Olinde Rodrigues (1794–1851) publicou este resultado como parte de sua tese de doutorado na *École Normale* em Paris em 1816. Mais tarde tornou-se banqueiro e reformador social.

na vizinhança de um ponto singular x_0. Lembre-se de que se as funções P, Q e R são polinômios sem fatores comuns, os pontos singulares da Eq. (1) são os pontos nos quais $P(x) = 0$.

Equações de Euler. Uma equação diferencial relativamente simples que tem um ponto singular é a **equação de Euler**[10]

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{2}$$

onde α e beta são constantes reais. Neste caso $P(x) = x^2$, de modo que $x = 0$ é o único ponto singular regular da Eq. (2); todos os outros são pontos ordinários. Por conveniência, vamos considerar, primeiro, o intervalo $x > 0$; mais tarde estenderemos nossos resultados para o intervalo $x < 0$.

Note que $(x^r)' = rx^{r-1}$ e $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. Logo, se supusermos que a Eq. (2) tem uma solução da forma

$$y = x^r, \tag{3}$$

obtemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{4}$$

Se r é raiz da equação de segundo grau

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0, \tag{5}$$

então $L[x^r]$ é zero e $y = x^r$ é uma solução da Eq. (2). As raízes da Eq. (5) são

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2}, \tag{6}$$

e $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Como para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é necessário considerar separadamente os casos nos quais as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, e complexas conjugadas. De fato, a discussão inteira sobre equações de Euler é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes no Capítulo 3, com e^{rt} substituído por x^r.

Raízes Reais e Distintas. Se $F(r) = 0$ tem raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções da Eq. (2). Como

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$$

não se anula se $r_1 \neq r_2$ e $x > 0$, segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Note que, se r não for racional, então x^r é definida por $x^r = e^{r\ln x}$.

EXEMPLO 1

Resolva

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{8}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (8), obtemos

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

Logo $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -1$, de modo que a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{9}$$

Raízes Iguais. Se as raízes r_1 e r_2 são iguais, obtemos apenas uma solução $y_1(x) = x^{r_1}$ da forma proposta. Pode-se obter uma segunda solução pelo método de redução de ordem, mas vamos considerar, para nossa discussão futura, um método alternativo. Como $r_1 = r_2$, $F(r) = (r - r_1)^2$. Assim, nesse caso, além de $F(r_1) =$

[10]Esta equação é chamada algumas vezes de equação de Cauchy-Euler ou equação equidimensional. Ela foi estudada por Euler em cerca de 1740, mas sua solução já era conhecida por Johann Bernoulli antes de 1700.

0, temos, também, $F'(r_1) = 0$. Isso sugere a diferenciação da Eq. (4) em relação a r e, depois, a atribuição r igual a r_1. Diferenciando a Eq. (4) em relação a r, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)].$$

Substituindo $F(r)$, trocando as ordens de integração em relação a x e em relação a r, e notando que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln r$, obtemos

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{10}$$

A expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é 0 para $r = r_1$; portanto,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0 \tag{11}$$

é uma segunda solução da Eq. (2). Calculando o wronskiano, vemos que

$$W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1 - 1}.$$

Logo, x^{r_1} e $x^{r_1} \ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{12}$$

EXEMPLO 2

Resolva

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \tag{13}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (13), obtemos

$$x^r[r(r - 1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

Portanto, $r_1 = r_2 = -2$ e

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0 \tag{14}$$

é a solução geral da Eq. (13).

Raízes Complexas. Finalmente, suponha que as raízes r_1 e r_2 são complexas conjugadas, digamos, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$. Precisamos explicar agora o significado de x^r quando r é complexo. Lembrando que

$$x^r = e^{r \ln x} \tag{15}$$

quando $x > 0$ e r é real, podemos usar essa equação para *definir* x^r quando r é complexo. Então, usando a fórmula de Euler para $e^{i\mu \ln x}$, obtemos

$$\begin{aligned} x^{\lambda + i\mu} &= e^{(\lambda + i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} = x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda[\cos(\mu \ln x) + i\,\mathrm{sen}(\mu \ln x)], \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Com essa definição de x^r para valores complexos de r, pode-se verificar que as regras usuais da álgebra e o cálculo diferencial continuam válidos, logo x^{r_1} e x^{r_2} são, de fato, soluções da Eq. (2). A solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^{\lambda + i\mu} + c_2 x^{\lambda - i\mu}. \tag{17}$$

A desvantagem dessa expressão é que as funções $x^{\lambda + i\mu}$ e $x^{\lambda - i\mu}$ tomam valores complexos. Lembre-se de que tivemos uma situação semelhante no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes quando as raízes eram complexas. Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos observar que as partes real e imaginária de $x^{\lambda + i\mu}$, a saber,

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \quad \text{e} \quad x^\lambda \,\mathrm{sen}(\mu \ln x) \tag{18}$$

também são soluções da Eq. (2). Um cálculo direto mostra que

$$W[x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda \,\mathrm{sen}(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda - 1}.$$

Portanto, essas soluções formam um conjunto fundamental de soluções para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (2) é

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \,\mathrm{sen}(\mu \ln x), \qquad x > 0. \tag{19}$$

EXEMPLO 3 Resolva

$$x^2y'' + xy' + y = 0. \tag{20}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (20), obtemos

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

Logo, $r = \pm i$ e a solução geral é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \qquad x > 0. \tag{21}$$

O fator x^λ não parece explicitamente na Eq. (21) porque, neste exemplo, $\lambda = 0$ e $x^\lambda = 1$.

Vamos considerar, agora, o comportamento qualitativo das soluções da Eq. (2) perto do ponto singular $x = 0$. Isso depende inteiramente da natureza dos expoentes r_1 e r_2. Em primeiro lugar, se r for real e positivo, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos. Por outro lado, se r for real e negativo, então x^r tornar-se-á ilimitado. Finalmente, se $r = 0$, $x^r = 1$. Essas possibilidades estão ilustradas na Figura 5.4.1 para diversos valores de r. Se r for complexo, uma solução típica será $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se λ for, respectivamente, negativo ou positivo, e, também, oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Esses comportamentos estão ilustrados nas Figuras 5.4.2 e 5.4.3 para valores selecionados de λ e de μ. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante. Finalmente, se as raízes são repetidas, então uma das soluções tem a forma $x^r \ln x$, que tende a zero se $r > 0$ e é ilimitada se $r \leq 0$. Um exemplo de cada caso aparece na Figura 5.4.4.

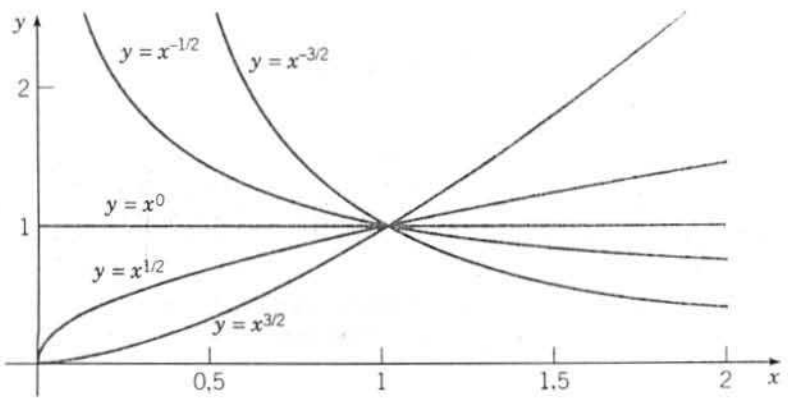


FIGURA 5.4.1 Soluções de uma equação de Euler; raízes reais.

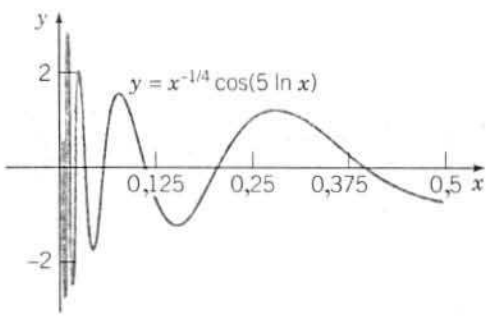


FIGURA 5.4.2 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real negativa.

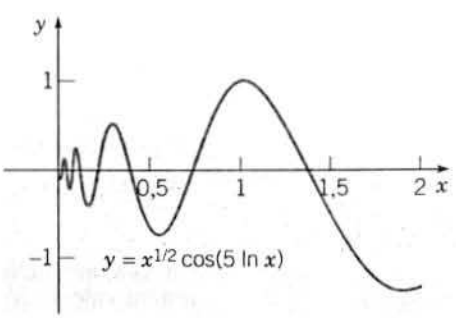


FIGURA 5.4.3 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real positiva.

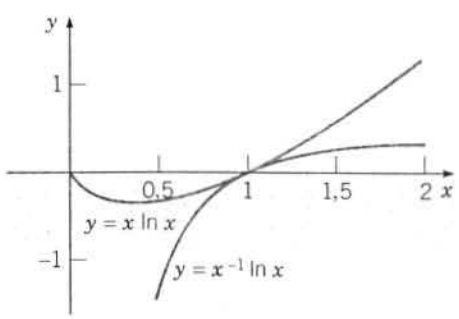


FIGURA 5.4.4 Segundas soluções típicas de uma equação de Euler com raízes iguais.

A extensão das soluções da Eq. (2) para o intervalo $x < 0$ pode ser feita de modo relativamente direto. A dificuldade está em compreender o significado de x^r quando r é negativo e não é inteiro; analogamente, $\ln x$ não está definido para $x < 0$. As soluções da equação de Euler que encontramos para $x > 0$ são válidas para $x < 0$ mas são, em geral, complexas. Assim, no Exemplo 1, a solução $x^{1/2}$ é imaginária para $x < 0$.

Sempre é possível obter soluções reais da equação de Euler (2) no intervalo $x < 0$ fazendo a mudança de variável a seguir. Seja $x = -\xi$, onde $\xi > 0$, e seja $y = u(\xi)$. Temos, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{22}$$

Assim, para $x < 0$, a Eq. (2) fica na forma

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0. \tag{23}$$

Mas, exceto pelos nomes das variáveis, esta é exatamente igual à Eq. (2); das Eqs. (7), (12) e (19) temos

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi) + c_2\xi^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu\ln\xi), \end{cases} \tag{24}$$

dependendo de os zeros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ serem reais e diferentes, reais e iguais ou complexos conjugados. Para obter u em função de x, substituímos ξ por $-x$ nas Eqs. (24).

Podemos combinar os resultados para $x > 0$ e $x < 0$ lembrando que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Logo, precisamos apenas substituir x por $|x|$ nas Eqs. (7), (12) e (19) para obter soluções reais válidas em qualquer intervalo que não contém a origem.

Portanto, a solução geral da equação de Euler (2)

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

em qualquer intervalo que não contém a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

como segue. Se as raízes forem reais e diferentes, então

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \tag{25}$$

Se as raízes forem iguais, então

$$y = (c_1 + c_2\ln|x|)|x|^{r_1}. \tag{26}$$

Se as raízes forem complexas, então

$$y = |x|^{\lambda}\left[c_1\cos(\mu\ln|x|) + c_2\operatorname{sen}(\mu\ln|x|)\right], \tag{27}$$

onde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

As soluções de uma equação de Euler da forma

$$(x - x_0)^2y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0 \tag{28}$$

são semelhantes. Se procurarmos soluções da forma $y = (x - x_0)^r$, então a solução geral é dada por uma das Eqs. (25), (26) ou (27) com $(x - x_0)$ no lugar de x. De outro modo, podemos reduzir a Eq. (28) à forma da Eq. (2) fazendo uma mudança da variável independente $t = x - x_0$.

Pontos Singulares Regulares. Agora vamos voltar a considerar a equação geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

onde x_0 é um ponto singular. Isso significa que $P(x_0) = 0$ e que pelo menos um entre Q e R não se anula em x_0.

Infelizmente, se tentarmos usar os métodos das duas seções precedentes para resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular x_0, descobriremos que esses métodos não funcionam. Isso se deve ao fato de que frequentemente as soluções da Eq. (1) não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor em potências de $x - x_0$. Os Exemplos 1, 2 e 3 anteriores ilustram esse fato; em cada um desses exemplos a solução não tem uma expansão em séries de potências em torno do ponto singular $x = 0$. Portanto, para ter alguma chance de resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular precisamos usar um tipo de expansão em série mais geral.

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos especular se eles não poderiam ser simplesmente ignorados, uma vez que já sabemos como construir soluções em torno de pontos ordinários. No entanto, isso não é possível porque os pontos singulares determinam as características principais das soluções de forma muito mais profunda do que poderíamos suspeitar à primeira vista. Em uma vizinhança de um ponto singular a solução torna-se, muitas vezes, muito grande em módulo ou experimenta mudanças rápidas em seu módulo. Assim, o comportamento de um sistema físico modela-

do por uma equação diferencial é, com frequência, mais interessante em uma vizinhança de um ponto singular. Muitas vezes, singularidades geométricas em um problema físico, como bicos ou arestas, geram pontos singulares na equação diferencial correspondente. Então, embora queiramos inicialmente evitar os poucos pontos onde uma equação diferencial é singular, é precisamente nesses pontos que é necessário estudar a equação com mais cuidado.

Como alternativa aos métodos analíticos poderia ser considerada a utilização de métodos numéricos, que serão discutidos no Capítulo 8. Entretanto, esses métodos não são adequados para o estudo de soluções na proximidade de um ponto singular. Dessa forma, mesmo adotando uma abordagem numérica é vantajoso combiná-la com os métodos analíticos deste capítulo para que se possa examinar o comportamento das soluções na proximidade de um ponto singular.

Sem qualquer informação adicional sobre o comportamento de Q/P e R/P na vizinhança do ponto singular é impossível descrever o comportamento das soluções da Eq. (1) perto de $x = x_0$. Pode acontecer de existirem duas soluções distintas da Eq. (1) que permanecem limitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 3); ou uma delas pode permanecer limitada enquanto a outra se torna ilimitada quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 1); ou ambas podem tornar-se ilimitadas quando $x \to x_0$ (como no Exemplo 2). Se a Eq. (1) tem soluções que se tornam ilimitadas quando $x \to x_0$, muitas vezes é importante determinar como essas soluções se comportam quando $x \to x_0$. Por exemplo, $y \to \infty$ do mesmo modo que $(x - x_0)^{-1}$, ou como $(x - x_0)^{-1/2}$ ou de alguma outra maneira?

Nosso objetivo é estender o método já desenvolvido para resolver a Eq. (1) perto de um ponto ordinário de modo que ele possa também ser aplicado na vizinhança de um ponto singular x_0. Para fazer isso de modo razoavelmente simples é necessário nos restringirmos a casos onde as singularidades das funções Q/P e R/P em $x = x_0$ não são muito severas – ou seja, o que poderíamos chamar de "singularidades fracas". Neste ponto não é claro o que seria exatamente uma singularidade aceitável. No entanto, ao desenvolvermos o método de solução você verá que as condições apropriadas (veja também o Problema 21 na Seção 5.6) para distinguirmos "singularidades fracas" são

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \tag{29}$$

e

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{é finito.} \tag{30}$$

Isso significa que a singularidade em Q/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-1}$ e a singularidade em R/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-2}$. Tal ponto é chamado de **ponto singular regular** da Eq. (1). Para equações com coeficientes mais gerais do que polinômios, x_0 é um ponto singular regular da Eq. (1) se for um ponto singular e se ambas as funções[11]

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \tag{31}$$

tiverem séries de Taylor convergentes em torno de x_0 – ou seja, se as funções na Eq. (31) forem analíticas em $x = x_0$. As Eqs. (29) e (30) implicam que isso será verdade quando P, Q e R forem polinômios. Qualquer ponto singular da Eq. (1) que não seja um ponto singular regular é chamado de **ponto singular irregular** da Eq. (1).

Note que as condições nas Eqs. (29) e (30) são satisfeitas pela equação de Euler (28). Logo, a singularidade em uma equação de Euler é um ponto singular regular. De fato, veremos que todas as equações da forma (1) se comportam de modo muito parecido com as equações de Euler perto de um ponto singular regular. Ou seja, soluções perto de um ponto singular regular podem incluir potências de x com expoentes negativos ou que não sejam inteiros, logaritmos ou senos ou cossenos com argumentos logarítmicos.

Nas seções a seguir discutiremos como resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular regular. Uma discussão de soluções de equações diferenciais na vizinhança de pontos singulares irregulares é mais complicada e pode ser encontrada em livros mais avançados.

EXEMPLO 4

Determine os pontos singulares da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \tag{32}$$

e determine se eles são regulares ou irregulares.

[11] As funções dadas na Eq. (31) podem não estar definidas em x_0; nesse caso, são atribuídos seus valores em x_0 como seus limites quando $x \to x_0$.

Neste caso $P(x) = 1 - x^2$, de modo que os pontos singulares são $x = 1$ e $x = -1$. Observe que quando dividimos a Eq. (32) por $1 - x^2$ os coeficientes de y' e de y ficam iguais a $-2x/(1 - x^2)$ e $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, respectivamente. Vamos considerar primeiro o ponto $x = 1$. Então, das Eqs. (29) e (30) calculamos

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0.$$

Como esses limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Pode-se mostrar, de maneira semelhante, que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

EXEMPLO 5

Determine os pontos singulares da equação diferencial

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

Dividindo a equação diferencial por $2x(x-2)^2$, temos

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = 0,$$

de modo que $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x-2)^2$ e $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x-2)$. Os pontos singulares são $x = 0$ e $x = 2$. Considere $x = 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0.$$

Como esses limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. Para $x = 2$, temos

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)},$$

de modo que o limite não existe; portanto, $x = 2$ é um ponto singular irregular.

EXEMPLO 6

Determine os pontos singulares de

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

O único ponto singular é $x = \pi/2$. Para estudá-lo, vamos considerar as funções

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)p(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$

e

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \operatorname{sen} x.$$

A partir da série de Taylor para $\cos x$ em torno de $x = \pi/2$ encontramos

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^4}{5!} + \cdots,$$

que converge para todo x. Analogamente, $\operatorname{sen} x$ é analítica em $x = \pi/2$. Portanto, concluímos que $\pi/2$ é um ponto singular regular para esta equação.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, determine a solução geral da equação diferencial dada, válida em qualquer intervalo que não inclui o ponto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + 0{,}75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Faça o gráfico da solução e descreva como ela se comporta quando $x \to 0$.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$
14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$
16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

Em cada um dos Problemas de 17 a 34, encontre todos os pontos singulares da equação dada e determine se cada um deles é regular ou irregular.

17. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
18. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
19. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
20. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
21. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
22. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
23. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
24. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$
25. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
26. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
27. $(x^2+x-2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
28. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
29. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$
30. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$
31. $x^2y'' - 3(\operatorname{sen} x)y' + (1+x^2)y = 0$
32. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
33. $(\operatorname{sen} x)y'' + xy' + 4y = 0$
34. $(x\operatorname{sen} x)y'' + 3y' + xy = 0$
35. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
36. Encontre todos os valores de β para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \beta y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
37. Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial $x^2y'' - 2y = 0, y(1) = 1, y'(1) = \gamma$ permaneça limitada quando $x \to 0$.
38. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.
39. Considere a equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Encontre condições sobre α e β para que:
    (a) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to 0$.
    (b) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$.
    (c) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to \infty$.
    (d) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to \infty$.
    (e) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.
40. Usando o método de redução de ordem, mostre que se r_1 é uma raiz repetida de

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0,$$

então x^{r_1} e $x^{r_1}\ln x$ são soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.

Em cada um dos Problemas 41 e 42, mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Tente, em cada problema, encontrar soluções da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que (exceto por múltiplos constantes) existe apenas uma solução não nula dessa forma para o Problema 41 e que não existem soluções não nulas dessa forma para

o Problema 42. Assim, em nenhum dos casos a solução geral pode ser encontrada desse modo. Isso é típico de equações com pontos singulares.

41. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

42. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$

43. **Singularidades no Infinito.** As definições de ponto ordinário e ponto singular regular dadas nas seções precedentes só se aplicam se o ponto x_0 é finito. Em trabalhos mais avançados de equações diferenciais é necessário, muitas vezes, discutir o ponto no infinito. Isso é feito através da mudança de variável $\xi = 1/x$ e estudando-se a equação resultante em $\xi = 0$. Mostre que, para a equação diferencial

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

o ponto no infinito é um ponto ordinário se

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

têm expansões em série de Taylor em torno de $\xi = 0$. Mostre, também, que o ponto no infinito é um ponto singular regular se pelo menos uma dessas funções não tem expansão em série de Taylor, mas ambas as funções

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

têm tais expansões.

Em cada um dos Problemas de 44 a 49, use os resultados do Problema 43 para determinar se o ponto no infinito é um ponto ordinário, singular regular ou singular irregular da equação diferencial dada.

44. $y'' + y = 0$

45. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

46. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, Equação de Legendre

47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, Equação de Bessel

48. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, Equação de Hermite

49. $y'' - xy = 0$, Equação de Airy

5.5 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte I

Vamos considerar, agora, o problema de resolver a equação geral linear de segunda ordem

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

em uma vizinhança de um ponto singular regular $x = x_0$. Vamos supor, por conveniência, que $x_0 = 0$. Se $x_0 \neq 0$, podemos transformar a equação em uma equação para a qual o ponto singular regular está na origem igualando $x - x_0$ a t.

O fato de que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ e $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ têm limites finitos quando $x \to 0$ e são analíticas em $x = 0$. Logo, têm expansão em séries de potências convergentes da forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

em algum intervalo $|x| < \rho$ em torno da origem, onde $\rho > 0$. Para fazer com que as funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ apareçam na Eq. (1), é conveniente dividi-la por $P(x)$ e depois multiplicá-la por x^2, obtendo

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3}$$

ou

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \tag{4}$$

Se todos os coeficientes p_n e q_n forem nulos, com a possível exceção de

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \tag{5}$$

então a Eq. (4) se reduz à equação de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{6}$$

que foi discutida na seção precedente. É claro que, em geral, alguns dos p_n e q_n, $n \geq 1$ não são nulos. Entretanto, o caráter essencial das soluções da Eq. (4) é idêntico ao das soluções da equação de Euler (6). A presença dos termos $p_1x + \ldots + p_nx^n + \ldots$ e $q_1x + \ldots + q_nx^n + \ldots$ só complica os cálculos.

Vamos restringir nossa discussão principalmente ao intervalo $x > 0$. O intervalo $x < 0$ pode ser tratado, como para a equação de Euler, pela mudança de variável $x = -\xi$ e posterior resolução da equação resultante para $\xi > 0$.

Como os coeficientes da Eq. (4) são "coeficientes de Euler" multiplicados por série de potências, é natural procurar soluções da forma "soluções de Euler" multiplicadas por série de potências. Supomos, então, que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{7}$$

onde $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, r é o expoente do primeiro termo da série e a_0 é seu coeficiente. Como parte da solução, temos que determinar:

1. Os valores de r para os quais a Eq. (1) tem uma solução da forma (7).
2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n.
3. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

A teoria geral é devida a Frobenius,[12] e é razoavelmente complicada. Em vez de tentar apresentar essa teoria vamos supor, simplesmente, nesta e nas duas próximas seções, que existe uma solução da forma especificada. Em particular, vamos supor que qualquer série de potências em uma expressão para a solução tem raio de convergência não nulo e vamos nos concentrar em mostrar como determinar os coeficientes em tal série. Para ilustrar o método de Frobenius, vamos considerar primeiro um exemplo.

EXEMPLO 1

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{8}$$

É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (8). Além disso, $xp(x) = -1/2$ e $x^2q(x) = (1 + x)/2$. Assim, $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ e todos os outros coeficientes p_n e q_n são nulos. Então, da Eq. (6), a equação de Euler correspondente à Eq. (8) é

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{9}$$

Para resolver a Eq. (8), vamos supor que existe uma solução da forma (7). Logo, y' e y'' são dados por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1} \tag{10}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \tag{11}$$

Substituindo as expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+1}. \tag{12}$$

O último termo na Eq. (12) pode ser escrito como $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$, de modo que, combinando os termos na Eq. (12), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = a_0[2r(r - 1) - r + 1]x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \{[2(r + n)(r + n - 1) - (r + n) + 1]a_n + a_{n-1}\}x^{r+n} = 0. \tag{13}$$

[12]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) foi (como Fuchs) estudante e depois professor na University of Berlim. Mostrou como construir soluções em série em torno de pontos singulares regulares em 1874. Seu trabalho mais importante, no entanto, foi em álgebra, onde foi um dos expoentes entre os primeiros a desenvolver a teoria dos grupos.

Como a Eq. (13) tem que ser satisfeita para todo x, o coeficiente de cada potência de x na Eq. (13) tem que ser zero. Como $a_0 \neq 0$, obtemos do coeficiente de x^r

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \tag{14}$$

A Eq. (14) é chamada de **equação indicial** para a Eq. (8). Note que ela é exatamente a equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler (9) associada à Eq. (8). As raízes da equação indicial são

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2. \tag{15}$$

Esses valores de r são chamados de **expoentes na singularidade** para o ponto singular regular $x = 0$. Eles determinam o comportamento qualitativo da solução (7) na vizinhança do ponto singular.

Vamos voltar, agora, para a Eq. (13) e igualar o coeficiente de x^{r+n} a zero. Isso nos fornece a relação

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0, \qquad n \geq 1, \tag{16}$$

ou

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1}$$

$$= -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \qquad n \geq 1. \tag{17}$$

Para cada raiz r_1 e r_2 da equação indicial, usamos a relação de recorrência (17) para determinar um conjunto de coeficientes $a_1, a_2, \ldots$ Para $r = r_1 = 1$, a Eq. (17) fica

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \qquad n \geq 1.$$

Logo,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)},$$

e

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

Em geral, temos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!}a_0, \qquad n \geq 4. \tag{18}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (18) por $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$, podemos reescrever a_n como

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}a_0, \qquad n \geq 1.$$

Portanto, se omitirmos a constante multiplicativa a_0, uma solução da Eq. (8) é

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}x^n\right], \qquad x > 0. \tag{19}$$

Para determinar o raio de convergência da série na Eq. (19), usamos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

para todo x. Logo, a série converge para todo x.

Vamos proceder de modo análogo para a segunda raiz $r = r_2 = \frac{1}{2}$. Da Eq. (17), temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

Portanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]} a_0, \qquad n \geq 4. \tag{20}$$

Como no caso da primeira raiz r_1, multiplicamos o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$. Temos, então,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \qquad n \geq 1.$$

Omitindo novamente a constante multiplicativa a_0, obtemos a segunda solução

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n\right], \qquad x > 0. \tag{21}$$

Como anteriormente, podemos mostrar que a série na Eq. (21) converge para todo x. Como y_1 e y_2 se comportam como x e $x^{1/2}$, respectivamente, perto de $x = 0$, estas funções formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad x > 0.$$

O exemplo precedente ilustra o fato de que se $x = 0$ for um ponto singular regular, então algumas vezes existirão duas soluções da forma (7) em uma vizinhança desse ponto. Analogamente, se existir um ponto singular regular em $x = x_0$, poderão existir duas soluções da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{22}$$

que são válidas perto de $x = x_0$. No entanto, assim como uma equação de Euler pode não ter duas soluções da forma $y = x^r$, uma equação mais geral com um ponto singular regular pode não ter duas soluções da forma (7) ou (22). Em particular, vamos mostrar na próxima seção que se as raízes r_1 e r_2 da equação indicial forem iguais ou diferirem por um inteiro, então a segunda solução terá normalmente uma estrutura mais complicada. Em todos os casos, no entanto, é possível encontrar pelo menos uma solução da forma (7) ou (22); se r_1 e r_2 diferirem por um inteiro, essa solução corresponderá ao maior valor de r. Se existir apenas uma dessas soluções, então a segunda solução envolverá um termo logarítmico, como na equação de Euler quando as raízes da equação característica são iguais. O método de redução de ordem ou algum outro procedimento pode ser usado para se determinar a segunda solução nesse caso. Isso será discutido nas Seções 5.6 e 5.7.

Se as raízes da equação indicial forem complexas, então elas não poderão ser iguais nem diferir por um inteiro, de modo que sempre existirão duas soluções da forma (7) ou (22). É claro que essas soluções são funções complexas de x. No entanto, como para a equação de Euler, é possível obter soluções reais tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas.

Finalmente, vamos mencionar uma questão prática. Se P, Q e R forem polinômios, será bem melhor, muitas vezes, trabalhar diretamente com a Eq. (1) do que com a Eq. (3). Isso evita a necessidade de expandir $xQ(x)/P(x)$ e $x^2R(x)/P(x)$ em séries de potências. Por exemplo, é mais conveniente considerar a equação

$$x(1 + x)y'' + 2y' + xy = 0$$

do que escrevê-la na forma

$$x^2 y'' + \frac{2x}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0,$$

o que implicaria expandir $2x/(1 + x)$ e $x^2/(1 + x)$ em séries de potências.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10:

(a) Mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$.

(b) Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial.

(c) Encontre a solução em série ($x > 0$) correspondente à maior raiz.

(d) Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre, também, a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10. $x^2y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$
11. A equação de Legendre de ordem α é

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

A solução desta equação perto do ponto ordinário $x = 0$ foi discutida nos Problemas 22 e 23 da Seção 5.3. O Exemplo 4 da Seção 5.4 mostrou que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares.

(a) Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto $x = 1$.

(b) Encontre uma solução em série de potências de $x - 1$ para $x - 1 > 0$.

Sugestão: escreva $1 + x = 2 + (x - 1)$ e $x = 1 + (x - 1)$. Outra maneira é fazer a mudança de variável $x - 1 = t$ e determinar uma solução em série de potências de t.

12. A equação de Chebyshev é

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

onde α é constante; veja o Problema 10 da Seção 5.3.

(a) Mostre que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares regulares e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.

(b) Encontre duas soluções em torno de $x = 1$.

13. A equação diferencial de Laguerre[13] é

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência.

(c) Encontre uma solução ($x > 0$). Mostre que se $\lambda = m$ for um inteiro positivo, essa solução se reduzirá a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como o polinômio de Laguerre, $L_m(x)$.

14. A equação de Bessel de ordem zero é

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(d) Mostre que a série para $J_0(x)$ converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.

15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico.

Sugestão: se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. A equação de Bessel de ordem um é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

[13] Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), um geômetra e analista francês, estudou os polinômios que levam seu nome em torno de 1879.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\, n!\, 2^{2n}}.$$

(d) Mostre que a série converge para $J_1(x)$ para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.

(e) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

5.6 Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular, Parte II

Vamos considerar, agora, o problema geral de determinar uma solução da equação

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0, \tag{1}$$

onde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

e ambas as séries convergem em um intervalo $|x| < \rho$ para algum $\rho > 0$. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, e a equação de Euler correspondente é

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0. \tag{3}$$

Procuramos uma solução da Eq. (1) para $x > 0$ e supomos que ela tem a forma

$$y = \phi(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \tag{4}$$

onde $a_0 \neq 0$, e escrevemos $y = \phi(r, x)$ para enfatizar que ϕ depende tanto de r quanto de x. Segue que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}. \tag{5}$$

Então, substituindo as Eqs. (2), (4) e (5) na Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned} &a_0 r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\ &\quad + (p_0 + p_1 x + \cdots + p_n x^n + \cdots) \\ &\qquad \times [a_0 r x^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\ &\quad + (q_0 + q_1 x + \cdots + q_n x^n + \cdots) \\ &\qquad \times (a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \cdots + a_n x^{r+n} + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando as séries infinitas e depois juntando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} &a_0 F(r) x^r + [a_1 F(r+1) + a_0(p_1 r + q_1)]x^{r+1} \\ &\quad + \left\{a_2 F(r+2) + a_0(p_2 r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\right\} x^{r+2} \\ &\quad + \cdots + \left\{a_n F(r+n) + a_0(p_n r + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}]\right. \\ &\quad \left. + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\right\} x^{r+n} + \cdots = 0, \end{aligned}$$

ou, em forma mais compacta,

$$L[\phi](r, x) = a_0 F(r) x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n) a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0, \tag{6}$$

onde

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0. \tag{7}$$

Para que a Eq. (6) seja satisfeita para todo $x > 0$, o coeficiente de cada potência de x tem que ser igual a zero.

Como $a_0 \neq 0$, o termo envolvendo x^r leva à equação $F(r) = 0$. Esta equação é chamada de **equação indicial**; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler (3). Vamos denotar as raízes da equação indicial por r_1 e r_2, com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais. Se as raízes forem complexas, não importa sua designação. Só podemos esperar encontrar soluções da Eq. (1) da forma (4) para esses valores de r. As raízes r_1 e r_2 são chamadas de **expoentes na singularidade**; elas determinam a natureza qualitativa das soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Igualando a zero o coeficiente de x^{r+n} na Eq. (6), obtemos a **relação de recorrência**

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1. \tag{8}$$

A Eq. (8) mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ela mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em função de a_0 e dos coeficientes das séries para $xp(x)$ e para $x^2q(x)$ desde que $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n), \ldots$ não sejam nulos. Os únicos valores de r para os quais $F(r) = 0$ são $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$. Em consequência, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Logo, sempre podemos determinar uma solução da Eq. (1) da forma (4), a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{9}$$

Introduzimos a notação $a_n(r_1)$ para indicar que a_n foi determinado da Eq. (8) com $r = r_1$. Para especificar a constante arbitrária na solução, escolhemos a_0 como 1.

Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo, então $r_2 + n$ será diferente de r_1 para todo valor de $n \geq 1$; portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ e sempre podemos obter uma segunda solução

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{10}$$

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário, discutidas na Seção 5.3, as séries nas Eqs. (9) e (10) convergem pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ onde ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ convergem. Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em $x = 0$. Assim, o comportamento singular das funções y_1 e y_2, se existir, será devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas. A seguir, para obter soluções reais para $x < 0$ podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Como poderíamos esperar da nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} na Eq. (9) e x^{r_2} na Eq. (10) por $|x|^{r_1}$ e $|x|^{r_2}$, respectivamente. Finalmente, note que se r_1 e r_2 forem números complexos, então serão necessariamente complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + N$ para qualquer inteiro positivo N. Assim, nesse caso sempre podemos encontrar duas soluções em série da forma (4); no entanto, elas são funções complexas de x. Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas. Os casos excepcionais em que $r_1 = r_2$ ou $r_1 - r_2 = N$, onde N é um inteiro positivo, necessitam de uma discussão maior e serão considerados mais tarde, nesta seção.

É importante compreender que r_1 e r_2, os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que eles determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2, basta resolver a equação indicial de segundo grau

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \tag{11}$$

cujos coeficientes são dados por

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \tag{12}$$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para se classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, em geral eles já foram determinados em um estágio anterior da investigação.

Além disso, se $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{13}$$

onde as funções P, Q e R são polinômios, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Então,

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{14}$$

Finalmente, os raios de convergência das séries nas Eqs. (9) e (10) são, pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo de $P(x)$ diferente do próprio $x = 0$.

EXEMPLO 1

Discuta a natureza das soluções da equação

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

perto dos pontos singulares.

Esta equação é da forma (13) com $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3+x$ e $R(x) = -x$. Os pontos $x = 0$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

Além disso, da Eq. (14), $p_0 = \frac{3}{2}$ e $q_0 = 0$. Logo, a equação indicial é $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ e as raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Como essas raízes não são iguais nem diferem por um inteiro, existem duas soluções da forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\tfrac{1}{2}\right)x^n\right]$$

para $0 < |x| < \rho$. Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, a distância de $x = 0$ a $x = -1$, o outro zero de $P(x)$. Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \to 0$, é, de fato, analítica aí, e que a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \to 0$.

O ponto $x = -1$ também é um ponto singular regular, pois

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x\to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

Nesse caso, $p_0 = -1$, $q_0 = 0$, de modo que a equação indicial é $r(r-1) - r = 0$. As raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$. Correspondendo à maior raiz existe uma solução da forma

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right].$$

A série converge pelo menos para $|x+1| < 1$ e y_1 é uma função analítica aí. Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n.$$

Não podemos dizer mais nada sem uma análise mais profunda.

Note que não foram necessários cálculos complicados para se descobrir informações sobre as soluções apresentadas neste exemplo. Só precisamos calcular alguns limites e resolver duas equações de segundo grau.

Vamos considerar, agora, os casos nos quais a equação indicial tem raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo, $r_1 - r_2 = N$. Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma (9) correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial. Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução conteria um termo logarítmico. Isso também poderá ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro positivo.

Raízes Iguais. O método para encontrar a segunda solução é essencialmente o mesmo que usamos para encontrar a segunda solução da equação de Euler (veja a Seção 5.4) quando as raízes da equação indicial eram iguais. Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência (8). Para essa escolha de $a_n(r)$ para $n \geq 1$, a Eq. (6) se reduz a

$$L[\phi](r,x) = a_0F(r)x^r = a_0(r-r_1)^2x^r, \tag{15}$$

já que r_1 é uma raiz repetida de $F(r)$. Fazendo $r = r_1$ na Eq. (15), encontramos que $L[\phi](r_1, x) = 0$; logo, como já sabíamos, $y_1(x)$ dado pela Eq. (9) é uma solução da Eq. (1). Mas, mais importante, segue também da Eq. (15), da mesma forma que para a equação de Euler, que

$$L\left[\frac{\partial\phi}{\partial r}\right](r_1,x) = a_0\frac{\partial}{\partial r}[x^r(r-r_1)^2]\Big|_{r=r_1}$$

$$= a_0[(r-r_1)^2x^r\ln x + 2(r-r_1)x^r]\Big|_{r=r_1} = 0. \tag{16}$$

Portanto, uma segunda solução da Eq. (1) é

$$y_2(x) = \frac{\partial\phi(r,x)}{\partial r}\Big|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(r)x^n\right]\right\}\Big|_{r=r_1}$$

$$= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n$$

$$= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n, \qquad x > 0, \tag{17}$$

onde $a_n'(r_1)$ denota a derivada da_n/dr calculada em $r = r_1$.

Pode ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência (8) e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r. Outro maneira é simplesmente supor que y tem a *forma* da Eq. (17). Ou seja, suponha que

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n, \qquad x > 0, \tag{18}$$

onde $y_1(x)$ já foi encontrado. Os coeficientes b_n são calculados, como de hábito, substituindo na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero. Uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem para encontrar $y_2(x)$ uma vez conhecido $y_1(x)$.

Raízes r_1 e r_2 Diferindo por um Inteiro N. Nesse caso a dedução da segunda solução é bem mais complicada, e não será dada aqui. A forma dessa solução é dada pela Eq. (24) no próximo teorema. Os coeficientes $c_n(r_2)$ na Eq. (24) são dados por

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r-r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{19}$$

onde $a_n(r)$ é determinado da relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$. Além disso, o coeficiente de a na Eq. (24) é

$$a = \lim_{r\to r_2}(r-r_2)a_N(r). \tag{20}$$

Se $a_N(r_2)$ for finito, então $a = 0$ e y_2 não tem termo logarítmico. Uma dedução completa das fórmulas (19) e (20) pode ser encontrada no livro de Coddington (Capítulo 4).

Na prática, a melhor maneira de determinar se $a = 0$ na segunda solução é tentar simplesmente calcular os a_n correspondentes à raiz r_2 e ver se é possível determinar $a_N(r_2)$. Se for, não há problema. Se não, precisamos usar a forma (24) com $a \neq 0$.

Quando $r_1 - r_2 = N$ existem, novamente, três maneiras de se encontrar uma segunda solução. Primeiro, podemos calcular a e $c_n(r_2)$ diretamente, substituindo y pela expressão (24) na Eq. (1). Segundo, podemos calcular $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) usando as fórmulas (19) e (20). Se esse for o procedimento planejado, ao calcular a solução correspondente a $r = r_1$ não se esqueça de obter a fórmula geral para $a_n(r)$, em vez de encontrar apenas $a_n(r_1)$. A terceira maneira é usar o método de redução de ordem.

Teorema 5.6.1 Considere a equação diferencial (1),

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

onde $x = 0$ é um ponto singular regular. Então, $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em $x = 0$ com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, onde $\rho > 0$ é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para $xp(x)$ e $x^2q(x)$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

com $r_1 \geq r_2$, se r_1 e r_2 forem reais. Então, em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, existe uma solução da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \tag{21}$$

onde os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$ e $r = r_1$.

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então em um dos intervalos $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$ existe uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \tag{22}$$

Os $a_n(r_2)$ também são determinados pela relação de recorrência (8), com $a_0 = 1$ e $r = r_2$. As séries de potências nas Eqs. (21) e (22) convergem pelo menos para $|x| < \rho$.

Se $r_1 = r_2$, então a segunda solução é

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \tag{23}$$

Se $r_1 - r_2 = N$, um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \tag{24}$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante a podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em série y na Eq. (1). A constante a pode ser nula, caso em que a solução (24) não tem termo logarítmico. Cada uma das séries nas Eqs. (23) e (24) converge pelo menos para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Em todos os três casos as duas soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre todos os pontos singulares regulares da equação diferencial dada.

(b) Determine a equação indicial e os expoentes na singularidade para cada ponto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2y'' + 3(\operatorname{sen}x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen}x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$
9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

Em cada um dos Problemas de 13 a 17:

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial dada.

(b) Encontre os expoentes no ponto singular $x = 0$.

(c) Encontre os três primeiros termos não nulos em cada uma das duas soluções (que não são múltiplas uma da outra) em torno de $x = 0$.

13. $xy'' + y' - y = 0$
14. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$; Veja o Problema 1
15. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$; Veja o Problema 3
16. $xy'' + y = 0$
17. $x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$
18. (a) Mostre que

$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$

tem um ponto singular regular em $x = 1$.

(b) Determine as raízes da equação indicial em $x = 1$.

(c) Determine os três primeiros termos não nulos na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{r+n}$ correspondente à raiz maior. Tome $x - 1 > 0$.

(d) Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência da série?

19. Em diversos problemas em física matemática é necessário estudar a equação diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{i}$$

onde α, β e γ são constantes. Essa equação é conhecida como **equação hipergeométrica**.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $1 - \gamma$.

(b) Mostre que $x = 1$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $\gamma - \alpha - \beta$.

(c) Supondo que $1 - \gamma$ não é um inteiro positivo, mostre que uma solução da Eq. (i) em uma vizinhança de $x = 0$ é

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$

Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência desta série?

(d) Supondo que $1 - \gamma$ não é inteiro, mostre que uma segunda solução para $0 < x < 1$ é

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$

(e) Mostre que o ponto no infinito é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são α e β. Veja o Problema 43 da Seção 5.4.

20. Considere a equação diferencial

$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

onde α e β são constantes reais e $\alpha \neq 0$.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Ao tentar encontrar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, mostre que a equação indicial para r é linear e, portanto, existe apenas uma solução formal dessa forma suposta.

(c) Mostre que se $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, então a solução formal em série termina e é, portanto, uma solução de fato. Para os outros valores de β/α mostre que a solução formal em série tem raio de convergência nulo, logo não representa uma solução de fato em nenhum intervalo.

21. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \tag{i}$$

onde $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ são números reais e s e t são inteiros positivos, arbitrários por enquanto.

(a) Mostre que, se $s > 1$ ou $t > 2$, então o ponto $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Tente encontrar uma solução da Eq. (i) da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \tag{ii}$$

Mostre que se $s = 2$ e $t = 2$, então existe apenas um valor possível para r para o qual existe uma solução formal da Eq. (i) da forma (ii).

(c) Mostre que se $s = 1$ e $t = 3$, então não existem soluções da Eq. (i) da forma (ii).

(d) Mostre que os valores máximos de s e de t para os quais a equação indicial é de segundo grau em r [e, portanto, podemos esperar encontrar duas soluções da forma (ii)] são $s = 1$ e $t = 2$. Estas são precisa-

mente as condições que distinguem uma "singularidade fraca", ou um ponto singular regular, de um ponto singular irregular, como definimos na Seção 5.4.

Como aviso, deveríamos esclarecer que embora seja possível, algumas vezes, obter uma solução formal em série da forma (ii) em um ponto singular irregular, a série pode não ter raio de convergência positivo. Veja o Problema 20 para um exemplo.

5.7 Equação de Bessel

Nesta seção vamos ilustrar a discussão na Seção 5.6 considerando três casos especiais da equação de Bessel,[14]

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{1}$$

onde ν é uma constante. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1). Temos

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1,$$

$$q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2.$$

Logo, a equação indicial é

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0,$$

com raízes $r = \pm\nu$. Consideraremos os três casos $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ e $\nu = 1$ para o intervalo $x > 0$.

Equação de Bessel de Ordem Zero. Neste caso $\nu = 0$, de modo que a Eq. (1) fica reduzida a

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \tag{2}$$

e as raízes da equação indicial são iguais. Substituindo

$$y = \phi(r,x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{3}$$

na Eq. (2), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Como já observamos, as raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, logo temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \qquad n \geq 2. \tag{5}$$

Para determinar $y_1(x)$ fazemos r igual a 0. Então, da Eq. (4) segue que, para que o coeficiente de x^{r+1} seja zero, temos que escolher $a_1 = 0$. Portanto, da Eq. (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Além disso,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2,4,6,8,\ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

[14]Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) começou uma carreira em negócios quando jovem, mas se interessou logo por astronomia e matemática. Foi designado diretor do observatório em Königsberg em 1810 e manteve essa posição até sua morte. Seu estudo de perturbações planetárias levou-o, em 1824, a fazer a primeira análise sistemática das soluções da Eq. (1), conhecidas como funções de Bessel. É famoso, também, por fazer o primeiro cálculo preciso da distância da Terra a uma estrela em 1838.

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1,2,3,\ldots.$$

Assim,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \qquad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \qquad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1,2,3,\ldots. \tag{6}$$

Portanto,

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0. \tag{7}$$

A função entre colchetes é conhecida como a *função de Bessel de primeira espécie de ordem zero*, e é denotada por $J_0(x)$. Segue do Teorema 5.6.1 que a série converge para todo x e que J_0 é analítica em $x = 0$. Algumas das propriedades importantes de J_0 estão discutidas nos problemas. A Figura 5.7.1 mostra os gráficos de $y = J_0(x)$ e de algumas das somas parciais da série (7).

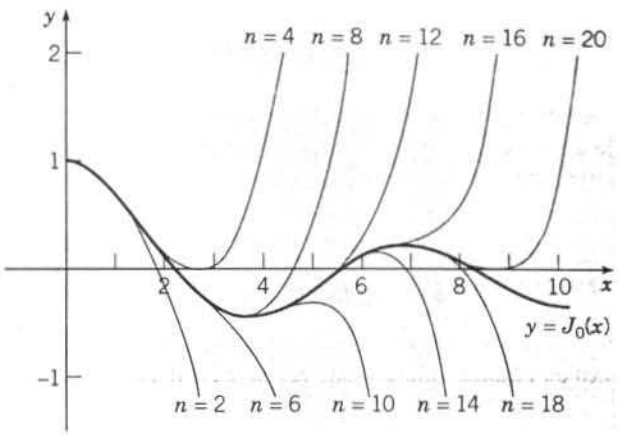


FIGURA 5.7.1 Aproximações polinomiais de $J_0(x)$. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação.

Para determinar $y_2(x)$, vamos calcular $a'_n(0)$.[15] Primeiro, note que devido ao coeficiente de x^{r+1} na Eq. (4) $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. Logo, $a_1(r) = 0$ para todo r próximo de $r = 0$. Então, não só $a_1(0) = 0$, mas também $a'_1(0) = 0$. Da relação de recorrência (5) segue que $a'_3(0) = a'_5(0) = \ldots = a'_{2n+1}(0) = \ldots = 0$; logo, precisamos apenas calcular $a'_{2m}(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Da Eq. (5), temos

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r+2m)^2, \qquad m = 1,2,3,\ldots.$$

Resolvendo esta relação de recorrência, obtemos

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2\cdots(r+2m)^2}, \qquad m \geq 3. \tag{8}$$

Podemos efetuar os cálculos de $a'_{2m}(r)$ de maneira mais conveniente notando que, se

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n},$$

e se x for diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}.$$

[15] O Problema 10 esquematiza um procedimento alternativo no qual simplesmente substituímos a fórmula (23) da Seção 5.6 na Eq. (2) e depois determinamos os b_n.

Aplicando este resultado a $a_{2m}(r)$ na Eq. (8), vemos que

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right),$$

e fazendo r igual a 0, obtemos

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0).$$

Substituindo $a_{2m}(0)$ dado pela Eq. (6) e fazendo

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \tag{9}$$

obtemos, finalmente,

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

A segunda solução da equação de Bessel de ordem zero é encontrada fazendo-se $a_0 = 1$ e substituindo-se, na Eq. (23) da Seção 5.6, $y_1(x)$ e $b_{2m}(0) = a'_{2m}(0)$. Obtemos

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \qquad x > 0. \tag{10}$$

Em vez de y_2, a segunda solução considerada, em geral, é uma determinada combinação linear de J_0 e y_2. Ela é conhecida como a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero, e é denotada por Y_0. Seguindo Copson (Capítulo 12), definimos[16]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]. \tag{11}$$

Aqui, γ é uma constante, conhecida como a constante de Euler-Máscheroni;[17] ela é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n) \cong 0{,}5772. \tag{12}$$

Substituindo $y_2(x)$ na Eq. (11), obtemos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right], \qquad x > 0. \tag{13}$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Note que $J_0(x) \to 1$ quando $x \to 0$ e que $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x = 0$, ou seja, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ quando $x \to 0$ por valores positivos. Então, se estivermos interessados em soluções da equação de Bessel de ordem zero que sejam finitas na origem, o que ocorre muitas vezes, temos que descartar Y_0. Os gráficos das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ estão ilustrados na Figura 5.7.2.

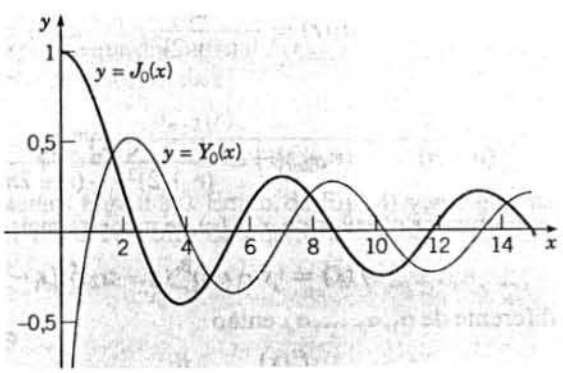


FIGURA 5.7.2 As funções de Bessel J_0 e Y_0.

[16]Outros autores usam outras definições de Y_0. Esta escolha para Y_0 também é conhecida como função de Weber, em homenagem a Heinrich Weber (1842-1913), que ensinou em diversas universidades alemãs.

[17]Lorenzo Máscheroni (1750-1800) era um padre italiano que foi professor na University of Pavia. Ele calculou corretamente as 19 primeiras casas decimais γ em 1790.

É interessante observar na Figura 5.7.2 que para x grande, ambas as funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ oscilam. Poderíamos ter antecipado tal comportamento a partir da equação original; de fato, isso é verdade para as soluções da equação de Bessel de ordem ν. Dividindo a Eq. (1) por x^2, obtemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Para x muito grande é razoável suspeitar que os termos $(1/x)y'$ e $(\nu^2/x^2)y$ são pequenos e, portanto, podem ser desprezados. Se isso for verdade, então a equação de Bessel de ordem ν pode ser aproximada por

$$y'' + y = 0.$$

As soluções desta equação são sen x e cos x; poderíamos, então, antecipar que as soluções da equação de Bessel para valores grandes de x são semelhantes a combinações lineares de sen x e cos x. Isso está correto no sentido em que as funções de Bessel são oscilatórias; no entanto, está apenas parcialmente correto. Para x grande, as funções J_0 e Y_0 também decaem quando x aumenta; assim, a equação $y'' + y = 0$ não fornece uma aproximação adequada para a equação de Bessel para valores grandes de x, e é necessário uma análise mais delicada. De fato, é possível mostrar que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando } x \to \infty, \tag{14}$$

e que

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando } x \to \infty. \tag{15}$$

Essas aproximações assintóticas, quando $x \to \infty$, são, de fato, muito boas. Por exemplo, a Figura 5.7.3 mostra que a aproximação assintótica (14) para $J_0(x)$ é razoavelmente precisa para todo $x \geq 1$. Assim, para aproximar $J_0(x)$ em todo o intervalo de zero a infinito podemos usar dois ou três termos da série (7) para $x \leq 1$ e a aproximação assintótica (14) para $x \geq 1$.

Equação de Bessel de Ordem Meio. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo, mas a segunda solução não tem termo logarítmico. Fazendo $\nu = \frac{1}{2}$ na Eq. (1), obtemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0. \tag{16}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série (3), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}\right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= \left(r^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

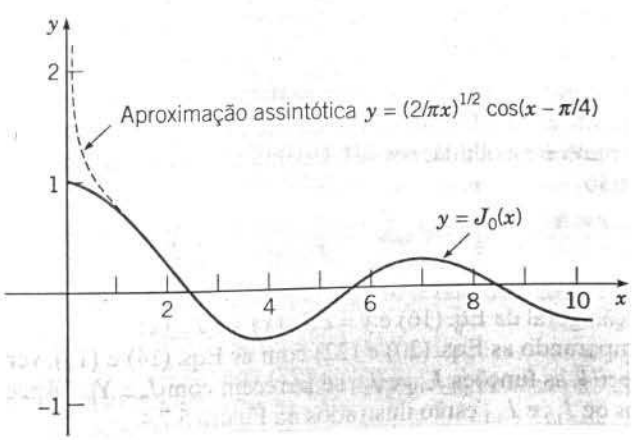


FIGURA 5.7.3 Aproximação assintótica de $J_0(x)$.

As raízes da equação indicial são $r_1 = \frac{1}{2}$ e $r_2 = -\frac{1}{2}$; logo, as raízes diferem por um inteiro. A relação de recorrência é

$$\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right] a_n = -a_{n-2}, \qquad n \geq 2. \tag{18}$$

Correspondendo à raiz maior $r_1 = \frac{1}{2}$, pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (17) vemos que $a_1 = 0$. Logo, da Eq. (18), $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$. Além disso, para $r = \frac{1}{2}$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6 \ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$, obtemos

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo a relação de recorrência, encontramos

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

e, em geral,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Portanto, fazendo $a_0 = 1$, obtemos

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \qquad x > 0. \tag{19}$$

A segunda série de potências na Eq. (19) é precisamente a série de Taylor para sen x; logo, uma solução para a equação de Bessel de ordem meio é $x^{-1/2}$ sen x. A função de Bessel de primeira espécie de ordem meio, $J_{1/2}$, é definida como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Assim,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \tag{20}$$

Correspondendo à raiz $r = -\frac{1}{2}$, é possível que encontremos dificuldade em calcular a_1, já que $N = r_1 - r_2 = 1$. No entanto, da Eq. (17) para $r = -\frac{1}{2}$, os coeficientes de x^r e de x^{r+1} são ambos nulos, independente da escolha de a_0 e a_1. Portanto, a_0 e a_1 podem ser escolhidos arbitrariamente. Da relação de recorrência (18) obtemos um conjunto de coeficientes com índices pares correspondendo a a_0 e um conjunto de coeficientes com índices ímpares correspondendo a a_1. Então não é necessário um termo logarítmico para se obter uma segunda solução nesse caso. Deixamos como exercício mostrar que, para $r = -\frac{1}{2}$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Logo,

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \tag{21}$$

A constante a_1 simplesmente introduz um múltiplo de $y_1(x)$. A segunda solução da equação de Bessel de ordem meio é escolhida, em geral, como a solução para a qual $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ e $a_1 = 0$. Ela é denotada por $J_{-1/2}$. Então

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \tag{22}$$

A solução geral da Eq. (16) é $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Comparando as Eqs. (20) e (22) com as Eqs. (14) e (15), vemos que, exceto por um deslocamento de fase de $\pi/4$, as funções $J_{-1/2}$ e $J_{1/2}$ se parecem com J_0 e Y_0, respectivamente, para valores grandes de x. Os gráficos de $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$ estão ilustrados na Figura 5.7.4.

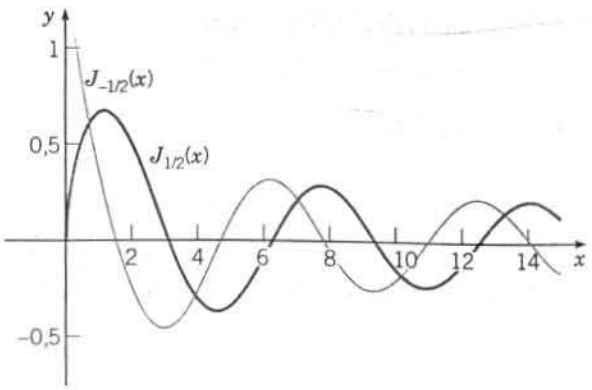


FIGURA 5.7.4 As funções de Bessel $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$.

Equação de Bessel de Ordem Um. Este caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo e a segunda solução envolve um termo logarítmico. Fazendo $\nu = 1$ na Eq. (1), temos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{23}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série em (3) e juntando os termos como nos casos precedentes, obtemos

$$L[\phi](r,x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - 1\right] a_n + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0. \tag{24}$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. A relação de recorrência é

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \qquad n \geq 2. \tag{25}$$

Correspondendo à raiz maior $r = 1$, a relação de recorrência fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (24), vemos também que $a_1 = 0$; logo, pela relação de recorrência, $a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Para valores pares de n, seja $n = 2m$; então

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo essa relação de recorrência, obtemos

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem um, denotada por J_1, é obtida escolhendo-se $a_0 = 1/2$. Portanto,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}. \tag{27}$$

A série converge absolutamente para todo x, de modo que J_1 é analítica em toda parte.

Ao determinar uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um vamos ilustrar o método de substituição direta. O cálculo do termo geral na Eq. (28) abaixo é bastante complicado, mas os primeiros poucos coeficientes podem ser encontrados facilmente. De acordo com o Teorema 5.6.1, vamos supor que

$$y_2(x) = aJ_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right], \qquad x > 0. \tag{28}$$

Calculando $y'_2(x)$, $y''_2(x)$, substituindo na Eq. (23) e usando o fato de que J_1 é uma solução da Eq. (23), obtemos

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n\right] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \tag{29}$$

onde $c_0 = 1$. Substituindo $J_1(x)$ por sua expressão na Eq. (27), mudando os índices dos somatórios nas duas séries e efetuando diversos cálculos algébricos, chegamos a

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]. \quad (30)$$

Da Eq. (30) notamos primeiro que $c_1 = 0$ e $a = -c_0 = -1$. Além disso, como a expressão à direita do sinal de igualdade contém apenas potências ímpares de x, o coeficiente de cada potência par de x na expressão à esquerda do sinal de igualdade tem que ser nulo. Então, como $c_1 = 0$, temos $c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Correspondendo às potências ímpares de x, obtemos a relação de recorrência [seja $n = 2m + 1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30)]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \quad (31)$$

Fazendo $m = 1$ na Eq. (31), obtemos

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Note que c_2 pode ser escolhido *arbitrariamente*, e esta equação, então, determina c_4. Note, também, que na equação para o coeficiente de x, c_2 aparece multiplicado por 0, e essa equação foi usada para determinar a. Não é surpreendente que c_2 seja arbitrário, já que c_2 é o coeficiente de x na expressão $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Em consequência, c_2 gera simplesmente um múltiplo de J_1 e y_2 só está determinado a menos de múltiplos de J_1. De acordo com a prática usual, escolhemos $c_2 = 1/2^2$. Obtemos, então,

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right]$$

$$= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1).$$

É possível mostrar que a solução da relação de recorrência (31) é

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

com a convenção de que $H_0 = 0$. Assim,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!(m-1)!}\, x^{2m}\right], \qquad x > 0. \quad (32)$$

O cálculo de $y_2(x)$ usando outro procedimento [veja as Eqs. (19) e (20) da Seção 5.6], no qual determinamos $c_n(r_2)$, é ligeiramente mais fácil. Em particular, este último procedimento fornece uma fórmula geral para c_{2m} sem a necessidade de se resolver uma relação de recorrência da forma (31) (veja o Problema 11). Nesse aspecto você pode querer, também, comparar os cálculos da segunda solução da equação de Bessel de ordem zero no texto e no Problema 10.

A segunda solução da Eq. (23), a função de Bessel de segunda espécie de ordem um, Y_1, é escolhida, em geral, como uma determinada combinação linear de J_1 e y_2. Seguindo Copson (Capítulo 12), Y_1 é definida como

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \quad (33)$$

onde γ é definido pela Eq. (12). A solução geral da Eq. (23) para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Note que enquanto J_1 é analítica em $x = 0$, a segunda solução Y_1 torna-se ilimitada do mesmo modo que $1/x$ quando $x \to 0$. A Figura 5.7.5 mostra os gráficos de J_1 e Y_1.

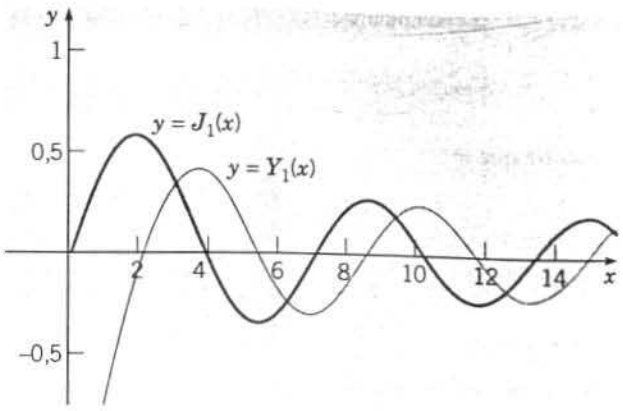


FIGURA 5.7.5 As funções de Bessel J_1 e Y_1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$ e determine duas soluções para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$
5. Encontre duas soluções para a equação de Bessel de ordem $\frac{3}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0.$$

6. Mostre que a equação de Bessel de ordem meio

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0, \qquad x > 0$$

pode ser reduzida à equação

$$v'' + v = 0$$

pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}v(x)$. Conclua disso que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ são soluções da equação de Bessel de ordem meio.

7. Mostre diretamente que a série para $J_0(x)$, Eq. (7), converge absolutamente para todo x.
8. Mostre diretamente que a série para $J_1(x)$, Eq. (27), converge absolutamente para todo x e que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
9. Considere a equação de Bessel de ordem ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad x > 0,$$

onde ν é real e positivo.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são ν e $-\nu$.

(b) Correspondendo à raiz maior ν, mostre que uma solução é

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(c) Se 2ν não for inteiro, mostre que a segunda solução será

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Note que $y_1(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e que $y_2(x)$ torna-se ilimitado quando $x \to 0$.

(d) Verifique, por métodos diretos, que as séries de potências nas expressões para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem absolutamente para todo x. Verifique, também, que y_2 é uma solução, bastando apenas que ν não seja inteiro.

10. Mostramos, nesta seção, que uma solução da equação de Bessel de ordem zero

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

é J_0, onde $J_0(x)$ é dada pela Eq. (7) com $a_0 = 1$. De acordo com o Teorema 5.6.1, uma segunda solução tem a forma $(x > 0)$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

(a) Mostre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \tag{i}$$

(b) Substituindo a representação em série de $J_0(x)$ na Eq. (i), mostre que

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{ii}$$

(c) Note que aparecem apenas potências pares de x na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii). Mostre que $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$, $b_2 = \frac{1}{2}^2(1!)^2$ e que

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduza que

$$b_4 = -\frac{1}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{e} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

A solução geral da relação de recorrência é $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. Substituindo b_n na expressão para $y_2(x)$, obtemos a solução dada na Eq. (10).

11. Encontre uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um calculando os $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) da Seção 5.6 de acordo com as fórmulas (19) e (20) daquela seção. Algumas diretrizes para esse cálculo são as seguintes. Primeiro, use a Eq. (24) desta seção para mostrar que $a_1(-1)$ e $a_1'(-1)$ são iguais a 0. Depois mostre que $c_1(-1) = 0$ e, da relação de recorrência, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$. Finalmente, use a Eq. (25) para mostrar que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)},$$

e que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

Depois mostre que

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m}m!(m-1)!, \qquad m \geq 1.$$

12. Através de uma mudança adequada de variável é possível, algumas vezes, transformar outra equação diferencial em uma equação de Bessel. Por exemplo, mostre que uma solução de

$$x^2y'' + \left(\alpha^2\beta^2x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2\beta^2\right)y = 0, \qquad x > 0$$

é dada por $y = x^{1/2}f(\alpha x^{\beta})$, onde $f(\xi)$ é uma solução da equação de Bessel de ordem ν.

13. Usando o resultado do Problema 12, mostre que a solução geral da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

é $y = x^{1/2}[c_1 f_1(\frac{2}{3}ix^{3/2}) + c_2 f_2(\frac{2}{3}ix^{3/2})]$, onde $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Bessel de ordem um terço.

14. Pode-se mostrar que J_0 tem uma infinidade de zeros para $x > 0$. Em particular, os três primeiros zeros são aproximadamente iguais a 2,405; 5,520 e 8,653 (veja a Figura 5.7.1). Denote por $\lambda_j, j = 1, 2, 3, \ldots$ os zeros de J_0; segue que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0.$$

Mostre que, portanto,

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)\,dx = 0 \quad \text{se} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Esta propriedade importante de $J_0(\lambda_r x)$, conhecida como propriedade de ortogonalidade, é útil na resolução de problemas de valores de contorno.

Sugestão: escreva a equação diferencial para $J_0(\lambda_r x)$. Multiplique-a por $xJ_0(\lambda_s x)$ e a subtraia de $xJ_0(\lambda_r x)$ vezes a equação diferencial para $J_0(\lambda_s x)$. Depois integre de 0 a 1.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University Press, 1935).

Demonstrações dos Teoremas 5.3.1 e 5.6.1 podem ser encontradas em livros intermediários ou avançados; veja, por exemplo, os Capítulos 3 e 4 de Coddington, ou os Capítulos 3 e 4 de

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Macmillan, 1964).

Veja também esses textos para uma discussão do ponto no infinito, mencionado no Problema 43 da Seção 5.4. O comportamento de soluções perto de um ponto singular irregular é um tópico ainda mais avançado; uma discussão sucinta pode ser encontrada no Capítulo 5 de

Coddington, E.A.,and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (NewYork: McGraw-Hill, 1955).

Discussões mais completas da equação de Bessel, da equação de Legendre e de muitas outras equações que levam o nome de pessoas podem ser encontradas em livros avançados de equações diferenciais, de métodos de matemática aplicada e de funções especiais. Um livro que trata de funções especiais, como os polinômios de Legendre e as funções de Bessel, é

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York: Holt, 1961).

Uma compilação excelente de fórmulas, gráficos e tabelas de funções de Bessel, funções de Legendre e outras funções especiais da física matemática pode ser encontrada em

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (NewYork: Dover, 1965); publicado originalmente pelo Departamento Nacional de Padrões, Washington, DC, 1964.

CAPÍTULO

6

A Transformada de Laplace

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontínuas ou de impulsos. Os métodos descritos no Capítulo 3 são, muitas vezes, complicados de usar em tais problemas. Outro método particularmente adequado para esses problemas, embora possa ser usado mais geralmente, baseia-se na transformada de Laplace. Vamos descrever, neste capítulo, como esse método importante funciona, enfatizando problemas típicos que aparecem nas aplicações de engenharia.

6.1 Definição da Transformada de Laplace

Integrais Impróprias. Como a transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, é necessário conhecimento sobre integrais impróprias desse tipo para apreciar o desenvolvimento subsequente das propriedades da transformada. Vamos fornecer aqui uma revisão rápida de tais integrais impróprias. Se você já estiver familiarizado com integrais impróprias, pode querer pular esta revisão. Por outro lado, se uma integral imprópria é novidade para você, então você deveria, provavelmente, consultar um livro de Cálculo, onde encontrará muito mais detalhes e exemplos.

Uma integral imprópria em um intervalo limitado é definida como um limite de integrais em intervalos finitos; assim,

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(t)\,dt, \tag{1}$$

onde A é um número real positivo. Se a integral de a até A existe para todo $A > a$ e se existe o limite quando $A \to \infty$, dizemos que a integral imprópria **converge** para esse valor-limite. Caso contrário, a integral **diverge** ou não existe. Os exemplos a seguir ilustram ambas as possibilidades.

EXEMPLO 1 Seja $f(t) = e^{ct}, t \geq 0$, onde c é uma constante real não nula. Então

$$\int_0^\infty e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{e^{ct}}{c}\Bigg|_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \frac{1}{c}(e^{cA} - 1).$$

Segue que a integral imprópria converge para o valor $-1/c$ se $c < 0$ e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$, o integrando $f(t)$ é a função constante igual a 1 e a integral novamente diverge.

EXEMPLO 2 Seja $f(t) = 1/t, t \geq 1$. Então

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln A.$$

Como $\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$, a integral imprópria diverge.

EXEMPLO 3

Seja $f(t) = t^p, t \geq 1$, onde p é uma constante real e $p \neq 1$; o caso $p = 1$ foi considerado no Exemplo 2. Então

$$\int_1^\infty t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_1^A t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1).$$

Quando $A \to \infty, A^{1-p} \to 0$ se $p > 1$, mas $A^{1-p} \to \infty$ se $p < 1$. Portanto, $\int_1^\infty t^{-p}\,dt$ converge para o valor $1/(p-1)$ para $p > 1$, mas diverge (incorporando o resultado do Exemplo 2) para $p \leq 1$. Esses resultados são análogos àqueles para a série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Antes de discutir a possível existência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$, vamos definir alguns termos. Uma função é dita **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser dividido por um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ de modo que

1. f seja contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$.
2. f tenda a um limite finito nos extremos de cada subintervalo por pontos no interior do intervalo.

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se for contínua aí exceto por um número finito de descontinuidades do tipo salto. Se f for seccionalmente contínua em $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo $\beta > \alpha$, então dizemos que f é seccionalmente contínua para $t \geq \alpha$. A Figura 6.1.1 mostra um exemplo de uma função seccionalmente contínua.

A integral de uma função seccionalmente contínua em um intervalo finito é simplesmente a soma das integrais nos subintervalos criados pelos pontos da partição. Por exemplo, para a função $f(t)$ na Figura 6.6.1, temos

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^{t_1} f(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t)\,dt. \tag{2}$$

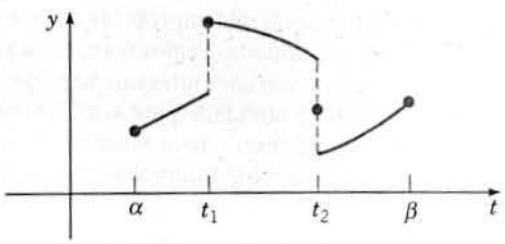


FIGURA 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua $y = f(t)$.

Para a função na Figura 6.1.1 atribuímos valores para a função nos extremos α e β e nos pontos da partição t_1 e t_2. No entanto, para as integrais na Eq. (2) não importa se a função $f(t)$ está definida nesses pontos, ou quais os valores atribuídos a $f(t)$ neles. Os valores das integrais na Eq. (2) permanecem os mesmos.

Logo, se f for seccionalmente contínua no intervalo $a \leq t \leq A$, a integral $\int_a^A f(t)\,dt$ existe. Portanto, se f for seccionalmente contínua para $t \geq a$, então $\int_a^A f(t)\,dt$ existe para todo $A > a$. No entanto, a continuidade por partes não é suficiente para garantir a convergência da integral imprópria $\int_a^\infty f(t)\,dt$, como mostram os exemplos precedentes.

Se f não puder ser integrada facilmente em termos de funções elementares, a definição de convergência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$ pode ser difícil de aplicar. Muitas vezes a maneira mais conveniente de testar a convergência ou divergência de uma integral imprópria é usando o teorema de comparação a seguir, análogo a um teorema semelhante para séries infinitas.

Teorema 6.1.1 Se f for seccionalmente contínua para $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também converge. Por outro lado, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ diverge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também diverge.

A demonstração deste resultado de Cálculo não será dada aqui. Ele se torna plausível, no entanto, se compararmos as áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)\,dt$ e por $\int_M^\infty |f(t)|\,dt$. As funções mais úteis para efeitos de comparação são e^{ct} e t^p, que consideramos nos Exemplos 1, 2 e 3.

A Transformada de Laplace. Entre as ferramentas muito úteis para a resolução de equações diferenciais estão as **transformadas integrais**. Uma transformada integral é uma relação da forma

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t)f(t)\,dt, \tag{3}$$

onde $K(s, t)$ é uma função dada, chamada de **núcleo** da transformação, e os limites de integração α e β também são dados. É possível que $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$, ou ambos. A relação (3) transforma a função f em outra função F, que é chamada a transformada de f.

Existem diversas transformadas integrais úteis em matemática aplicada, mas vamos considerar, neste capítulo, apenas a transformada de Laplace.[1] Essa transformada é definida da seguinte maneira. Suponha que $f(t)$ é uma função definida para $t \geq 0$ e que f satisfaz certas condições que serão especificadas mais adiante. Então a transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou por $F(s)$, é definida pela equação

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt, \tag{4}$$

sempre que essa integral imprópria convergir. A transformada de Laplace usa o núcleo $K(s,t) = e^{-st}$. Como as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes estão baseadas na função exponencial, a transformada de Laplace é particularmente útil para essas equações. A ideia geral ao se usar a transformada de Laplace para se resolver uma equação diferencial é a seguinte:

1. Use a relação (4) para transformar um problema de valor inicial para uma função desconhecida f no domínio dos t em um problema mais simples (de fato, um problema algébrico) para F, no domínio dos s.
2. Resolva esse problema algébrico para encontrar F.
3. Recupere a função desejada f de sua transformada F. Essa última etapa é conhecida como "inverter a transformada".

Em geral, o parâmetro s pode ser complexo, e todo o poder da transformada de Laplace só se torna disponível quando $F(s)$ é considerada uma função de variável complexa. No entanto, para os problemas discutidos aqui é suficiente considerar apenas valores reais de s. A transformada de Laplace F de uma função f vai existir se f satisfizer determinadas condições, como as enunciadas no teorema a seguir.

Teorema 6.1.2 Suponha que

1. f é seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ para qualquer A positivo.
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$. Nesta desigualdade, K, a e M são constantes reais com K e M necessariamente positivas.

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, definida pela Eq. (4), existe para $s > a$.

Para estabelecer este teorema, vamos mostrar que a integral na Eq. (4) converge para s > a. Separando a integral imprópria em duas partes, temos

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^M e^{-st}f(t)\,dt + \int_M^\infty e^{-st}f(t)\,dt. \tag{5}$$

A primeira integral à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) existe pela hipótese (1) do teorema; logo, a existência de $F(s)$ depende da convergência da segunda integral. Pela hipótese (2), temos, para $t \geq M$,

$$|e^{-st}f(t)| \leq Ke^{-st}e^{at} = Ke^{(a-s)t},$$

[1] A transformada de Laplace tem esse nome em homenagem ao eminente matemático francês P. S. Laplace, que estudou a relação (3) em 1782. No entanto, as técnicas descritas neste capítulo só foram desenvolvidas um século depois ou mais tarde. Elas se devem, principalmente, a Oliver Heaviside (1850-1925), um engenheiro elétrico inglês inovador, mas pouco convencional, que fez contribuições importantes para o desenvolvimento e a aplicação da teoria eletromagnética.

e assim, pelo Teorema 6.1.1, $F(s)$ existe se $\int_M^\infty e^{(a-s)t}\,dt$ convergir. Pelo Exemplo 1, com $a-s$ no lugar de c, vemos que essa última integral converge quando $a-s<0$, o que estabelece o Teorema 6.1.2.

A menos que seja dito especificamente o contrário, vamos tratar, neste capítulo, quase que exclusivamente de funções que satisfazem as condições do Teorema 6.1.2. Tais funções são descritas como seccionalmente contínuas e de **ordem exponencial** quando $t\to\infty$. Note que existem funções que não são de ordem exponencial quando $t\to\infty$. Uma dessas funções é $f(t)=e^{t^2}$. Quando $t\to\infty$, esta função cresce mais rapidamente do que Ke^{at}, independentemente de quão grande sejam as constantes K e a.

As transformadas de Laplace de algumas funções elementares importantes são dadas nos exemplos a seguir.

EXEMPLO 4 Seja $f(t)=1, t\ge 0$. Então, como no Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{1\}=\int_0^\infty e^{-st}\,dt=-\lim_{A\to\infty}\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^A=\frac{1}{s},\qquad s>0.$$

EXEMPLO 5 Seja $f(t)=e^{at}, t\ge 0$. Então, novamente referindo-nos ao Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt$$

$$=\frac{1}{s-a},\qquad s>a.$$

EXEMPLO 6 Seja

$$f(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1,\\ k, & t=1,\\ 0, & t>1,\end{cases}$$

onde k é uma constante. Em contextos de engenharia, $f(t)$ representa muitas vezes um impulso unitário, talvez uma força ou uma tensão.

Note que f é uma função seccionalmente contínua. Então

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt=\int_0^1 e^{-st}\,dt=-\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s},\quad s>0.$$

Observe que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ não depende de k, o valor da função no ponto de descontinuidade. Mesmo que $f(t)$ não esteja definida neste ponto, a transformada de Laplace de f permanece a mesma. Logo, existem muitas funções, diferindo de valor em um único ponto, que têm a mesma transformada de Laplace.

EXEMPLO 7 Seja $f(t)=\operatorname{sen} at, t\ge 0$. Então

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,\qquad s>0.$$

Como

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt,$$

integrando por partes, obtemos

$$F(s)=\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^A-\frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt.$$

Uma segunda integração por partes fornece

$$F(s)=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{sen} at\,dt$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{s^2}{a^2}F(s).$$

Portanto, resolvendo para $F(s)$, temos

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Vamos supor que f_1 e f_2 são duas funções cujas transformadas de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para s maior do que o máximo de a_1 e a_2,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\,dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\,dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\,dt;\end{aligned}$$

logo

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \tag{6}$$

A Eq. (6) afirma que a transformada de Laplace é um **operador linear**, e faremos uso frequente dessa propriedade mais tarde. A soma na Eq. (6) pode ser prontamente estendida para um número arbitrário de parcelas.

EXEMPLO 8

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = 5e^{-2t} - 3 \operatorname{sen} 4t$, $t \geq 0$.

Usando a Eq. (6), escrevemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\operatorname{sen} 4t\}.$$

Então, dos Exemplos 5 e 6, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \qquad s > 0.$$

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, esboce o gráfico da função dada. Em cada caso determine se f é contínua, seccionalmente contínua ou nenhuma das duas no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

1. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 + t, & 1 < t \leq 2 \\ 6 - t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3 - t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

5. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das funções a seguir:
   (a) $f(t) = t$
   (b) $f(t) = t^2$
   (c) $f(T) = t^n$, onde n é um inteiro positivo.
6. Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$, onde a é uma constante real.

Lembre que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ e $\operatorname{senh} bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$. Em cada um dos Problemas de 7 a 10, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

7. $f(t) = \cosh bt$
8. $f(t) = \operatorname{senh} bt$
9. $f(t) = e^{at} \cosh bt$
10. $f(t) = e^{at} \operatorname{senh} bt$

Em cada um dos Problemas de 11 a 14, lembre que $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ e $\operatorname{sen} bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$. Supondo que as fórmulas de integração elementares podem ser estendidas para esse caso, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

11. $f(t) = \operatorname{sen} bt$
12. $f(t) = \cos bt$
13. $f(t) = e^{at} \operatorname{sen} bt$
14. $f(t) = e^{at} \cos bt$

Em cada um dos Problemas de 15 a 20, use integração por partes para encontrar a transformada de Laplace da função dada; n é um inteiro positivo e a é uma constante real.

15. $f(t) = te^{at}$
16. $f(t) = t \operatorname{sen} at$
17. $f(t) = t \cosh at$
18. $f(t) = t^n e^{at}$
19. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} at$
20. $f(t) = t^2 \operatorname{senh} at$

Em cada um dos Problemas de 21 a 24, determine se a integral dada converge ou diverge.

21. $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\,dt$
22. $\int_0^\infty te^{-t}\,dt$
23. $\int_1^\infty t^{-2}e^t\,dt$
24. $\int_0^\infty e^{-t}\cos t\,dt$

25. Suponha que f e f' são contínuas em $t \geq 0$ e de ordem exponencial quando $t \to \infty$. Integrando por partes, mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. O resultado continua válido sob condições menos restritivas, como as do Teorema 6.1.2.

26. **A Função Gama.** A função gama é denotada por $\Gamma(p)$ e definida pela integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx. \tag{i}$$

A integral converge quando $x \to \infty$ para todo p. Para $p < 0$ também é imprópria, porque o integrando torna-se ilimitado quando $x \to 0$. No entanto, pode-se mostrar que a integral converge em $x = 0$ para $p > -1$.

(a) Mostre que, para $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

(b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Se p for um inteiro positivo, mostre que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Como $\Gamma(p)$ também está definido quando p não é inteiro, esta função fornece uma extensão da função fatorial para valores não inteiros da variável independente. Note que também é consistente definir $0! = 1$.

(d) Mostre que, para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

Assim, $\Gamma(p)$ pode ser determinado para todos os valores positivos de p se $\Gamma(p)$ for conhecido em um único intervalo de comprimento um, digamos, em $0 < p \leq 1$. É possível mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Encontre $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.

27. Considere a transformada de Laplace de t^p, onde $p > -1$.

(a) Usando o Problema 26, mostre que

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}t^p\,dt = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\,dx$$

$$= \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

(b) Seja p igual a um inteiro positivo n em (a); mostre que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}, \qquad s > 0.$$

(c) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad s > 0.$$

É possível mostrar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

portanto,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}, \qquad s > 0.$$

(d) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \sqrt{\pi}/(2s^{3/2}), \qquad s > 0.$$

6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais

Nesta seção vamos mostrar como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. A utilidade da transformada de Laplace nesse contexto reside no fato de que a transformada de f' está relacionada de maneira simples à transformada de f. Esta relação está explicitada no teorema a seguir.

Teorema 6.2.1 Suponha que f é contínua e que f' é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{1}$$

Para provar este teorema, vamos considerar a integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Se f' tem pontos de descontinuidade no intervalo $0 \le t \le A$, vamos denotá-los por $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Podemos, então, escrever essa integral como

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f'(t)\, dt.$$

Integrando cada parcela à direita do sinal de igualdade por partes, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$
$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\, dt\right].$$

Como f é contínua, as contribuições em $t_1, t_2, \ldots, t_n$ das parcelas integradas se cancelam. Combinando as integrais, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt.$$

Para $A \ge M$, temos $|f(A)| \le Ke^{aA}$; em consequência, $|e^{-sA} f(A)| \le Ke^{-(s-a)A}$. Portanto, $e^{-sA} f(A) \to 0$ quando $A \to \infty$ sempre que $s > a$. Logo, para $s > a$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

o que prova o teorema.

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas em f e f', respectivamente, no Teorema 6.2.1, então a transformada de Laplace de f'' também existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \tag{2}$$

De fato, desde que a função f e suas derivadas satisfaçam condições adequadas pode-se obter uma expressão para a n-ésima derivada $f^{(n)}$ através de aplicações sucessivas desse teorema. O resultado é dado no corolário a seguir.

Corolário 6.2.2 Suponha que as funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ são contínuas e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existem constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le Ke^{at}$, $|f'(t)| \le Ke^{at}, \ldots, |f^{(n)}(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Então, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e é dado por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{3}$$

Vamos mostrar, agora, como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial. Sua utilidade maior é em problemas envolvendo equações diferenciais não homogêneas,

como mostraremos em seções mais adiante neste capítulo. Entretanto, vamos começar olhando algumas equações homogêneas, que são um pouco mais simples.

EXEMPLO 1

Vamos considerar a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{4}$$

com condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{5}$$

Este problema pode ser resolvido facilmente pelos métodos da Seção 3.1. A equação característica é

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0, \tag{6}$$

e, em consequência, a solução geral da Eq. (4) é

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}. \tag{7}$$

Para satisfazer as condições iniciais (5), precisamos ter $c_1 + c_2 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 0$; logo, $c_1 = \frac{2}{3}$ e $c_2 = \frac{1}{3}$, de modo que a solução do problema de valor inicial (4) e (5) é

$$y = \phi(t) = \tfrac{2}{3}e^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{2t}. \tag{8}$$

Vamos agora resolver o mesmo problema usando a transformada de Laplace. Para fazer isso precisamos supor que o problema tem uma solução $y = \phi(t)$ tal que as duas primeiras derivadas satisfaçam as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial (4), obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \tag{9}$$

onde usamos a linearidade da transformada para escrever a transformada de uma soma como a soma das transformadas separadas. Usando o corolário para expressar $\mathcal{L}\{y''\}$ e $\mathcal{L}\{y'\}$ em função de $\mathcal{L}\{y\}$, a Eq. (9) fica

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1-s)y(0) - y'(0) = 0, \tag{10}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Substituindo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ dados pelas condições iniciais (5) na Eq. (10) e depois resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}. \tag{11}$$

Obtivemos, assim, uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial dado. Para determinar a função ϕ precisamos encontrar a função cuja transformada de Laplace é $Y(s)$ dada pela Eq. (11).

Isso pode ser feito mais facilmente expandindo-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (11) em frações parciais. Escrevemos, então,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(s-2)}{(s-2)(s+1)}, \tag{12}$$

onde os coeficientes a e b têm que ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com a quarta expressão na Eq. (12), obtemos

$$s - 1 = a(s+1) + b(s-2),$$

uma equação que tem que ser satisfeita para todos os valores de s. Em particular, fazendo $s = 2$ temos que $a = \frac{1}{3}$. Analogamente, se s = –1, então $b = \frac{2}{3}$. Substituindo esses valores para a e b, respectivamente, temos

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}. \tag{13}$$

Finalmente, usando o resultado do Exemplo 5 da Seção 6.1, temos que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tem transformada $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$; analogamente, a transformada de $\frac{2}{3}e^{-t}$ é $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$. Portanto, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{3}e^{2t} + \tfrac{2}{3}e^{-t}$$

tem transformada (13) e é, portanto, solução do problema de valor inicial (4), (5). Note que ela satisfaz as condições do Corolário 6.2.2, como supusemos inicialmente. É claro que essa é a mesma solução que obtivemos antes.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a equações lineares gerais de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = f(t).1 \tag{14}$$

Supondo que a solução $y = \phi(t)$ satisfaz as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 2$, podemos calcular a transformada da Eq. (14) obtendo, assim,

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s), \tag{15}$$

onde $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Resolvendo a Eq. (15) para $Y(s)$, encontramos

$$Y(s) = \frac{(as + b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}. \tag{16}$$

O problema, então, está resolvido, desde que possamos encontrar a função $y = \phi(t)$ cuja transformada é $Y(s)$.

Mesmo nesse estágio inicial de nossa discussão, podemos apontar algumas das características essenciais do método de transformada. Em primeiro lugar, a transformada $Y(s)$ da função desconhecida $y = \phi(t)$ é encontrada resolvendo-se uma *equação algébrica* em vez de uma *equação diferencial*, a Eq. (10) em vez da Eq. (4) no Exemplo 1, ou, em geral, a Eq. (15) em vez da Eq. (14). Essa é a chave da utilidade da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes — o problema é reduzido de uma equação diferencial para uma equação algébrica. A seguir, a solução satisfazendo as condições iniciais dadas é encontrada automaticamente, de modo que a tarefa de determinar os valores apropriados para as constantes arbitrárias na solução geral não aparece. Além disso, como indicado na Eq. (15), as equações não homogêneas são tratadas exatamente da mesma forma que as homogêneas; não é necessário resolver primeiro a equação homogênea correspondente. Finalmente, o método pode ser aplicado da mesma forma para equações de ordem maior, desde que suponhamos que a solução satisfaz as condições do corolário para o valor apropriado de n.

Observe que o polinômio $as^2 + bs + c$, no denominador da fração à direita do sinal de igualdade na Eq. (16), é precisamente o polinômio característico associado à Eq. (14). Como a expansão de $Y(s)$ em frações parciais para determinar $\phi(t)$ necessita da fatoração desse polinômio, a utilização da transformada de Laplace não evita a necessidade de se encontrar as raízes da equação característica. Para equações de ordem maior do que dois isso pode ser um problema algébrico difícil, especialmente se as raízes forem irracionais ou complexas.

A dificuldade maior que ocorre ao se resolver um problema de valor inicial pela técnica da transformada está na determinação da função $y = \phi(t)$ correspondente à transformada $Y(s)$. Esse problema é conhecido como o problema de inversão da transformada de Laplace; $\phi(t)$ é chamada a transformada inversa correspondente a $Y(s)$ e o processo de encontrar $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$ é conhecido como inverter a transformada. Usamos, também, a notação $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ para denotar a transformada inversa de $Y(s)$. Existe uma fórmula geral para a transformada de Laplace inversa, mas ela precisa de familiaridade com a teoria de funções de uma variável complexa, e não vamos considerá-la neste livro. No entanto, ainda é possível desenvolver muitas propriedades importantes da transformada de Laplace e resolver muitos problemas interessantes sem usar variáveis complexas.

Ao resolver o problema de valor inicial (4), (5) não consideramos o problema da possível existência de outras funções, além da dada pela Eq. (8), que também tenham a transformada (13). Sabemos, do Teorema 3.2.1, que o problema de valor inicial não tem outras soluções. Consistente com esse fato, pode-se mostrar que se f e g são funções contínuas com a mesma transformada de Laplace, então f e g são idênticas. Por outro lado, se f e g só são seccionalmente contínuas, elas podem diferir em um ou mais pontos de descontinuidade e ainda terem a mesma transformada de Laplace; veja o Exemplo 6 na Seção 6.1. Essa falta de unicidade da transformada de Laplace inversa para funções seccionalmente contínuas não tem importância prática nas aplicações.

Então, existe, essencialmente, uma bijeção entre as funções e suas transformadas de Laplace. Esse fato sugere a compilação de uma tabela, como a Tabela 6.2.1, que fornece as transformadas das funções encontradas com mais frequência e vice-versa. As funções na segunda coluna da Tabela 6.2.1 são as transformadas das funções na primeira coluna. Talvez mais importante, as funções na primeira coluna são as transformadas inversas das funções na segunda coluna. Assim, por exemplo, se a transformada da solução de uma equação diferencial é conhecida a solução pode ser encontrada, muitas vezes, olhando-se simplesmente na tabela. Algumas das funções na Tabela 6.2.1 foram usadas como exemplos, outras aparecem como problemas na Seção 6.1, enquanto outras vão ser encontradas mais adiante neste capítulo. A terceira coluna da tabela indica onde pode ser encontrada a dedução da transformada dada. Embora a Tabela 6.2.1 seja suficiente para os exemplos e problemas dados neste livro, estão disponíveis tabelas muito mais

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notas
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Seção 6.1; Ex. 5
3. t^n, $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
4. t^p, $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
5. $\operatorname{sen} at$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 7
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 6
7. $\operatorname{senh} at$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Seção 6.1; Prob. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a\rvert$	Seção 6.1; Prob. 7
9. $e^{at}\operatorname{sen} bt$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 13
10. $e^{at}\cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Seção 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Seção 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Seção 6.3; Prob. 25
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Seção 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Seção 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Seção 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Seção 6.2; Prob. 28

completas (veja a lista de referências no final deste capítulo). Transformadas e transformadas inversas também podem ser encontradas através da utilização de sistemas algébricos computacionais.

Com frequência, uma transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressa como uma soma de diversas parcelas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s). \tag{17}$$

Suponha que $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}, \ldots, f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. Então, a função

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

tem a transformada de Laplace $F(s)$. Pela unicidade enunciada anteriormente não existe outra função contínua f tendo a mesma transformada. Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}; \tag{18}$$

ou seja, a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

É conveniente, em muitos problemas, usar essa propriedade decompondo uma transformada dada em uma soma de funções cujas transformadas inversas já são conhecidas ou podem ser encontradas em uma tabela. Expansões em frações parciais são particularmente úteis nesse contexto, e um resultado geral cobrindo muitos casos é dado no Problema 38. Outras propriedades úteis da transformada de Laplace serão deduzidas mais tarde neste capítulo.

Os exemplos a seguir fornecem ilustrações adicionais da técnica de resolução de problemas de valor inicial usando transformada de Laplace e expansão em frações parciais.

EXEMPLO 2

Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + y = \operatorname{sen} 2t, \tag{19}$$

satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Vamos supor que esse problema de valor inicial tem uma solução $y = \phi(t)$ com as duas primeiras derivadas satisfazendo as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

onde a transformada de sen $2t$ foi obtida da linha 5 na Tabela 6.2.1. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ pelos valores dados nas condições iniciais e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{21}$$

Usando frações parciais, podemos escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{22}$$

Expandindo o numerador da fração à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (22) e igualando-o ao numerador na Eq. (21), encontramos

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para todo s. Então, comparando os coeficientes de mesma potência de s, temos

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$
$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6.$$

Em consequência, $a = 2, c = 0, b = \frac{5}{3}$ e d $= -\frac{2}{3}$, donde

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}. \tag{23}$$

Das linhas 5 e 6 na Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \tfrac{5}{3}\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen} 2t. \tag{24}$$

EXEMPLO 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y^{(4)} - y = 0, \tag{25}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 0. \tag{26}$$

Neste problema precisamos supor que a solução $y = \phi(t)$ satisfaz as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 4$. A transformada de Laplace da equação diferencial (25) é

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

Então, usando as condições iniciais (26) e resolvendo para $Y(s)$, temos

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}. \tag{27}$$

Uma expansão em frações parciais para $Y(s)$ é

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1},$$

e segue que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \tag{28}$$

para todo s. Fazendo $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente, na Eq. (28), obtemos o par de equações

$$2(a + b) = 1, \qquad 2(-a + b) = 1,$$

e, portanto, $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$. Se fizermos $s = 0$ na Eq. (28), então $b - d = 0$, de modo que $d = \frac{1}{2}$. Finalmente, igualando as parcelas contendo as potências cúbicas nos dois lados da Eq. (28), encontramos que $a + c = 0$, logo $c = 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1}, \tag{29}$$

e, das linhas 7 e 5 da Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial (25), (26) é

$$y = \phi(t) = \frac{\operatorname{senh} t + \operatorname{sen} t}{2}. \tag{30}$$

As aplicações elementares mais importantes da transformada de Laplace estão no estudo de vibrações mecânicas e na análise de circuitos elétricos; as equações que governam esses fenômenos foram deduzidas na Seção 3.7. Um sistema mola-massa em vibração tem equação de movimento

$$m\frac{d^2v}{dt^2} + \gamma\frac{dv}{dt} + kv = F(t), \tag{31}$$

onde m é a massa, γ é o coeficiente de amortecimento, k é a constante da mola e $F(t)$ é a força externa que está sendo aplicada. A equação que descreve um circuito elétrico com indutância L, resistência R e capacitância C (um circuito LRC) é

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t), \tag{32}$$

onde $Q(t)$ é a carga no capacitor e $E(t)$ é a tensão aplicada. Em termos da corrente $I(t) = dQ(t)/dt$, podemos diferenciar a Eq. (32) e escrever

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}(t). \tag{33}$$

Também têm que ser dadas condições iniciais adequadas para v, Q ou I.

Observamos anteriormente, na Seção 3.7, que a Eq. (31) para o sistema mola-massa e a Eq. (32) ou (33) para o circuito elétrico são idênticas matematicamente, diferindo, apenas, pela interpretação das constantes e variáveis que aparecem nelas. Existem outros problemas físicos que levam à mesma equação diferencial. Assim, uma vez resolvido o problema matemático sua solução pode ser interpretada para cada problema físico correspondente de interesse atual.

Nas listas de problemas ao final desta e de outras seções neste capítulo são dados muitos problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Muitos podem ser interpretados como modelos de sistemas físicos particulares, mas, em geral, não explicitamos isso.

PROBLEMAS Em cada um dos Problemas de 1 a 10, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

1. $F(s) = \dfrac{3}{s^2+4}$
2. $F(s) = \dfrac{4}{(s-1)^3}$
3. $F(s) = \dfrac{2}{s^2+3s-4}$
4. $F(s) = \dfrac{3s}{s^2-s-6}$
5. $F(s) = \dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$
6. $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-4}$
7. $F(s) = \dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$
8. $F(s) = \dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$
9. $F(s) = \dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$
10. $F(s) = \dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$

Em cada um dos Problemas de 11 a 23, use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

11. $y'' - y' - 6y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' - 2y' + 4y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
16. $y'' + 2y' + 5y = 0; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
17. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 1$
18. $y^{(4)} - y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$
19. $y^{(4)} - 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = 0$
20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t, \quad \omega^2 \neq 4; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 24 a 26, encontre a transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ da solução do problema de valor inicial dado. Será desenvolvido um método para determinar a transformada inversa na Seção 6.3.

24. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & \pi \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

25. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

26. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

27. As transformadas de Laplace de certas funções podem ser encontradas de modo conveniente pelas suas expansões em séries de Taylor.

(a) Use a série de Taylor para sen t

$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e, supondo que a transformada de Laplace desta série pode ser calculada termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}, \qquad s > 1.$$

(b) Seja

$$f(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t)/t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Encontre a série de Taylor de f em torno de $t = 0$. Supondo que a transformada de Laplace desta função pode ser calculada termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan(1/s), \qquad s > 1.$$

(c) A função de Bessel de primeira espécie de ordem zero J_0 tem série de Taylor (veja a Seção 5.7)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Supondo que as transformadas de Laplace a seguir podem ser calculadas termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2+1)^{-1/2}, \qquad s > 1,$$

e

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = s^{-1}e^{-1/(4s)}, \qquad s > 0.$$

Os Problemas de 28 a 36 tratam da diferenciação de transformadas de Laplace.

28. Seja

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

É possível mostrar que enquanto f satisfizer as condições do Teorema 6.1.2, pode-se diferenciar sob o sinal de integral em relação ao parâmetro s quando $s > a$.

(a) Mostre que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

(b) Mostre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$; portanto, derivar a transformada de Laplace corresponde a multiplicar a função original por $-t$.

Em cada um dos problemas de 29 a 34, use o resultado do Problema 28 para encontrar a transformada de Laplace da função dada; a e b são números reais e n é um inteiro positivo.

29. $f(t) = te^{at}$
30. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} bt$
31. $f(t) = t^n$
32. $f(t) = t^n e^{at}$
33. $f(t) = te^{at} \operatorname{sen} bt$
34. $f(t) = te^{at} \cos bt$

35. Considere a equação de Bessel de ordem zero

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Lembre da Seção 5.4 que $t = 0$ é um ponto singular regular para esta equação e, portanto, as soluções podem se tornar ilimitadas quando $t \to 0$. No entanto, vamos tentar determinar se existem soluções que permanecem limitadas em $t = 0$ e têm derivadas finitas aí. Supondo que existe uma tal solução $y = \phi(t)$, seja $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

(a) Mostre que $Y(s)$ satisfaz

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

(b) Mostre que $Y(s) = c(1+s^2)^{-1/2}$, onde c é uma constante arbitrária.

(c) Escrevendo $(1+s^2)^{-1/2} = s^{-1}(1+s^{-2})^{-1/2}$, expandindo em uma série binomial válida para $s > 1$ e supondo que é permitido inverter a transformada termo a termo, mostre que

$$y = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = cJ_0(t),$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero. Note que $J_0(0) = 1$ e que J_0 tem derivada finita de todas as ordens em $t = 0$. Foi demonstrado na Seção 5.7 que a segunda solução desta equação torna-se ilimitada quando $t \to 0$.

36. Para cada um dos problemas de valor inicial a seguir, use os resultados do Problema 28 para encontrar a equação diferencial satisfeita por $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, onde $y = \phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial dado.

(a) $y'' - ty = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$ (equação de Airy)

(b) $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$ (equação de Legendre)

Note que a equação diferencial para $Y(s)$ é de primeira ordem no item (a), mas é de segunda ordem no item (b). Isso ilustra o fato de que a transformada de Laplace nem sempre é útil para se resolver equações diferenciais com coeficientes variáveis, a menos que todos os coeficientes sejam, no máximo, funções lineares da variável independente.

37. Suponha que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Se $G(s)$ e $F(s)$ são as transformadas de Laplace de $g(t)$ e $f(t)$, respectivamente, mostre que

$$G(s) = F(s)/s.$$

38. Vamos mostrar, neste problema, como se pode usar uma expansão geral em frações parciais para se calcular muitas transformadas de Laplace inversas. Suponha que

$$F(s) = P(s)/Q(s),$$

onde $Q(s)$ é um polinômio de grau n com raízes distintas $r_1, \ldots, r_n$, e $P(s)$ é um polinômio de grau menor do que n. Nesse caso, é possível mostrar que $P(s)/Q(s)$ tem uma expansão em frações parciais da forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s - r_n}, \tag{i}$$

onde os coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ precisam ser determinados.

(a) Mostre que

$$A_k = P(r_k)/Q'(r_k), \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{ii}$$

Sugestão: um modo de fazer isso é multiplicar a Eq. (i) por $s - r_k$ e depois tomar o limite quando $s \to r_k$.

(b) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}. \tag{iii}$$

6.3 Funções Degrau

Na Seção 6.2 esboçamos o procedimento geral usado ao se resolver um problema de valor inicial através da transformada de Laplace. Algumas das aplicações elementares mais interessantes do método de transformada ocorrem na solução de equações diferenciais lineares sob a ação de funções descontínuas ou de impulso. Equações desse tipo aparecem com frequência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos. Nesta e nas seções seguintes vamos desenvolver algumas propriedades adicionais da transformada de Laplace úteis na solução de tais problemas. A menos que se diga explicitamente o contrário, supomos que todas as funções a seguir são seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, de modo que suas transformadas de Laplace existem pelo menos para s suficientemente grande.

Para tratar de maneira efetiva funções com saltos, é útil definir uma função conhecida como **função degrau unitário**, ou **função de Heaviside**.

Esta função será denotada por u_c e é definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \qquad c \geq 0. \tag{1}$$

A Figura 6.3.1 mostra o gráfico de $y = u_c(t)$. Atribuímos, de forma um tanto arbitrária, o valor um a u_c em $t = c$. Entretanto, para uma função seccionalmente contínua como u_c lembre-se de que em geral o valor em um ponto de descontinuidade é irrelevante. O degrau também pode ser negativo. Por exemplo, a Figura 6.3.2 mostra o gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

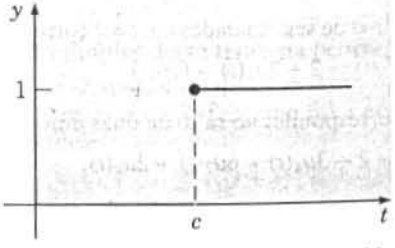


FIGURA 6.3.1 Gráfico de $y = u_c(t)$.

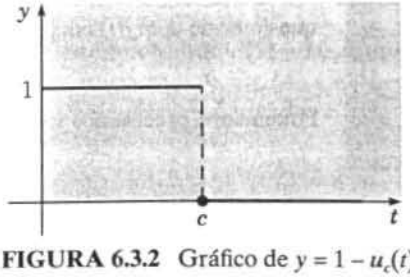


FIGURA 6.3.2 Gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

EXEMPLO 1 Esboce o gráfico de $y = h(t)$, onde

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \qquad t \geq 0.$$

Da definição de $u_c(t)$ na Eq. (1), temos

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \le t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \le t < \infty. \end{cases}$$

Logo, a equação $y = h(t)$ tem o gráfico ilustrado na Figura 6.3.3. Pode-se pensar nessa função como um pulso retangular.

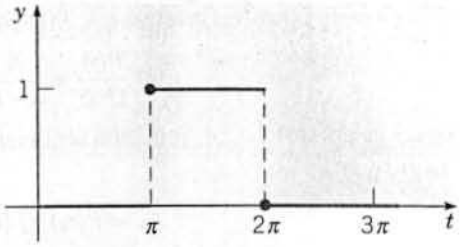


FIGURA 6.3.3 Gráfico de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

EXEMPLO 2 Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 4, \\ 5, & 4 \le t < 7, \\ -1, & 7 \le t < 9, \\ 1, & t \ge 9, \end{cases} \tag{2}$$

cujo gráfico aparece na Figura 6.3.4. Expresse $f(t)$ em termos de $u_c(t)$.

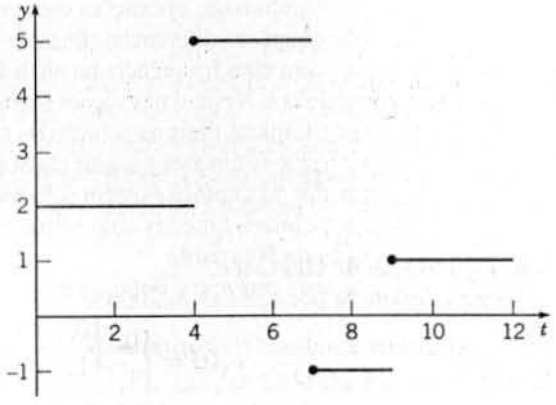


FIGURA 6.3.4 Gráfico da função na Eq. (2).

Começamos com a função $f_1(t) = 2$, que coincide com $f(t)$ em $[0, 4)$. Para produzir o salto de três unidades em $t = 4$ somamos $3u_4(t)$ a $f_1(t)$, obtendo

$$f_2(t) = 2 + 3u_4(t),$$

que coincide com $f(t)$ em $[0, 7)$. O salto negativo de seis unidades em $t = 7$ corresponde a somar $-6u_7(t)$, o que dá

$$f_3(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t).$$

Finalmente, precisamos somar $2u_9(t)$ para corresponder ao salto de duas unidades em $t = 9$. Obtemos, então,

$$f(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t) + 2u_9(t). \tag{3}$$

A transformada de Laplace de u_c é determinada facilmente:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st}\, dt$$

$$= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \tag{4}$$

Para uma função f dada, definida para $t \geq 0$, vamos considerar muitas vezes a função relacionada g definida por

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

que representa uma translação de f por uma distância c no sentido dos t positivos; veja a Figura 6.3.5. Em termos da função degrau unitário, podemos escrever $g(t)$ na forma conveniente

$$g(t) = u_c(t) f(t-c).$$

A função degrau unitário é particularmente importante no uso da transformada devido à relação dada a seguir entre a transformada de $f(t)$ e a de sua translação $u_c(t)f(t-c)$.

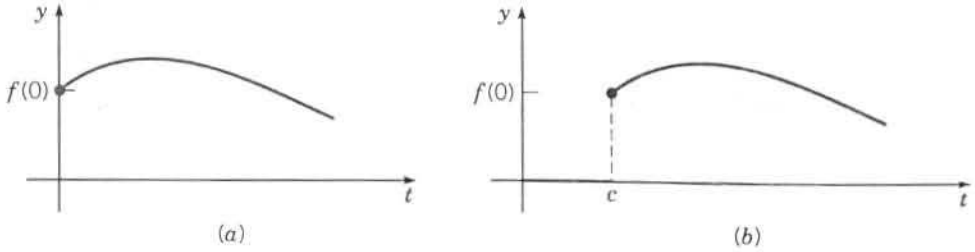


FIGURA 6.3.5 Uma translação da função dada. (*a*) $y = f(t)$; (*b*) $y = u_c(t)f(t-c)$.

Teorema 6.3.1 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \qquad s > a. \tag{5}$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}. \tag{6}$$

O Teorema 6.3.1 diz simplesmente que a translação de $f(t)$ por uma distância c no sentido dos t positivos corresponde à multiplicação de $F(s)$ por e^{-cs}. Para provar o Teorema 6.3.1 basta calcular a transformada de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt$$

$$= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt.$$

Fazendo uma mudança na variável de integração $\xi = t - c$, temos

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi$$

$$= e^{-cs}F(s).$$

Isso estabelece a Eq. (5); a Eq. (6) segue calculando-se a transformada inversa na Eq. (5).

Um exemplo simples desse teorema ocorre quando $f(t) = 1$. Lembrando que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, temos imediatamente, da Eq. (5), que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. Esse resultado está de acordo com o da Eq. (4). Os Exemplos 3 e 4 ilustram ainda mais como o Teorema 6.3.1 pode ser usado no cálculo de transformadas e transformadas inversas.

EXEMPLO 3 Se a função f for definida por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ \operatorname{sen} t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4, \end{cases}$$

encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$. O gráfico de $y = f(t)$ está ilustrado na Figura 6.3.6.

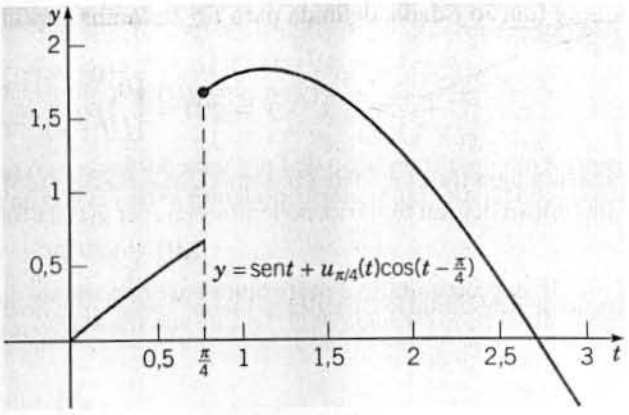


FIGURA 6.3.6 Gráfico da função no Exemplo 3.

Note que $f(t) = \operatorname{sen} t + g(t)$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Logo,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4),$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\} \\ &= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\}. \end{aligned}$$

Introduzindo as transformadas de sen t e cos t, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1}.$$

Você deve comparar esse método com o cálculo de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ diretamente da definição.

EXEMPLO 4 Encontre a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Da linearidade da transformada inversa, temos

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t-2). \end{aligned}$$

A função f também pode ser escrita como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

O teorema a seguir contém outra propriedade bastante útil das transformadas de Laplace, semelhantes às dadas no Teorema 6.3.1.

Teorema 6.3.2 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante, então

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s-c), \qquad s > a + c. \tag{7}$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}. \tag{8}$$

De acordo com o Teorema 6.3.2, a multiplicação de $f(t)$ por e^{ct} resulta na translação da transformada $F(s)$ uma distância c no sentido dos s positivos e reciprocamente. Para provar este teorema, vamos calcular $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$. Então,

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct}f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t}f(t)\,dt$$

$$= F(s-c),$$

que é a Eq. (7). A restrição $s > a + c$ segue da observação que de acordo com a hipótese (ii) do Teorema 6.1.2 é $|f(t)| \le Ke^{at}$; portanto, $|e^{ct}f(t)| \le Ke^{(a+c)t}$. A Eq. (8) é obtida calculando-se a transformada inversa da Eq. (7), e a demonstração está completa.

A aplicação principal do Teorema 6.3.2 está no cálculo de determinadas transformadas inversas, como ilustrado no Exemplo 5.

EXEMPLO 5 Encontre a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

Completando os quadrados no denominador, podemos escrever

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

onde $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \operatorname{sen} t$, segue do Teorema 6.3.2 que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\operatorname{sen} t.$$

Os resultados desta seção são muitas vezes úteis na resolução de equações diferenciais, particularmente aquelas sob a ação de funções descontínuas. A próxima seção é devotada a exemplos que ilustram esse fato.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, esboce o gráfico da função dada no intervalo $t \ge 0$.

1. $g(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
2. $g(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
3. $g(t) = f(t-\pi)u_\pi(t)$, onde $f(t) = t^2$
4. $g(t) = f(t-3)u_3(t)$, onde $f(t) = \operatorname{sen} t$
5. $g(t) = f(t-1)u_2(t)$, onde $f(t) = 2t$
6. $g(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12:

(a) Esboce o gráfico da função dada.

(b) Expresse $f(t)$ em termos da função degrau unitário $u_c(t)$.

7. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 3, \\ -2, & 3 \le t < 5, \\ 2, & 5 \le t < 7, \\ 1, & t \ge 7. \end{cases}$

8. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2, \\ 1, & 2 \le t < 3, \\ -1, & 3 \le t < 4, \\ 0, & t \ge 4. \end{cases}$

9. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 2, \\ e^{-(t-2)}, & t \ge 2. \end{cases}$

10. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2. \end{cases}$

11. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ t-1, & 1 \le t < 2, \\ t-2, & 2 \le t < 3, \\ 0, & t \ge 3. \end{cases}$

12. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 2, \\ 2, & 2 \le t < 5, \\ 7-t, & 5 \le t < 7, \\ 0, & t \ge 7. \end{cases}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 18, encontre a transformada de Laplace da função dada.

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \ge 2 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \ge 1 \end{cases}$

15. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$

16. $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$

17. $f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$

18. $f(t) = t - u_1(t)(t-1), \quad t \ge 0$

Em cada um dos Problemas de 19 a 24, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

19. $F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$

20. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2+s-2}$

21. $F(s) = \dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2-2s+2}$

22. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2-4}$

23. $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2-4s+3}$

24. $F(s) = \dfrac{e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}-e^{-4s}}{s}$

25. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$.

(a) Mostre que se c é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad s > ca.$$

(b) Mostre que se k é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right).$$

(c) Mostre que se a e b são constantes com $a > 0$, então

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a}e^{-bt/a}f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Em cada um dos Problemas de 26 a 29, use os resultados do Problema 25 para encontrar a transformada de Laplace inversa da função dada.

26. $F(s) = \dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$

27. $F(s) = \dfrac{2s+1}{4s^2+4s+5}$

28. $F(s) = \dfrac{1}{9s^2-12s+3}$

29. $F(s) = \dfrac{e^2e^{-4s}}{2s-1}$

Em cada um dos Problemas de 30 a 33, encontre a transformada de Laplace da função dada. No Problema 33, suponha que é permitido integrar a série infinita termo a termo.

30. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

31. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

32. $f(t) = 1 - u_1(t) + \cdots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k u_k(t)$

33. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k u_k(t)$. Veja a Figura 6.3.7.

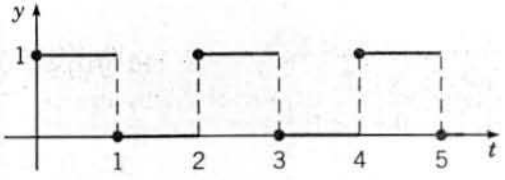


FIGURA 6.3.7 Uma onda quadrada.

34. Suponha que f satisfaz $f(t+T) = f(t)$ para todo $t \geq 0$ e para algum número positivo fixo T; f é dita periódica com período T em $0 \leq t < \infty$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

Em cada um dos Problemas de 35 a 38, use o resultado do Problema 34 para encontrar a transformada de Laplace da função dada.

35. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t+2) = f(t)$.
Compare com o Problema 33.

36. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t+2) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.8.

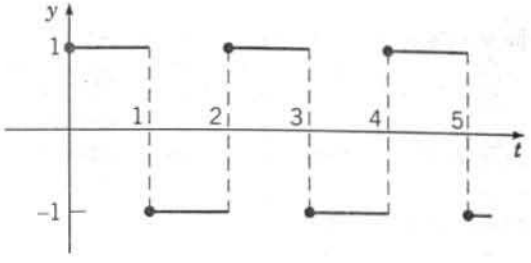


FIGURA 6.3.8 Uma onda quadrada.

37. $f(t) = t, \quad 0 \le t < 1;$
$f(t+1) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.9.

38. $f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < \pi;$
$f(t+\pi) = f(t)$.
Veja a Figura 6.3.10.

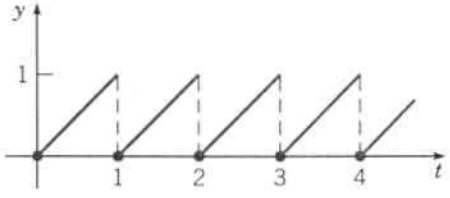


FIGURA 6.3.9 Uma onda dente de serra.

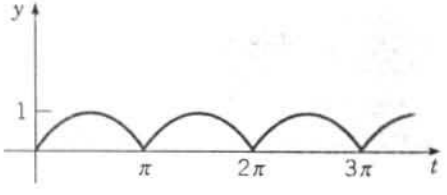


FIGURA 6.3.10 Uma onda seno retificada.

39. (a) Se $f(t) = 1 - u_1(t)$, encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$; compare com o Problema 30. Esboce o gráfico de $y = f(t)$.
(b) Seja $g(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi$, onde a função f está definida em (a). Esboce o gráfico de $y = g(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{g(t)\}$.
(c) Seja $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t-1)$, onde g está definida em (b). Esboce o gráfico de $y = h(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

40. Considere a função p definida por

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2; \end{cases} \qquad p(t+2) = p(t).$$

(a) Esboce o gráfico de $y = p(t)$.
(b) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ notando que p é a extensão periódica da função h no Problema 39(c) e usando, depois, o resultado do Problema 34.
(c) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ observando que

$$p(t) = \int_0^t f(t)\, dt,$$

onde f é a função no Problema 36, e usando, depois, o Teorema 6.2.1.

6.4 Equações Diferenciais sob a Ação de Funções Descontínuas

Nesta seção, vamos voltar nossa atenção para alguns exemplos onde o termo não homogêneo, ou força externa, é descontínuo.

EXEMPLO 1

Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \tag{1}$$

onde

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \le t < 20, \\ 0, & 0 \le t < 5 \quad \text{e} \quad t \ge 20. \end{cases} \tag{2}$$

Suponha que as condições iniciais são

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

Este problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples, onde a tensão é um pulso unitário para $5 \le t < 20$. Ele pode representar, também, a resposta de um oscilador amortecido sob a ação de uma força $g(t)$.

A transformada de Laplace da Eq. (1) é

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\} = (e^{-5s} - e^{-20s})/s.$$

Usando as condições iniciais (3) e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{4}$$

Para encontrar $y = \phi(t)$, é conveniente escrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s), \tag{5}$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{6}$$

Então, se $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, temos

$$y = \phi(t) = u_5(t)h(t - 5) - u_{20}(t)h(t - 20). \tag{7}$$

Observe que usamos o Teorema 6.3.1 para escrever a transformada inversa de $e^{-5s}H(s)$ e de $e^{-20s}H(s)$, respectivamente. Finalmente, para determinar $h(t)$ usamos a expansão em frações parciais de $H(s)$:

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{2s^2 + s + 2}. \tag{8}$$

Determinando os coeficientes, encontramos $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -\frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/2}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{2s^2 + s + 2} \\ &= \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\left(s + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}, \end{aligned} \tag{9}$$

de modo que, pelas linhas 9 e 10 da Tabela 6.2.1, obtemos

$$h(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\left[e^{-t/4}\cos(\sqrt{15}\,t/4) + (\sqrt{15}/15)e^{-t/4}\operatorname{sen}\sqrt{15}\,t/4)\right]. \tag{10}$$

Na Figura 6.4.1, o gráfico da solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (7) e (10) mostra que a solução tem três partes distintas. Para $0 < t < 5$, a equação diferencial é

$$2y'' + y' + 2y = 0 \tag{11}$$

e as condições iniciais são dadas pela Eq. (3). Como as condições iniciais não fornecem energia ao sistema e como não há força externa, o sistema permanece em repouso, ou seja, $y = 0$ para $0 < t < 5$. Isso pode ser confirmado resolvendo-se a Eq. (11) sujeita às condições iniciais (3). Em particular, calculando a solução e suas derivadas em $t = 5$ ou, mais precisamente, quando t tende a 5 por valores menores, temos

$$y(5) = 0, \qquad y'(5) = 0. \tag{12}$$

Quando $t > 5$, a equação diferencial fica

$$2y'' + y' + 2y = 1, \tag{13}$$

cuja solução é a soma de uma constante (a resposta à força externa constante) com uma oscilação amortecida (a solução da equação homogênea correspondente). O gráfico na Figura 6.4.1 mostra claramente esse compor-

tamento no intervalo $5 \leq t \leq 20$. Pode-se encontrar uma expressão para essa parte da solução resolvendo-se a equação diferencial (13) sujeita às condições iniciais (12). Finalmente, para $t > 20$ a equação diferencial torna-se novamente a Eq. (11) e as condições iniciais são obtidas calculando-se a solução das Eqs. (13), (12) e suas derivadas em $t = 20$. Esses valores são

$$y(20) \cong 0{,}50162, \qquad y'(20) \cong 0{,}01125. \tag{14}$$

O problema de valor inicial (11), (14) não contém força externa, de modo que sua solução é uma oscilação amortecida em torno de $y = 0$, como pode ser visto na Figura 6.4.1.

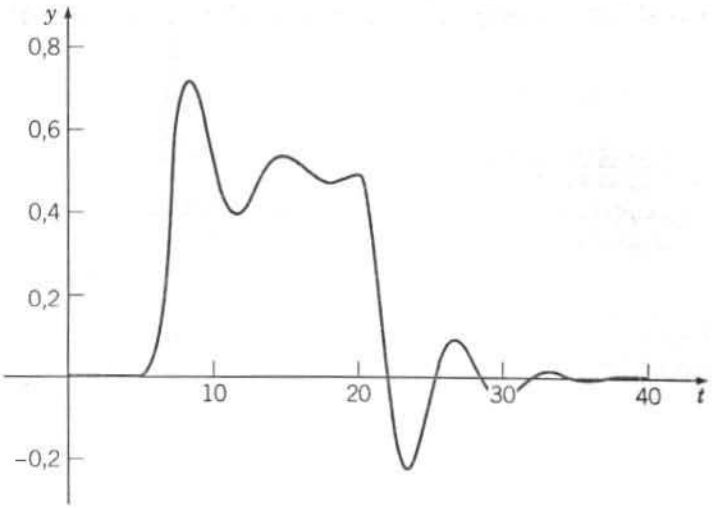


FIGURA 6.4.1 Solução do problema de valor inicial (1), (2), (3).

Embora possa ser útil visualizar a solução na Figura 6.4.1 como composta de três problemas separados de valor inicial em três intervalos diferentes, é um tanto tedioso encontrar a solução resolvendo-se esses três problemas separados. O método da transformada de Laplace fornece uma abordagem muito mais conveniente e elegante para esse e outros problemas sob a ação de uma força externa descontínua.

O efeito da descontinuidade da força externa pode ser visto se examinarmos a solução $\phi(t)$ do Exemplo 1 com mais cuidado. De acordo com o Teorema 3.2.1 de existência e unicidade, a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas exceto, possivelmente, nos pontos $t = 5$ e $t = 20$, onde g é descontínua. Isso também pode ser visto imediatamente da Eq. (7). Pode-se mostrar, também, por cálculos diretos a partir da Eq. (7), que ϕ e ϕ' são contínuas mesmo em $t = 5$ e $t = 20$. No entanto, se calcularmos ϕ'', veremos que

$$\lim_{t \to 5-} \phi''(t) = 0, \qquad \lim_{t \to 5+} \phi''(t) = 1/2.$$

Em consequência, $\phi''(t)$ tem um salto de 1/2 em $t = 5$. De maneira semelhante, pode-se mostrar que $\phi''(t)$ tem um salto de $-1/2$ em $t = 20$. Assim, o salto do termo não homogêneo $g(t)$ nesses pontos é balanceado por um salto correspondente no termo de maior ordem $2y''$ à esquerda do sinal de igualdade na equação.

Considere, agora, a equação linear de segunda ordem geral

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{15}$$

onde p e q são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, mas g só é seccionalmente contínua aí. Se $y = \psi(t)$ é uma solução da Eq. (15), então ψ e ψ' são contínuas em $\alpha < t < \beta$, mas ψ'' tem descontinuidades do tipo salto nos mesmos pontos que g. Observações semelhantes podem ser feitas para equações de ordem maior; a derivada da solução de ordem igual à ordem mais alta que aparece na equação diferencial tem saltos nos mesmos pontos que o termo não homogêneo, mas a solução e suas derivadas de ordem mais baixa são contínuas, inclusive nesses pontos.

EXEMPLO 2

Descreva a natureza qualitativa da solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{16}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \tag{17}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5, \\ (t-5)/5, & 5 \le t < 10, \\ 1, & t \ge 10, \end{cases} \tag{18}$$

e depois encontre a solução.

Neste exemplo, o termo não homogêneo tem o gráfico ilustrado na Figura 6.4.2, que é conhecido como rampa crescente. É relativamente fácil identificar a forma geral da solução. Para $t < 5$ a solução é simplesmente $y = 0$. Por outro lado, para $t > 10$ a solução tem a forma

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + 1/4. \tag{19}$$

A constante 1/4 é uma solução particular da equação não homogênea, enquanto os outros dois termos formam a solução geral da equação homogênea associada. Assim, a solução (19) corresponde a uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Analogamente, no intervalo intermediário $5 < t < 10$ a solução oscila em torno de uma certa função linear. Em um contexto de engenharia, por exemplo, poderíamos estar interessados em saber a amplitude da oscilação estado estacionário final.

Para resolver o problema, é conveniente escrever

$$g(t) = \left[u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)\right]/5, \tag{20}$$

como você pode verificar. Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$(s^2+4)Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})/5s^2$$

ou

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})H(s)/5, \tag{21}$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2+4)}. \tag{22}$$

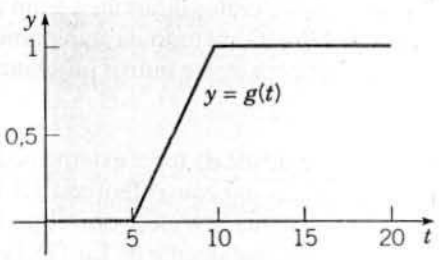


FIGURA 6.4.2 Rampa crescente: $y = g(t)$ da Eq. (18).

Logo, a solução do problema de valor inicial (16), (17), (18) é

$$y = \phi(t) = \left[u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)\right]/5, \tag{23}$$

onde $h(t)$ é a transformada inversa de $H(s)$. A expansão em frações parciais de $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}, \tag{24}$$

e segue, então, das linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1 que

$$h(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 2t. \tag{25}$$

A Figura 6.4.3 mostra o gráfico de $y = \phi(t)$. Note que ele tem o aspecto qualitativo indicado anteriormente. Para encontrar a amplitude da oscilação estado estacionário basta localizar um dos pontos de máximo ou mínimo para $t > 10$. Igualando a derivada da solução (23) a zero, vemos que o primeiro máximo está localizado aproximadamente em (10,642; 0,2979), de modo que a amplitude da oscilação é de aproximadamente 0,0479.

Note que neste exemplo o termo não homogêneo g é contínuo, mas g' é descontínua em $t = 5$ e $t = 10$. Então a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas em toda parte, mas ϕ''' tem descontinuidades em $t = 5$ e $t = 10$ do mesmo tipo das descontinuidades de g' nesses pontos.

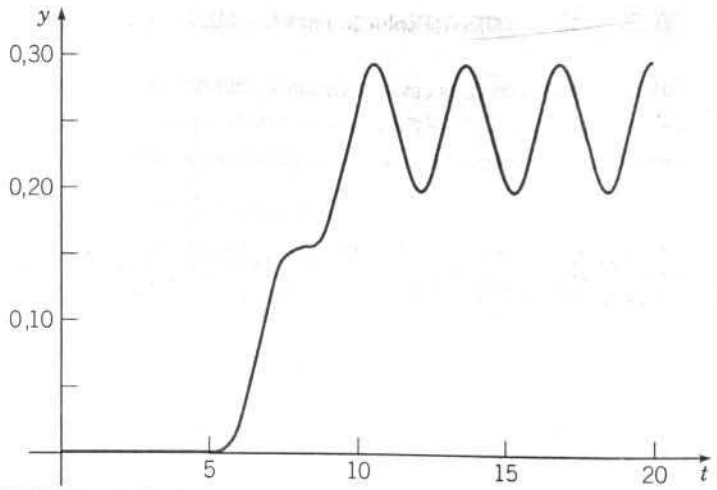


FIGURA 6.4.3 Solução do problema de valor inicial (16), (17), (18).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 13:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe os gráficos da solução e do termo não homogêneo; explique a relação entre eles.

1. $y'' + y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 3\pi \\ 0, & 3\pi \le t < \infty \end{cases}$

2. $y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi \quad \text{e} \quad t \ge 2\pi \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t - u_{2\pi}(t) \operatorname{sen}(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

4. $y'' + 4y = \operatorname{sen} t + u_{\pi}(t) \operatorname{sen}(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

5. $y'' + 3y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$

6. $y'' + 3y' + 2y = u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

7. $y'' + y = u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

9. $y'' + y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad g(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \le t < 6 \\ 3, & t \ge 6 \end{cases}$

10. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

11. $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

12. $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

13. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

14. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função f cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$.

15. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função g cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$, seguida de uma rampa decrescente que chega a zero em $t = t_0 + 2k$.

16. Um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + \tfrac{1}{4}u' + u = kg(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

onde $g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t)$ e $k > 0$ é um parâmetro.

(a) Esboce o gráfico de $g(t)$. Note que é um pulso de tamanho unitário que se estende por uma unidade de tempo.

(b) Resolva o problema de valor inicial.

(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 1/2$, $k = 1$ e $k = 2$. Descreva as características principais da solução e como elas dependem de k.

(d) Encontre, com duas casas decimais, o menor valor de k para o qual a solução $u(t)$ alcança o valor 2.

(e) Suponha que $k = 2$. Encontre o instante τ após o qual $|u(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

17. Modifique o problema no Exemplo 2 desta seção substituindo o termo não homogêneo $g(t)$ por

$$f(t) = \left[u_5(t)(t-5) - u_{5+k}(t)(t-5-k)\right]/k.$$

(a) Esboce o gráfico de $f(t)$ e descreva como ele depende de k. Para que valores de k a função $f(t)$ é igual a $g(t)$ no exemplo?

(b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(c) A solução no item (b) depende de k, mas para t suficientemente grande a solução sempre é uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Tente decidir como a amplitude dessa oscilação depende, finalmente, de k. Depois confirme sua conclusão fazendo o gráfico da solução para alguns valores diferentes de k.

18. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \tfrac{1}{3}y' + 4y = f_k(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/2k, & 4-k \le t < 4+k \\ 0, & 0 \le t < 4-k \quad \text{e} \quad t \ge 4+k \end{cases}$$

e $0 < k < 4$.

(a) Esboce o gráfico de $f_k(t)$. Note que a área sob o gráfico é independente de k. Se $f_k(t)$ representa uma força, isso significa que o produto do módulo da força e do intervalo de tempo durante o qual ela age não depende de k.

(b) Escreva $f_k(t)$ em termos da função degrau unitário e depois resolva o problema de valor inicial dado.

(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 2$, $k = 1$ e $k = 1/2$. Descreva como a solução depende de k.

Ressonância e Batimento. Na Seção 3.8 observamos como um oscilador harmônico não amortecido (como um sistema mola-massa) sob a ação de uma força senoidal entra em ressonância se a frequência do termo não homogêneo é igual à frequência natural. Se a frequência da força é ligeiramente diferente da frequência natural, então o sistema apresenta um batimento. Nos Problemas de 19 a 23 exploramos o efeito de alguns termos não homogêneos periódicos não senoidais.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $f(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$.

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.

(c) Seja $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira.

(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

20. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $f(t)$ é a mesma do Problema 19.

(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes para que a parte transiente da solução torne-se desprezível e o estado estacionário apareça claramente.

(b) Estime a amplitude e a frequência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.

(c) Compare os resultados do item (b) com os da Seção 3.8 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

21. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $g(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$. Compare com o gráfico de $f(t)$ no Problema 19(a).

(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.

(c) Seja $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira. Compare com a solução do Problema 19.

(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

22. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0.1y' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $g(t)$ é a mesma do Problema 21.

(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes para que a parte transiente da solução torne-se desprezível e o estado estacionário apareça claramente.

(b) Estime a amplitude e a frequência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.

(c) Compare os resultados do item (b) com os do Problema 20 e os da Seção 3.8 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

23. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = h(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{11k/4}(t).$$

Observe que este problema é idêntico ao Problema 19, exceto que a frequência do termo não homogêneo foi um pouco aumentada.

(a) Encontre a solução deste problema de valor inicial.

(b) Seja $n \ge 33$ e desenhe o gráfico da solução para um intervalo $0 \le t \le 90$ ou maior. Seu gráfico deve mostrar um batimento claramente reconhecível.

(c) Do gráfico no item (b), estime o "período lento" e o "período rápido" para este oscilador.

(d) Para um oscilador sob a ação de uma força senoidal mostramos, na Seção 3.8, que a "frequência lenta" é dada por $|\omega - \omega_0|/2$, onde ω_0 é a frequência natural do sistema e ω é a frequência do termo não homogêneo. Analogamente, a "frequência rápida" é $(\omega + \omega_0)/2$. Use essas expressões para calcular o "período rápido" e o "período lento" para o oscilador neste problema. Quão próximos esses resultados estão de suas estimativas no item (c)?

6.5 Funções de Impulso

Em algumas aplicações é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva – por exemplo, tensões ou forças de módulo grande que agem por um período de tempo muito curto. Tais problemas levam, com frequência, a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{1}$$

onde $g(t)$ é grande em um intervalo pequeno $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ e é zero nos outros pontos.

A integral $I(t)$, definida por

$$I(\tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt, \tag{2}$$

ou, como $g(t) = 0$ fora do intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$,

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt, \tag{3}$$

é uma medida da força do termo não homogêneo. Em um sistema mecânico, onde $g(t)$ é uma força, $I(\tau)$ é o **impulso** total da força $g(t)$ sobre o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. Analogamente, se y é a corrente

em um circuito elétrico e $g(t)$ é a derivada em relação ao tempo da tensão, então $I(\tau)$ representa a tensão total impressa no circuito durante o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Em particular, vamos supor que t_0 é zero e que $g(t)$ é dada por

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \le -\tau \quad \text{ou} \quad t \ge \tau, \end{cases} \tag{4}$$

onde τ é uma constante positiva pequena (veja a Figura 6.5.1). De acordo com a Eq. (2) ou (3), segue imediatamente que nesse caso $I(\tau) = 1$, independentemente do valor de τ, desde que $\tau \neq 0$. Vamos agora usar um termo não homogêneo d_τ ideal, fazendo com que ele aja em intervalos de tempo cada vez mais curtos, ou seja, vamos fazer $\tau \to 0$, como indicado na Figura 6.5.2. Como resultado desse limite, obtemos

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \qquad t \neq 0. \tag{5}$$

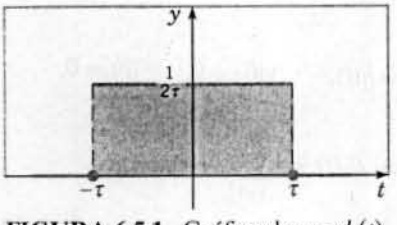


FIGURA 6.5.1 Gráfico de $y = d_\tau(t)$.

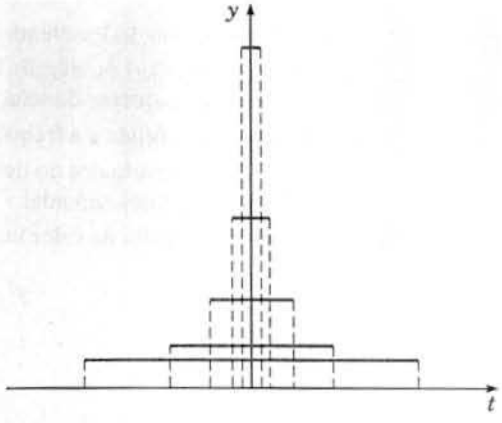


FIGURA 6.5.2 Gráficos de $y = d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$.

Além disso, como $I(\tau) = 1$ para todo $\tau \neq 0$, segue que

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1. \tag{6}$$

As Eqs. (5) e (6) podem ser usadas para se definir uma **função impulso unitário** δ, que funciona como um impulso de tamanho 1 em t = 0 mas é zero para todos os outros valores de t diferentes de zero. Em outras palavras, a "função" δ é definida como tendo as propriedades

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0; \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{8}$$

Não existe uma função, no sentido usual da palavra, estudada em Cálculo que satisfaça ambas as Eqs. (7) e (8). A "função" δ definida por essas equações é um exemplo de algo conhecido como funções generalizadas, e é chamada de **função delta** de Dirac.[2] Como $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t = 0$, um impulso unitário em um ponto arbitrário $t = t_0$ é dado por $\delta(t - t_0)$. Das Eqs. (7) e (8), segue que

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0; \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \tag{10}$$

A função δ não satisfaz as condições do Teorema 6.1.2, mas ainda assim sua transformada de Laplace pode ser definida formalmente. Como $\delta(t)$ é definida como o limite de $d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$, é natural definir a transformada de Laplace de δ como um limite análogo da transformada de d_τ. Em particular, vamos supor que $t_0 > 0$ e vamos definir $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ pela equação

[2]Paul A. M. Dirac (1902-1984), físico matemático inglês, recebeu seu Ph.D. de Cambridge em 1926 e foi professor de matemática dessa universidade até 1969. Recebeu o prêmio Nobel em 1933 (junto com Erwin Schrödinger) por seu trabalho fundamental em mecânica quântica. Seu resultado mais conhecido foi a equação relativística para o elétron, publicado em 1928. Dessa equação ele previu o "antielétron", ou pósitron, que foi observado pela primeira vez em 1932. Depois de se aposentar em Cambridge, Dirac se mudou para os Estados Unidos, onde teve uma posição de professor pesquisador na Florida State University.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \lim_{\tau\to 0}\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\}. \tag{11}$$

Para calcular o limite na Eq. (11), note primeiro que se $\tau < t_0$, o que vai acabar acontecendo quando $\tau \to 0$, então $t_0 - \tau > 0$. Como $d_\tau(t-t_0)$ é diferente de zero apenas no intervalo de $t_0 - \tau$ até $t_0 + \tau$, temos

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \int_0^\infty e^{-st} d_\tau(t-t_0)\,dt$$

$$= \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} d_\tau(t-t_0)\,dt.$$

Substituindo $d_\tau(t-t_0)$ pela expressão na Eq. (4), obtemos

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{2s\tau}e^{-st}\Big|_{t=t_0-\tau}^{t=t_0+\tau}$$

$$= \frac{1}{2s\tau}e^{-st_0}(e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

ou

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t-t_0)\} = \frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau}e^{-st_0}. \tag{12}$$

O quociente $(\operatorname{senh} s\tau)/s\tau$ é indeterminado quando $\tau \to 0$, mas seu limite pode ser calculado através da regra de L'Hôspital. Obtemos

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau\to 0}\frac{s\cosh s\tau}{s} = 1.$$

Então, segue da Eq. (11) que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-st_0}. \tag{13}$$

A Eq. (13) define $\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}$ para qualquer $t_0 > 0$. Vamos estender esse resultado, para permitir a t_0 ser igual a zero, fazendo $t_0 \to 0$ à direita do sinal de igualdade na Eq. (13); assim,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0\to 0} e^{-st_0} = 1. \tag{14}$$

De maneira análoga, é possível definir a integral do produto da função δ por qualquer função contínua f. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt. \tag{15}$$

Usando a definição (4) de $d_\tau(t)$ e o teorema do valor médio para integrais, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*) = f(t^*),$$

onde $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. Portanto, $t^* \to t_0$ quando $\tau \to 0$, e segue da Eq. (15) que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,dt = f(t_0). \tag{16}$$

O exemplo a seguir ilustra o uso da função delta na resolução de um problema de valor inicial com um termo não homogêneo impulsivo.

EXEMPLO 1

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \tag{17}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{18}$$

Este problema de valor inicial vem do estudo do mesmo circuito elétrico ou oscilador mecânico do Exemplo 1 da Seção 6.4. A única diferença é o termo não homogêneo.

Para resolver o problema dado, calculamos a transformada de Laplace da equação diferencial e usamos as condições iniciais, obtendo

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-5s}.$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2} = \frac{e^{-5s}}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}. \tag{19}$$

Pelo Teorema 6.3.2 ou pela linha 9 da Tabela 6.2.1,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\right\} = \frac{4}{\sqrt{15}} e^{-t/4} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} t. \tag{20}$$

Portanto, pelo Teorema 6.3.1 temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{15}}{4} (t - 5), \tag{21}$$

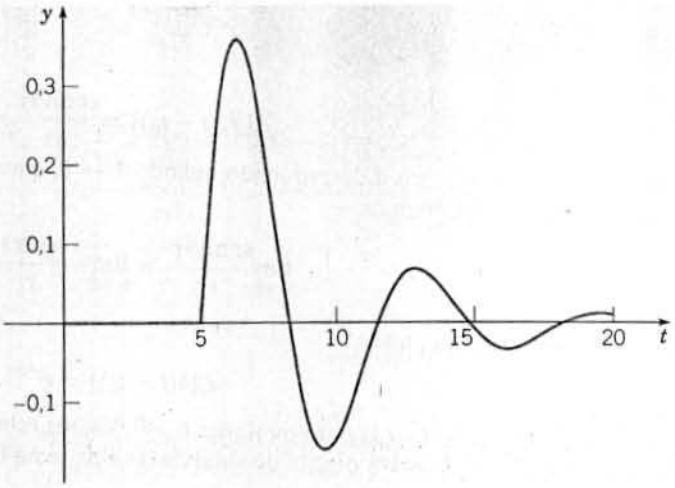


FIGURA 6.5.3 Solução do problema de valor inicial (17), (18).

que é a solução formal do problema dado. Também é possível escrever y na forma

$$y = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ \dfrac{2}{\sqrt{15}} e^{-(t-5)/4} \operatorname{sen} \dfrac{\sqrt{15}}{4} (t - 5), & t \geq 5. \end{cases} \tag{22}$$

O gráfico da Eq. (22) aparece na Figura 6.5.3. Como as condições iniciais em $t = 0$ são homogêneas e não existe excitação externa até $t = 5$, não há resposta no intervalo $0 < t < 5$. O impulso em $t = 5$ produz uma oscilação que decai, mas persiste indefinidamente. A resposta é contínua em $t = 5$, apesar da singularidade do termo não homogêneo nesse ponto. No entanto, a derivada primeira da solução tem um salto em $t = 5$, e a derivada segunda tem uma descontinuidade infinita aí. Isso tem que acontecer pela equação diferencial (17), já que uma singularidade em um dos lados do sinal de igualdade tem que ser balanceada por uma singularidade correspondente do outro lado.

Ao se trabalhar com problemas envolvendo um termo não homogêneo impulsivo, muitas vezes a utilização da função delta simplifica bastante os cálculos matemáticos. No entanto, se a excitação atual se estende a um intervalo de tempo curto, mas não nulo, será introduzido um erro ao se modelar a excitação como instantânea. Esse erro pode ser muito pequeno, mas não deve ser desprezado em um problema prático sem ser analisado. Pede-se que você investigue essa questão no Problema 16 para um oscilador harmônico simples.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe um gráfico da solução.

1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 5) + u_{10}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2$
4. $y'' - y = -20\delta(t - 3); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t - 3\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
6. $y'' + 4y = \delta(t - 4\pi); \quad y(0) = 1/2, \quad y'(0) = 0$
7. $y'' + y = \delta(t - 2\pi)\cos t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y = 2\delta(t - \pi/4); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + 3\delta(t - 3\pi/2) - u_{2\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
10. $2y'' + y' + 4y = \delta(t - \pi/6)\operatorname{sen} t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
12. $y^{(4)} - y = \delta(t - 1); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
13. Considere, novamente, o sistema no Exemplo 1 desta seção, no qual uma oscilação é excitada por um impulso unitário em $t = 5$. Suponha que desejamos colocar o sistema em repouso após exatamente um ciclo – ou seja, quando a resposta volta, pela primeira vez, à posição de equilíbrio movendo-se no sentido positivo.
    (a) Determine o impulso $k\delta(t - t_0)$ que deve ser aplicado ao sistema para se alcançar esse objetivo. Note que k é o tamanho do impulso e t_0 é o instante de sua aplicação.
    (b) Resolva o problema de valor inicial resultante e faça o gráfico de sua solução para confirmar que se comporta da maneira especificada.
14. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
    (a) Seja $\gamma = \frac{1}{2}$. Encontre a solução do problema de valor inicial e desenhe seu gráfico.
    (b) Encontre o instante t_1 no qual a solução atinge seu valor máximo. Encontre, também, esse valor máximo y_1 da solução.
    (c) Seja $\gamma = \frac{1}{4}$ e repita os itens (a) e (b).
    (d) Determine como t_1 e y_1 variam quando γ diminui. Quais são os valores de t_1 e de y_1 quando $\gamma = 0$?
15. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \gamma y' + y = k\delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde k é o tamanho de um impulso em $t = 1$ e γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
    (a) Seja $\gamma = \frac{1}{2}$. Encontre o valor de k para o qual a resposta tem um valor máximo de 2; chame esse valor de k_1.
    (b) Repita o item (a) para $\gamma = \frac{1}{4}$.
    (c) Determine como k_1 varia quando γ diminui. Qual o valor de k_1 quando $\gamma = 0$?
16. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = f_k(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$ com $0 < k \leq 1$.
    (a) Encontre a solução $y = \phi(t, k)$ do problema de valor inicial.
    (b) Calcule $\lim_{k \to 0} \phi(t, k)$ da solução encontrada no item (a).
    (c) Observe que $\lim_{k \to 0} f_k(t) = \delta(t - 4)$. Encontre a solução $\phi_0(t)$ do problema de valor inicial dado com $f_k(t)$ substituído por $\delta(t - 4)$. É verdade que $\phi_0(t) = \lim_{k \to 0} \phi(t, k)$?
    (d) Faça os gráficos de $\phi(t, 1/2)$, $\phi(t, 1/4)$ e $\phi_0(t)$ nos mesmos eixos. Descreva a relação entre $\phi(t, k)$ e $\phi_0(t)$.

Os Problemas de 17 a 22 tratam do efeito de uma sequência de impulsos aplicados em um oscilador não amortecido. Suponha que

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Para cada uma das escolhas para $f(t)$:
(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.

(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.

(c) Determine o que acontece após o final da sequência de impulsos.

17. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi)$

18. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi)$

19. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi/2)$

20. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi/2)$

21. $f(t) = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi]$

22. $f(t) = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \delta(t - 11k/4)$

23. A posição de um determinado oscilador ligeiramente amortecido satisfaz o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, este problema é igual ao Problema 18.

(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.

(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.

(c) Determine o que acontece após o final da sequência de impulsos.

24. Proceda como no Problema 23 para o oscilador, satisfazendo

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi], \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, este problema é igual ao Problema 21.

25. (a) Mostre, pelo método de variação dos parâmetros, que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

é

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \operatorname{sen}(t - \tau)\, d\tau.$$

(b) Mostre que, se $f(t) = \delta(t - \pi)$, então a solução do item (a) se reduz a

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t - \pi).$$

(c) Use uma transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado com $f(t) = \delta(t - \pi)$ e confirme que a solução coincide com a encontrada no item (b).

6.6 A Convolução

Algumas vezes é possível identificar uma transformada de Laplace $H(s)$ como o produto de duas outras transformadas $F(s)$ e $G(s)$, estas últimas correspondendo a funções conhecidas f e g, respectivamente. Nesse caso, poderíamos pensar que $H(s)$ seria a transformada do produto de f e g. Isso não acontece, no entanto; em outras palavras, a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual. Por outro lado, se definirmos convenientemente um "produto generalizado", então a situação muda, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 6.6.1 Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$, então

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \qquad s > a, \tag{1}$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau. \tag{2}$$

A função h é conhecida como a convolução de f e g; algumas vezes as integrais na Eq. (2) são chamadas de integrais de convolução.

A igualdade das duas integrais na Eq. (2) segue da mudança de variável $t - \tau = \xi$ na primeira integral. Antes de demonstrar esse teorema, vamos fazer algumas observações sobre a convolução. De acordo com esse teorema, é a transformada da convolução de duas funções, em vez da transformada de seu produto usual, que é dada pelo produto das transformadas separadas. É conveniente enfatizar que a convolução pode ser considerada como um "produto generalizado" escrevendo-se

$$h(t) = (f * g)(t). \tag{3}$$

Em particular, a notação $(f * g)(t)$ serve para indicar a primeira integral na Eq. (2).

A convolução $(f * g)(t)$ tem muitas das propriedades da multiplicação usual. Por exemplo, é relativamente simples mostrar que

$$f * g = g * f \qquad \text{(comutatividade)} \tag{4}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(distributividade)} \tag{5}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{(associatividade)} \tag{6}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0. \qquad \text{(elemento neutro)} \tag{7}$$

Na Eq. (7) os zeros não denotam o número, mas a função identicamente nula. As demonstrações desses resultados são deixadas a cargo do leitor.

No entanto, a multiplicação usual tem outras propriedades que a convolução não tem. Por exemplo, não é verdade, em geral, que $f * 1$ seja igual a f. Para ver isso, note que

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \, d\tau.$$

Se, por exemplo, $f(t) = \cos t$, então

$$\begin{aligned}(f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t - \tau) \, d\tau = -\operatorname{sen}(t - \tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\operatorname{sen}0 + \operatorname{sen}t \\ &= \operatorname{sen}t.\end{aligned}$$

É claro que $(f * 1)(t) \neq f(t)$. Analogamente, pode não ser verdade que $f * f$ seja não negativa. Veja o Problema 3 para um exemplo.

As convoluções aparecem em diversas aplicações onde o comportamento do sistema em qualquer instante t não depende apenas do estado no instante t, mas também de sua história passada. Sistemas desse tipo são chamados, algumas vezes, de sistemas hereditários e ocorrem em campos tão diversos quanto transporte, viscoelasticidade e dinâmica populacional, entre outros.

Voltando à demonstração do Teorema 6.6.1, observe, em primeiro lugar, que, se

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi$$

e

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau,$$

então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau. \tag{8}$$

Como o integrando na primeira integral não depende da variável de integração da segunda integral, podemos escrever $F(s)G(s)$ como uma integral iterada,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \tag{9}$$

Essa última expressão pode ser colocada em uma forma mais conveniente através de novas variáveis de integração. Seja $\xi = t - \tau$ para τ fixo, de modo que $d\xi = dt$. Além disso, $\xi = 0$ corresponde a $t = \tau$ e $\xi = \infty$ corresponde a $t = \infty$; então a integral em relação a ξ na Eq. (9) vira uma integral em relação a t:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\, dt\right] d\tau. \tag{10}$$

A integral à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é calculada sobre a região ilimitada em forma de cunha no plano $t\tau$ que aparece sombreada na Figura 6.6.1. Supondo que se pode trocar a ordem de integração, obtemos, finalmente,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau\right] dt \tag{11}$$

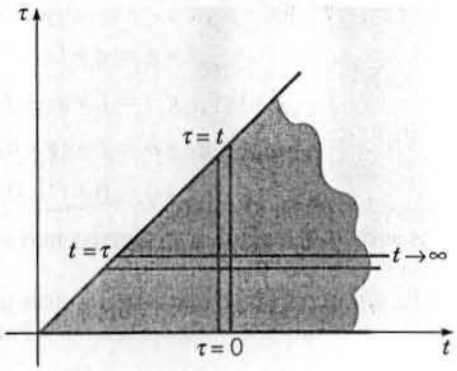


FIGURA 6.6.1 Região de integração para $F(s)G(s)$.

ou

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt \\ &= \mathcal{L}\{h(t)\}, \end{aligned} \tag{12}$$

onde $h(t)$ é definida pela Eq. (2). Isso completa a demonstração do Teorema 6.6.1.

EXEMPLO 1

Encontre a transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}. \tag{13}$$

É conveniente pensar em $H(s)$ como o produto de s^{-2} e $a/(s^2 + a^2)$, que são, de acordo com as linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1, as transformadas de t e de sen at, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 6.6.1 a transformada inversa de $H(s)$ é

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\operatorname{sen} a\tau\, d\tau = \frac{at - \operatorname{sen} at}{a^2}. \tag{14}$$

Você pode verificar que se obtém o mesmo resultado se a função $h(t)$ for escrita na forma alternativa

$$h(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sen} a(t-\tau)\, d\tau,$$

o que confirma a Eq. (2) nesse caso. É claro que $h(t)$ também pode ser encontrada expandindo-se $H(s)$ em frações parciais.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{15}$$

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1. \tag{16}$$

Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

ou

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}. \tag{17}$$

Note que a primeira e a segunda parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) contêm, respectivamente, a dependência de $Y(s)$ nas condições iniciais e no termo não homogêneo. É conveniente escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s). \tag{18}$$

Então, usando as linhas 5 e 6 da Tabela 6.2.1 e o Teorema 6.6.1, temos

$$y = 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \tfrac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2(t-\tau)g(\tau)\,d\tau \tag{19}$$

Se um termo não homogêneo específico g é dado, então a integral na Eq. (19) pode ser calculada (por métodos numéricos, se necessário).

O Exemplo 2 ilustra a força da convolução como ferramenta para se escrever a solução de um problema de valor inicial em função de uma integral. De fato, é possível proceder de um modo bastante semelhante em problemas mais gerais. Considere o problema que consiste na equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{20}$$

onde a, b e c são constantes reais e g é uma função dada, com as condições iniciais

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'. \tag{21}$$

A abordagem de transformada fornece uma compreensão mais profunda sobre a estrutura da solução de qualquer problema desse tipo.

É comum a referência ao problema de valor inicial (20), (21) como um problema de entrada-saída. Os coeficientes a, b e c descrevem as propriedades de algum sistema físico, e $g(t)$ corresponde à força externa (entrada) agindo sobre o sistema. Os valores y_0 e y_0' descrevem o estado inicial, e a solução y é a resposta (saída) no instante t.

Calculando a transformada de Laplace da Eq. (20) e usando as condições iniciais (21), obtemos

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay_0' = G(s).$$

Se definirmos

$$\Phi(s) = \frac{(as+b)y_0 + ay_0'}{as^2+bs+c}, \qquad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2+bs+c}, \tag{22}$$

podemos escrever

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s). \tag{23}$$

Em consequência,

$$y = \phi(t) + \psi(t), \tag{24}$$

onde $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ e $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$. Note que $\phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \tag{25}$$

obtida das Eqs. (20) e (21) fazendo $g(t)$ igual a zero. Analogamente, $\psi(t)$ é a solução de

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{26}$$

na qual os valores iniciais y_0 e y_0' são substituídos por zero.

Uma vez dados valores específicos para a, b e c, podemos encontrar $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ usando a Tabela 6.2.1, possivelmente em conjunto com uma translação ou uma expansão em frações parciais. Para encontrar $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$, é conveniente escrever $\psi(s)$ como

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \tag{27}$$

onde $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. A função H é conhecida como a **função de transferência**[3] e depende apenas das propriedades do sistema em questão, ou seja, $H(s)$ fica inteiramente determinada pelos coeficientes a, b e c. Por outro lado, $G(s)$ depende exclusivamente da excitação externa $g(t)$ que é aplicada ao sistema. Pelo teorema sobre convoluções, podemos escrever

[3]Essa terminologia vem do fato de que $H(s)$ é a razão entre as transformadas da resposta (saída) e da função externa (entrada) do problema (26).

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \tag{28}$$

onde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ e $g(t)$ é o termo não homogêneo dado.

Para obter uma compreensão melhor do significado de $h(t)$, vamos considerar o caso em que $G(s) = 1$; então, $g(t) = \delta(t)$ e $\psi(s) = H(s)$. Isso significa que $y = h(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \tag{29}$$

obtido da Eq. (26) substituindo-se $g(t)$ por $\delta(t)$. Logo, $h(t)$ é a resposta do sistema a um impulso unitário aplicado em $t = 0$, e é natural chamar $h(t)$ de **resposta ao impulso** do sistema. A Eq. (28) diz, então, que $\psi(t)$ é a convolução da resposta ao impulso com a força externa.

Com referência ao Exemplo 2, observamos que nesse caso a função de transferência é $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ e a resposta ao impulso é $h(t) = (\operatorname{sen} 2t)/2$. Além disso, as duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (19) constituem a função $\phi(t)$, a solução da equação homogênea associada que satisfaz as condições iniciais dadas.

PROBLEMAS

1. Prove a comutatividade, a distributividade e a associatividade para a convolução.
   (a) $f * g = g * f$
   (b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
   (c) $f * (g * h) = (f * g) * h$

2. Encontre um exemplo diferente do que foi dado no texto mostrando que $(f * 1)(t)$ não precisa ser igual a $f(t)$.

3. Mostre, através do exemplo $f(t) = \operatorname{sen} t$, que $f * f$ não precisa ser não negativa.

Em cada um dos Problemas de 4 a 7, encontre a transformada de Laplace da função dada.

4. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau\,d\tau$

5. $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen}\tau\,d\tau$

6. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\,d\tau$

7. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)\cos\tau\,d\tau$

Em cada um dos Problemas de 8 a 11, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada usando o teorema sobre convoluções.

8. $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$

9. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$

10. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$

11. $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2+1}$

12. (a) Se $f(t) = t^m$ e se $g(t) = t^n$, onde m e n são inteiros positivos, mostre que

$$f * g = t^{m+n+1} \int_0^1 u^m (1-u)^n\,du.$$

(b) Use o teorema sobre convoluções para mostrar que

$$\int_0^1 u^m (1-u)^n\,du = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$

(c) Estenda o resultado do item (b) para o caso em que m e n são números positivos, mas não necessariamente inteiros.

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, expresse a solução do problema de valor inicial dado em função de uma convolução.

13. $y'' + \omega^2 y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}\alpha t; \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
15. $4y'' + 4y' + 17y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
16. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t); \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
17. $y'' + 4y' + 4y = g(t); \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$
18. $y'' + 3y' + 2y = \cos\alpha t; \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y^{(4)} - y = g(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
20. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = g(t); \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

21. Considere a equação

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = f(t),$$

na qual f e k são funções conhecidas e ϕ deve ser determinada. Como a função desconhecida ϕ aparece debaixo do sinal de integral, a equação dada é dita uma **equação integral**; em particular, ela pertence à classe de equações integrais conhecidas como equações integrais de Volterra. Calcule a transformada de Laplace da equação integral dada e obtenha uma expressão para $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ em função das transformadas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{k(t)\}$ das funções dadas f e k. A transformada inversa de $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ é a solução da equação integral original.

22. Considere a equação integral de Volterra (veja o Problema 21)

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \operatorname{sen} 2t. \tag{i}$$

(a) Resolva a equação integral (i) usando a transformada de Laplace.

(b) Diferenciando a Eq. (i) duas vezes, mostre que $\phi(t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\phi''(t) + \phi(t) = -4\operatorname{sen} 2t.$$

Mostre também que as condições iniciais são

$$\phi(0) = 0, \qquad \phi'(0) = 2.$$

(c) Resolva o problema de valor inicial do item (b) e verifique que a solução é a mesma obtida no item (a).

Em cada um dos Problemas de 23 a 25:

(a) Resolva a equação de Volterra dada usando a transformada de Laplace.

(b) Converta a equação integral a um problema de valor inicial, como no Problema 22(b).

(c) Resolva o problema de valor inicial no item (b) e verifique que a solução é a mesma encontrada no item (a).

23. $\phi(t) + \displaystyle\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

24. $\phi(t) - \displaystyle\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

25. $\phi(t) + 2\displaystyle\int_0^t \cos(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = e^{-t}$

Existem também equações, conhecidas como **equações íntegro-diferenciais**, onde aparecem derivadas e integrais da função desconhecida. Em cada um dos Problemas de 26 a 28:

(a) Resolva a equação íntegro-diferencial dada usando a transformada de Laplace.

(b) Diferenciando a equação íntegro-diferencial um número suficiente de vezes, converta-a em um problema de valor inicial.

(c) Resolva o problema de valor inicial no item (b) e verifique que a solução é a mesma encontrada no item (a).

26. $\phi'(t) + \displaystyle\int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = t, \qquad \phi(0) = 0$

27. $\phi'(t) - \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (t-\xi)^2\phi(\xi)\,d\xi = -t, \qquad \phi(0) = 1$

28. $\phi'(t) + \phi(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi, \qquad \phi(0) = 1$

29. **A Tautócrona.** Um problema de interesse na história da matemática é o de encontrar a tautócrona[4] — a curva descrita por uma partícula deslizando livremente sob a ação apenas da gravidade, atingindo o fundo no mesmo instante independentemente de seu ponto de partida na curva. Esse problema apareceu na construção de um relógio com pêndulo, cujo período é independente da amplitude de seu movimento. A tautócrona foi encontrada por Christian Huygens (1629-1695) em 1673 por métodos geométricos e, mais tarde, por Leibniz e Jakob Bernoulli usando argumentos analíticos. A solução de Bernoulli (em 1690) foi uma das primeiras ocasiões em que se resolveu explicitamente uma equação diferencial. A configuração geométrica está ilustrada na Figura 6.6.2.

[4] A palavra "tautócrana" tem origem nas palavras gregas *tauto*, que significa o mesmo, e *chronos*, que significa tempo.

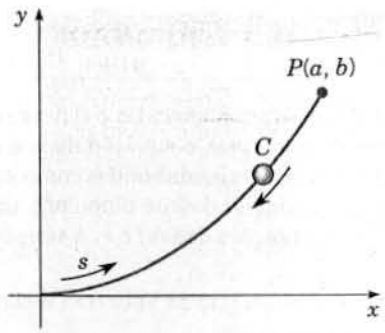


FIGURA 6.6.2 A tautócrona.

O ponto inicial $P(a,b)$ é unido ao ponto final $(0,0)$ pelo arco C. O comprimento de arco s é medido a partir da origem e $f(y)$ denota a taxa de variação de s em relação a y:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{i}$$

Segue então, do princípio de conservação de energia, que o tempo $T(b)$ necessário para uma partícula deslizar de P até a origem é

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\, dy. \tag{ii}$$

(a) Suponha que $T(b) = T_0$, uma constante, para cada b. Calculando a transformada de Laplace da Eq. (ii) nesse caso e usando o teorema sobre convoluções, mostre que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\,\frac{T_0}{\sqrt{s}}; \tag{iii}$$

depois, mostre que

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\,\frac{T_0}{\sqrt{y}}. \tag{iv}$$

Sugestão: veja o Problema 27 da Seção 6.1.

(b) Combinando as Eqs. (i) e (iv), mostre que

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}, \tag{v}$$

onde $\alpha = gT_0^2/\pi^2$.

(c) Use a substituição $y = 2\alpha\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$ para resolver a Eq. (v) e mostre que

$$x = \alpha(\theta + \mathrm{sen}\,\theta), \qquad y = \alpha(1 - \cos\theta). \tag{vi}$$

As Eqs. (vi) podem ser identificadas como equações paramétricas de uma cicloide. Assim, a tautócrona é um arco de uma cicloide.

REFERÊNCIAS

Os livros listados a seguir contêm informações adicionais sobre a transformada de Laplace e suas aplicações:

Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1971).

Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Application of the LaplaceTransform* (trans. W. Nader) (New York: Springer, 1974).

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962).

Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (New York: Plenum, 1978).

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics* (London: Cambridge University Press, 1971).

Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963).

Cada um dos livros mencionados acima contém uma tabela de transformadas. Também estão disponíveis tabelas mais extensas; veja, por exemplo:

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms* (Vol. 1) (New York: McGraw-Hill, 1954).

Roberts, G. E., and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms* (Philadelphia: Saunders, 1966).

Mais detalhes sobre funções generalizadas podem ser encontrados em

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions* (London: Cambridge University Press, 1958).

CAPÍTULO

7

Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma. Por exemplo, circuitos elétricos têm essa característica, assim como problemas em mecânica e em outros campos. Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um *sistema* de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. Vamos estudar, neste capítulo, sistemas de equações *lineares* de primeira ordem, em particular equações com coeficientes constantes, utilizando alguns aspectos elementares da álgebra linear para unificar a apresentação. Em muitos aspectos, este capítulo segue a mesma linha do tratamento dado às equações lineares de segunda ordem no Capítulo 3.

7.1 Introdução

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas função da mesma variável independente única. Vamos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes, que são funções de t, por $x_1, x_2, x_3, \ldots$ A diferenciação em relação a t será denotada por uma linha.

Por exemplo, considere o sistema mola-massa na Figura 7.1.1. As duas massas se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e são, também, restringidas em seu movimento pelas três molas com constantes k_1, k_2 e k_3, respectivamente. Usando argumentos semelhantes aos da Seção 3.7, encontramos as seguintes coordenadas x_1 e x_2 para as duas massas:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

A dedução das Eqs. (1) está esquematizada no Problema 17.

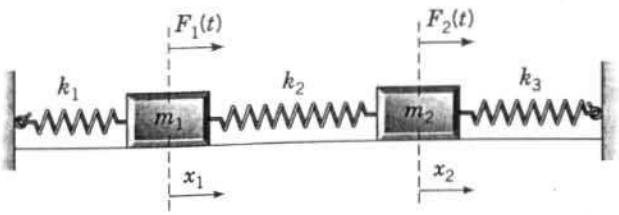


FIGURA 7.1.1 Um sistema com duas massas e três molas.

Vamos considerar, agora, o circuito *LRC* em paralelo ilustrado na Figura 7.1.2. Seja V a diferença de tensão no capacitor e I a corrente passando pelo indutor. Então, de acordo com a Seção 3.7 e com o Problema 19 desta seção, podemos mostrar que a diferença de tensão e a corrente são descritas pelo sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}, \end{aligned} \tag{2}$$

onde L é a indutância, C a capacitância e R a resistência.

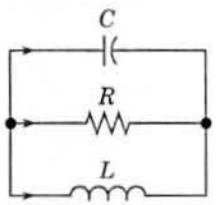


FIGURA 7.1.2 Um circuito *RLC* em paralelo.

Uma razão pela qual sistemas de equações de primeira ordem são particularmente importantes é que equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em tais sistemas. Isso, normalmente, é necessário se é planejada uma abordagem numérica, já que quase todos os códigos para gerar soluções numéricas aproximadas de equações diferenciais são escritos para sistemas de equações de primeira ordem. O exemplo a seguir ilustra como é fácil fazer a transformação.

EXEMPLO 1 O movimento de um determinado sistema mola-massa (veja o Exemplo 3 da Seção 3.7) é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$u'' + 0{,}125u' + u = 0. \tag{3}$$

Escreva essa equação como um sistema de equações de primeira ordem.

Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = u'$. Então, $x_1' = x_2$. Além disso, $u'' = x_2'$. Então, substituindo u, u' e u'' na Eq. (3), obtemos

$$x_2' + 0{,}125x_2 + x_1 = 0.$$

Logo, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0{,}125x_2. \end{aligned} \tag{4}$$

A equação geral de movimento de um sistema mola-massa,

$$mv'' + \gamma v' + kv = F(t), \tag{5}$$

pode ser transformada em um sistema de primeira ordem do mesmo modo. Definindo $x_1 = v$ e $x_2 = v'$ e procedendo como no Exemplo 1, obtemos rapidamente o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 + F(t)/m. \end{aligned} \tag{6}$$

Para transformar uma equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{7}$$

em um sistema de n equações de primeira ordem, estendemos o método do Exemplo 1 definindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}. \tag{8}$$

Segue imediatamente que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \tag{9}$$

e, da Eq. (7),

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{10}$$

As Eqs. (9) e (10) são casos particulares do sistema mais geral

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{11}$$

De maneira análoga, o sistema (1) pode ser reduzido a um sistema de quatro equações de primeira ordem da forma (11), enquanto o sistema (2) já está nessa forma. De fato, sistemas da forma (11) incluem quase todos os casos de interesse, de modo que a maior parte da teoria mais avançada de equações diferenciais é dedicada a tais sistemas.

Uma **solução** do sistema (11) no intervalo I: $\alpha < t < \beta$ é um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_n(t) \tag{12}$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e que satisfazem o sistema de equações (11) em todos os pontos desse intervalo. Além do sistema de equações diferenciais dado, podem ser fornecidas, também, condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{13}$$

onde t_0 é um valor especificado de t em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. As equações diferenciais (11) e as condições iniciais (13) juntas formam um problema de valor inicial.

Uma solução (12) pode ser vista como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão n. Para um valor de t dado, as Eqs. (12) fornecem valores para as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de um ponto no espaço. À medida que t varia, as coordenadas, em geral, também mudam. A coleção de pontos correspondentes para $\alpha < t < \beta$ forma uma curva no espaço. Às vezes é útil pensar na curva como a trajetória ou o caminho percorrido por uma partícula movendo-se de acordo com o sistema de equações diferenciais (11). As condições iniciais (13) determinam o ponto inicial da partícula em movimento.

As condições a seguir sobre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, facilmente verificadas em problemas específicos, são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (11), (13) tenha uma solução única. O Teorema 7.1.1 é análogo ao Teorema 2.4.2, o teorema de existência e unicidade para uma única equação de primeira ordem.

Teorema 7.1.1 Suponha que cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ e suas derivadas parciais, $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$, são contínuas em uma região R do espaço $tx_1x_2\ldots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta, \alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ está em R. Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (11) que também satisfaz as condições iniciais (13).

A demonstração deste teorema pode ser construída generalizando-se o argumento dado na Seção 2.8, mas não faremos isso aqui. No entanto, note que não se diz nada nas hipóteses do teorema sobre as derivadas parciais de $F_1, \ldots, F_n$ em relação à variável independente t. Além disso, na conclusão o comprimento $2h$ do intervalo no qual a solução existe não está especificado exatamente e, em alguns casos, pode ser muito curto. Finalmente, o mesmo resultado pode ser provado sob hipóteses mais fracas, mas muito mais complicadas, de modo que o teorema, como enunciado, não é o mais geral conhecido e as condições dadas são suficientes, mas não necessárias, para a conclusão ser válida.

Se cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ nas Eqs. (11) for uma função linear das variáveis dependentes $x_1, \ldots, x_n$, então o sistema de equações é dito **linear**; caso contrário, é **não linear**. Assim, o sistema mais geral de n equações lineares tem a forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{14}$$

Se todas as funções $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I, então o sistema (14) é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não homogêneo**. Observe que os sistemas (1) e (2) são ambos lineares. O sistema (1) é não homogêneo, a menos que $F_1(t) = F_2(t) = 0$, enquanto o sistema (2) é homogêneo. Para o sistema linear (14), o teorema de existência e unicidade é mais simples e também tem uma conclusão mais forte. É análogo aos Teoremas 2.4.1 e 3.2.1.

Teorema 7.1.2 Se as funções $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ forem contínuas em um intervalo aberto $I: \alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (14) que também satisfaz as condições iniciais (13), onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.

Note que em contraste com a situação para um sistema não linear a existência e a unicidade de solução para um sistema linear estão garantidas em todo o intervalo no qual as hipóteses são satisfeitas. Além disso, para um sistema linear os valores iniciais $x_1^0, \ldots, x_n^0$ em $t = t_0$ são inteiramente arbitrários, enquanto no caso não linear o ponto inicial tem que estar contido na região R definida no Teorema 7.1.1.

O restante deste capítulo é dedicado a sistemas lineares de equações de primeira ordem (sistemas não lineares estarão incluídos nas discussões dos Capítulos 8 e 9). Nossa apresentação utiliza notação matricial e supõe que o leitor esteja familiarizado com as propriedades de matrizes. Os fatos básicos sobre matrizes estão resumidos nas Seções 7.2 e 7.3, e material mais avançado será revisto quando necessário em seções posteriores.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

1. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 3\operatorname{sen} t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0{,}25)u = 0$
4. $u^{(4)} - u = 0$

Em cada um dos Problemas 5 e 6, transforme o problema de valor inicial dado em um problema de valor inicial para duas equações de primeira ordem.

5. $u'' + 0{,}25u' + 4u = 2\cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2$
6. $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$

7. Sistemas de equações de primeira ordem podem ser transformados, algumas vezes, em uma única equação de ordem maior. Considere o sistema

$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$

   (a) Resolva a primeira equação para x_2 e substitua na segunda equação, obtendo, assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva essa equação para x_1 e determine x_2.
   (b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2, x_2(0) = 3$.
   (c) Esboce a curva, para $t \geq 0$, dada em forma paramétrica pelas expressões para x_1 e x_2 encontradas em (b).

Em cada um dos Problemas de 8 a 12, proceda como no Problema 7.

(a) Transforme o sistema dado em uma única equação de segunda ordem.
(b) Encontre x_1 e x_2 que satisfazem, também, as condições iniciais dadas.
(c) Esboce o gráfico da solução no plano x_1x_2 para $t \geq 0$.

8. $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
   $x_2' = 2x_1 - 2x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{2}$
9. $x_1' = 1{,}25x_1 + 0{,}75x_2, \quad x_1(0) = -2$
   $x_2' = 0{,}75x_1 + 1{,}25x_2, \quad x_2(0) = 1$
10. $x_1' = x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = -1$
    $x_2' = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 2$
11. $x_1' = 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
    $x_2' = -2x_1, \quad x_2(0) = 4$

12. $x_1' = -0{,}5x_1 + 2x_2, \qquad x_1(0) = -2$
$x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2, \qquad x_2(0) = 2$

13. Transforme as Eqs. (2) para o circuito em paralelo em uma única equação de segunda ordem.

14. Mostre que se a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} forem constantes, com a_{12} e a_{21} sem serem nulos ao mesmo tempo, e se as funções g_1 e g_2 forem diferenciáveis, então o problema de valor inicial

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \qquad x_1(0) = x_1^0$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \qquad x_2(0) = x_2^0$$

poderá ser transformado em um problema de valor inicial para uma única equação de segunda ordem. Pode-se usar o mesmo procedimento se $a_{11}, \ldots, a_{22}$ forem funções de t?

15. Considere o sistema linear homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.$$

Mostre que se $x = x_1(t), y = y_1(t)$ e $x = x_2(t), y = y_2(t)$ forem duas soluções do sistema dado, então $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t), y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também será solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2. Este é o princípio da superposição.

16. Sejam $x = x_1(t), y = y_1(t)$ e $x = x_2(t), y = y_2(t)$ duas soluções do sistema linear não homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).$$

Mostre que $x = x_1(t) - x_2(t), y = y_1(t) - y_2(t)$ é uma solução do sistema homogêneo associado.

17. As Eqs. (1) podem ser deduzidas desenhando-se um diagrama mostrando as forças agindo sobre cada massa. A Figura 7.1.3*a* mostra a situação quando os deslocamentos x_1 e x_2 das duas massas são ambos positivos (para a direita) e $x_2 > x_1$. Nesse caso, as molas 1 e 2 estão alongadas e a mola 3 está comprimida, gerando as forças ilustradas na Figura 7.1.3*b*. Use a lei de Newton ($F = ma$) para deduzir as Eqs. (1).

18. Transforme o sistema (1) em um sistema de primeira ordem fazendo $y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_1', y_4 = x_2'$.

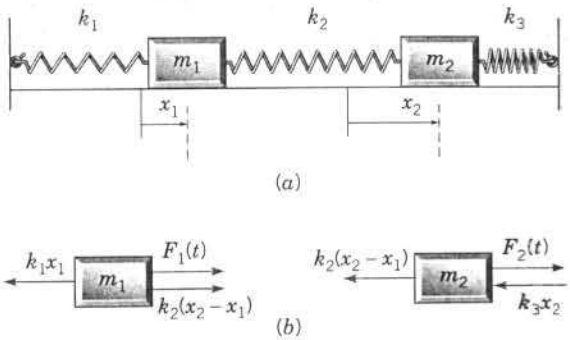


FIGURA 7.1.3 (*a*) Os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos positivos. (*b*) O diagrama de forças para o sistema mola-massa.

Circuitos Elétricos. A teoria de circuitos elétricos, do tipo ilustrado na Figura 7.1.2, consistindo em indutores, resistências e capacitores, baseia-se nas leis de Kirchhoff: (1) o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero; (2) a diferença de tensão total em cada laço fechado é zero. Além das leis de Kirchhoff temos, também, a relação entre a corrente I em ampères passando por elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento:

$$V = RI, \qquad R = \text{resistência em ohms;}$$
$$C\frac{dV}{dt} = I, \qquad C = \text{capacitância em farads}^1\text{;}$$
$$L\frac{dI}{dt} = V, \qquad L = \text{indutância em henrys.}$$

As leis de Kirchhoff e a relação entre corrente e diferença de tensão em cada elemento do circuito fornecem um sistema de equações algébricas e diferenciais de onde é possível determinar a diferença de tensão e a corrente em todo o circuito. Os Problemas 19 a 21 ilustram o procedimento que acabamos de descrever.

[1]Capacitores têm de fato, capacitâncias medidas tipicamente em microfarads. Usamos farad como unidade de medida por conveniência numérica.

19. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.2. Sejam I_1, I_2 e I_3 as correntes atravessando respectivamente o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1, V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão serão consideradas positivas.

(a) Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no laço superior do circuito, mostre que

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{i}$$

De maneira análoga, mostre que

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{ii}$$

(b) Aplicando a primeira lei de Kirchhoff em qualquer dos nós do circuito, mostre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \tag{iii}$$

(c) Use a relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito para obter as equações

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3. \tag{iv}$$

(d) Elimine V_2, V_3, I_1 e I_2 das equações (i) a (iv) para obter

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1. \tag{v}$$

Observe que se omitirmos os índices nas Eqs. (v) teremos o sistema (2) desta seção.

20. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.4. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \qquad \frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

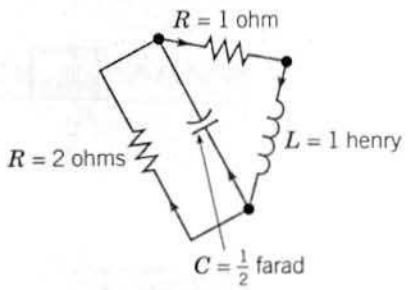


FIGURA 7.1.4 O circuito no Problema 20.

21. Considere o circuito ilustrado na Figura 7.1.5. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \qquad C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

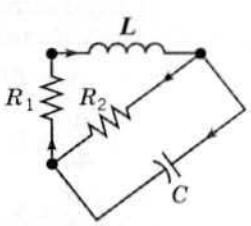


FIGURA 7.1.5 O circuito no Problema 21.

22. Considere os dois tanques interligados ilustrados na Figura 7.1.6.* O Tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal de água e 25 oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal de água e 15 oz de sal. Entra no

*Usamos as abreviações *gal* para galões, *oz* para onças e *min* para minutos; 1 oz ≅ 28,3495 g e 1 gal ≅ 4,546 l. (N.T.)

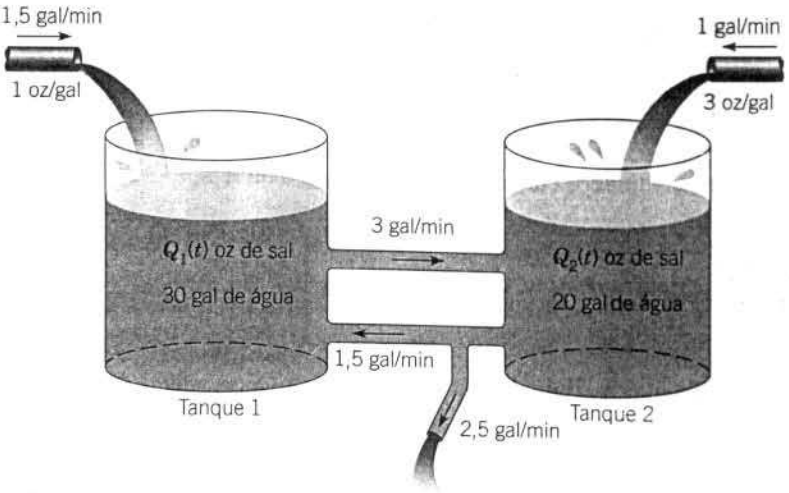


FIGURA 7.1.6 Dois tanques interligados (Problema 22).

Tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz/gal de sal a uma taxa de 1,5 gal/min. A mistura flui do Tanque 1 para o Tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min. Entra, também, no Tanque 2 (vinda de fora) uma mistura de água contendo 3 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura escorre do Tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min, e parte dela volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo. Observe que o sistema de equações diferenciais é não homogêneo.

(b) Encontre os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está em equilíbrio, ou seja, não varia com o tempo. Sejam Q_1^E e Q_2^E os valores de equilíbrio. Você pode prever qual tanque atingirá seu estado de equilíbrio mais rapidamente?

(c) Sejam $x_1 = Q_1(t) - Q_1^E$ e $x_2 = Q_2(t) - Q_2^E$. Determine um problema de valor inicial para x_1 e x_2. Observe que o sistema de equações para x_1 e x_2 é homogêneo.

23. Considere dois tanques interligados de maneira análoga aos da Figura 7.1.6. O Tanque 1 contém, inicialmente, 60 gal de água e Q_1^0 oz de sal, enquanto o Tanque 2 contém, inicialmente, 100 gal de água e Q_2^0 oz de sal. Está entrando no Tanque 1, a uma taxa de 3 gal/min, uma mistura de água contendo q_1 oz/gal. A mistura no Tanque 1 sai a uma taxa de 4 gal/min, da qual metade entra no Tanque 2, enquanto o restante deixa o sistema. O Tanque 2 recebe de fora uma mistura de água com q_2 oz/gal de sal a uma taxa de 1 gal/min. A mistura no Tanque 2 sai a uma taxa de 3 gal/min, mas uma parte disso volta para o Tanque 1 a uma taxa de 1 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.

(a) Desenhe um diagrama que ilustre o processo de fluxo aqui descrito. Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$, respectivamente, as quantidades de sal em cada tanque no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais para Q_1 e Q_2 que modelam o processo de fluxo.

(b) Encontre os valores de equilíbrio Q_1^E e Q_2^E em função das concentrações q_1 e q_2.

(c) É possível (ajustando q_1 e q_2) obter $Q_1^E = 60$ e $Q_2^E = 50$ como um estado de equilíbrio?

(d) Descreva os estados de equilíbrio possíveis para esse sistema para diversos valores de q_1 e q_2.

7.2 Revisão de Matrizes

Por razões tanto teóricas quanto computacionais, é recomendável ter em mente alguns dos resultados de álgebra matricial[2] para resolver um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais

[2]As propriedades de matrizes foram exploradas pela primeira vez em um artigo de 1858 escrito pelo algebrista inglês Arthur Cayley (1821-1895), embora a palavra "matriz" tenha sido introduzida por seu amigo James Sylvester (1814-1897) em 1850. Cayley fez parte de seu trabalho matemático mais importante enquanto advogava, de 1849 até 1863; tornou-se, depois, professor de matemática em Cambridge, uma posição que manteve até o fim de sua vida. Depois do trabalho pioneiro de Cayley, o desenvolvimento da teoria de matrizes foi rápido, com contribuições importantes de Charles Hermite, Georg Frobenius e Camille Jordan, entre outros.

lineares. Para facilitar, esta e a próxima seção serão dedicadas a um pequeno resumo dos fatos sobre matrizes que usaremos depois. Maiores detalhes podem ser encontrados em qualquer livro elementar de álgebra linear. Supomos, no entanto, que você conhece determinantes e sabe calculá-los.

Vamos denotar matrizes por letra maiúsculas em negrito, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$, usando, de vez em quando, letras gregas maiúsculas como $\Phi, \Psi, \ldots$ Uma matriz $\mathbf{A}$ consiste em um arranjo retangular de números ou elementos arrumados em m linhas e n colunas – ou seja,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dizemos que $\mathbf{A}$ é uma matriz $m \times n$. Embora mais adiante neste capítulo façamos, muitas vezes, a hipótese de que os elementos de determinadas matrizes são números reais, nesta seção vamos supor que os elementos podem ser números complexos. O elemento que está na i-ésima linha e na j-ésima coluna será denotado por a_{ij}, onde o primeiro índice identifica a linha e o segundo, a coluna. Algumas vezes utiliza-se a notação (a_{ij}) para denotar a matriz cujo elemento genérico é a_{ij}.

Associada a cada matriz $\mathbf{A}$ existe a matriz $\mathbf{A}^T$, conhecida como a **transposta** de $\mathbf{A}$, que é obtida de $\mathbf{A}$ permutando-se as linhas e colunas de $\mathbf{A}$. Assim, se $\mathbf{A} = (a_{ij})$, então $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. Além disso, denotaremos o complexo conjugado de a_{ij} por $\overline{a}_{ij}$ e a matriz obtida de $\mathbf{A}$ trocando-se todos os elementos pelos seus conjugados por $\overline{\mathbf{A}}$. A matriz $\overline{\mathbf{A}}$ é a **conjugada** de $\mathbf{A}$. Será necessário, também, considerar a transposta da conjugada, $\overline{\mathbf{A}}^T$. Essa matriz é chamada de **adjunta** de $\mathbf{A}$ e denotada por $\mathbf{A}^*$.

Por exemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

Então

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

Estamos particularmente interessados em dois tipos especiais de matrizes: matrizes quadradas, que têm o mesmo número de linhas e colunas – ou seja, $m = n$; e vetores (ou vetores colunas), que podem ser considerados como matrizes $n \times 1$, ou matrizes tendo apenas uma coluna. Dizemos que uma matriz quadrada com n linhas e n colunas é de ordem n. Denotaremos vetores (colunas) por letras minúsculas em negrito, $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \ldots$ A transposta $\mathbf{x}^T$ de uma coluna $n \times 1$ é um vetor linha, isto é, a matriz consistindo em apenas uma linha cujos elementos são iguais aos elementos nas posições correspondentes de $\mathbf{x}$.

Propriedades de Matrizes.

1. **Igualdade.** Duas matrizes $m \times n$ $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ditas iguais se todos os elementos correspondentes são iguais – ou seja, se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j.

2. **Matriz Nula.** O símbolo $\mathbf{0}$ será usado para denotar a matriz (ou vetor) com todos os elementos iguais a 0.

3. **Soma.** A soma de duas matrizes $m \times n$ $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é definida como a matriz obtida somando-se os elementos correspondentes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \tag{2}$$

Com essa definição, segue que a soma de matrizes é comutativa e associativa, de modo que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \tag{3}$$

4. **Multiplicação por um Número.** O produto de uma matriz $\mathbf{A}$ por um número complexo α é definido da seguinte maneira:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}); \tag{4}$$

ou seja, cada elemento de $\mathbf{A}$ é multiplicado por α. As propriedades distributivas

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{5}$$

são satisfeitas por esse tipo de multiplicação. Em particular, a matriz negativa de $\mathbf{A}$, denotada por $-\mathbf{A}$, é definida por

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}. \tag{6}$$

5. **Subtração.** A diferença $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de duas matrizes $m \times n$ é definida por

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{7}$$

Logo,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}), \tag{8}$$

que é semelhante à Eq. (2).

6. **Multiplicação.** O produto $\mathbf{AB}$ de duas matrizes está definido sempre que o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes $m \times n$ e $n \times r$, respectivamente, então o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times r$. O elemento na i-ésima linha e na j-ésima coluna de $\mathbf{C}$ é encontrado multiplicando-se cada elemento da i-ésima linha de $\mathbf{A}$ pelo elemento correspondente da j-ésima coluna de $\mathbf{B}$ e, depois, somando-se os produtos resultantes. Simbolicamente,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{9}$$

Pode-se mostrar, através de um cálculo direto, que a multiplicação de matrizes é associativa

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{10}$$

e distributiva

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{11}$$

No entanto, em geral a multiplicação de matrizes não é comutativa. Para que ambos os produtos $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{BA}$ existam e sejam de mesmo tamanho, é necessário que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam quadradas de mesma ordem. Mesmo nesse caso os produtos são normalmente diferentes, de modo que em geral

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{12}$$

EXEMPLO 1

Para ilustrar a multiplicação de matrizes e o fato de que a multiplicação não é comutativa, considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da definição de multiplicação dada pela Eq. (9), temos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, vemos que

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

É claro que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7. **Multiplicação de Vetores.** Existem diversas maneiras de se formar um produto de dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, cada um com n componentes. Uma é a extensão direta do produto escalar usual da Física e do Cálculo; denotamos esse produto por $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ e escrevemos

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{13}$$

O resultado da Eq. (13) é um número (complexo), e segue diretamente da Eq. (13) que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}). \tag{14}$$

Existe um outro produto entre vetores definido para dois vetores quaisquer com o mesmo número de componentes. Esse produto, denotado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é chamado de **produto interno*** e é definido por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i. \tag{15}$$

O produto interno também é um número (complexo), e comparando as Eqs. (13) e (15) vemos que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\bar{\mathbf{y}}. \tag{16}$$

Então, se todos os elementos forem reais, os dois produtos (13) e (15) são idênticos. Segue da Eq. (15) que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, & (\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) &= \bar{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{17}$$

Note se mesmo que o vetor $\mathbf{x}$ tenha elementos com parte imaginária não nula, o produto interno de $\mathbf{x}$ consigo mesmo é um número real não negativo

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2. \tag{18}$$

A quantidade não negativa $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, denotada muitas vezes por $\|\mathbf{x}\|$, é chamada de **comprimento** ou **tamanho** de $\mathbf{x}$. Se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, os dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos **ortogonais**. Por exemplo, os vetores unitários $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, da geometria vetorial tridimensional, formam um conjunto ortogonal. Por outro lado, se alguns dos elementos de $\mathbf{x}$ não são reais, então o produto

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{19}$$

pode não ser um número real.

Por exemplo, sejam

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{y} &= (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4 + 3i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2 + 7i, \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} &= (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3 + 2i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7. \end{aligned}$$

8. **Matriz Identidade.** A identidade multiplicativa, ou simplesmente a matriz identidade $\mathbf{I}$, é dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

*Em português este produto também é chamado, muitas vezes, de produto escalar. No entanto, para não confundir com o produto definido pela Eq. (13), reservaremos a nomenclatura "escalar" para o produto definido por (13).

Da definição de multiplicação matricial, temos

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{21}$$

para qualquer matriz (quadrada) **A**. Portanto, a comutatividade é válida para matrizes quadradas se uma delas é a identidade.

9. **Inversa.** A matriz **A** é dita **não singular** ou **invertível** se existe uma outra matriz **B** tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, onde **I** é a identidade. Se existe tal **B**, pode-se mostrar que existe apenas uma. Ela é chamada de inversa multiplicativa, ou, simplesmente, inversa de **A**, e escrevemos $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Então

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{22}$$

Matrizes que não têm inversas são ditas **singulares** ou **não invertíveis**.

Existem várias maneiras de se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de **A**, supondo que ela exista. Uma envolve o uso de determinantes. A cada elemento a_{ij} de uma matriz dada associa-se o menor M_{ij}, que é o determinante da matriz obtida excluindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz original – ou seja, a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij}. Além disso, associa-se a cada elemento a_{ij} o cofator C_{ij} definido pela equação

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{23}$$

Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, pode-se mostrar que o elemento geral b_{ij} é dado por

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}}. \tag{24}$$

Embora a Eq. (24) não seja um modo eficiente[3] de calcular $\mathbf{A}^{-1}$, sugere uma condição que **A** precisa satisfazer para ter inversa. De fato, a condição é necessária e suficiente: **A** é invertível se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Se $\det \mathbf{A} = 0$, então **A** é singular.

Outra maneira, geralmente melhor, de calcular $\mathbf{A}^{-1}$ é através de operações elementares sobre as linhas. Existem três dessas operações:

1. Permutar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero.
3. Somar qualquer múltiplo de uma linha a outra linha.

A transformação de uma matriz por uma sequência de operações elementares é chamada de **redução por linhas** ou **método de eliminação de Gauss**[4]. Qualquer matriz invertível **A** pode ser transformada na identidade **I** através de uma sequência sistemática dessas operações. É possível mostrar que se a mesma sequência de operações for efetuada em **I**, então **I** é transformada em $\mathbf{A}^{-1}$. É mais eficiente executar a sequência de operações nas duas matrizes ao mesmo tempo, formando a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$. O exemplo a seguir ilustra o cálculo de uma matriz inversa desse modo.

EXEMPLO 2

Encontre a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Começamos formando a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$:

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

[3]Para valores grandes de n, o número de multiplicações necessárias para se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ pela Eq. (24) é proporcional a $n!$. Com a utilização de métodos mais eficientes, como o procedimento de redução por linhas descrito mais tarde, o número de multiplicações fica proporcional a n^3 apenas. Mesmo para valores pequenos de n (como $n = 4$), determinantes não são ferramentas boas para o cálculo de inversas e métodos de redução por linhas são preferíveis.

[4]Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a maior parte de sua vida em Göttingen e fez contribuições importantes em muitas áreas da matemática, incluindo teoria dos números, álgebra, geometria não euclidiana e diferencial, e análise, assim como em campos mais aplicados, como geodésica, estatística e mecânica celeste. Considera-se que esteja entre os seis melhores matemáticos de todos os tempos.

A matriz **A** pode ser transformada em **I** pela sequência de operações a seguir e, ao mesmo tempo, **I** é transformada em $\mathbf{A}^{-1}$. O resultado de cada passo parece abaixo do enunciado.

(a) Obtenha zeros na primeira coluna fora da diagonal somando (–3) vezes a primeira linha à segunda e somando (–2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Obtenha 1 na posição diagonal na segunda coluna multiplicando a segunda linha por $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(c) Obtenha zeros na segunda coluna fora da diagonal somando a segunda linha à primeira e somando (– 4) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

(d) Obtenha 1 na posição diagonal na terceira coluna multiplicando a terceira linha por $(-\frac{1}{5})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

(e) Obtenha zeros na terceira coluna fora da diagonal somando $(-\frac{3}{2})$ vezes a terceira linha à primeira e somando $(-\frac{5}{2})$ vezes a terceira linha à segunda.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

A última dessas matrizes é $\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}$, um resultado que pode ser verificado diretamente através da multiplicação pela matriz original **A**.

Esse exemplo tornou-se ligeiramente mais simples pelo fato de que a matriz original **A** tinha o primeiro elemento igual a 1 ($a_{11} = 1$). Se não for esse o caso, então o primeiro passo é produzir 1 nessa posição multiplicando-se a primeira linha por $1/a_{11}$ se $a_{11} \neq 0$. Se $a_{11} = 0$, então a primeira linha tem que ser trocada por outra, de modo a trazer um elemento diferente de zero para o primeiro elemento da primeira linha antes de prosseguir.

Funções Matriciais. Vamos precisar, algumas vezes, considerar vetores ou matrizes cujos elementos são funções de uma variável real t. Escrevemos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

respectivamente.

A matriz $\mathbf{A}(t)$ é dita contínua em $t = t_0$, ou em um intervalo $\alpha < t < \beta$, se todos os elementos de **A** são funções contínuas de t no ponto dado, ou no intervalo dado. Analogamente, **A** é dita diferenciável se todos os seus elementos são diferenciáveis e sua derivada $d\mathbf{A}/dt$ é definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right); \tag{26}$$

ou seja, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ é a derivada do elemento correspondente de **A**. Do mesmo modo, a integral de uma matriz de funções é definida por

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right). \tag{27}$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

então

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \int_0^{\pi} \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Muitas das propriedades do cálculo elementar podem ser facilmente estendidas para funções matriciais; em particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \qquad \text{onde } \mathbf{C} \text{ é uma matriz constante;} \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}. \tag{30}$$

É preciso tomar cuidado em cada termo das Eqs. (28) e (30) para evitar trocar a ordem de multiplicação. As definições expressas pelas Eqs. (26) e (27) também se aplicam ao caso particular de vetores.

PROBLEMAS

1. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre

   (a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$
   (c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$, encontre

   (a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ (b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$
   (c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontre

   (a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{B}^T$
   (c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

4. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$, encontre

   (a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\overline{\mathbf{A}}$ (c) $\mathbf{A}^*$

5. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

   verifique que $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

6. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

   verifique que

   (a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
   (c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

7. Prove cada uma das propriedades a seguir da álgebra de matrizes:
   (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (b) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
   (c) $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ (d) $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$
   (e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ (f) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

8. Se $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}2\\3i\\1-i\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}-1+i\\2\\3-i\end{pmatrix}$, encontre
   (a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ (b) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$
   (c) $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (d) $(\mathbf{y},\mathbf{y})$

9. Se $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1-2i\\i\\2\end{pmatrix}$ e $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}2\\3-i\\1+2i\end{pmatrix}$, mostre que
   (a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}=\mathbf{y}^T\mathbf{x}$ (b) $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\overline{(\mathbf{y},\mathbf{x})}$

Em cada um dos Problemas de 10 a 19, calcule a inversa da matriz dada ou mostre que ela é singular.

10. $\begin{pmatrix}1&4\\-2&3\end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix}3&-1\\6&2\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{pmatrix}$ 13. $\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&8\\1&-2&-7\end{pmatrix}$ 15. $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&1&0\\3&-2&1\end{pmatrix}$ 17. $\begin{pmatrix}2&3&1\\-1&2&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$ 19. $\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-1&2&-4&2\\1&0&1&3\\-2&2&0&-1\end{pmatrix}$

20. Prove que se existem duas matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ tais que $\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ e $\mathbf{AC}=\mathbf{I}$, então $\mathbf{B}=\mathbf{C}$. Isso mostra que a matriz $\mathbf{A}$ só pode ter uma inversa.

21. Se $\mathbf{A}(t)=\begin{pmatrix}e^t&2e^{-t}&e^{2t}\\2e^t&e^{-t}&-e^{2t}\\-e^t&3e^{-t}&2e^{2t}\end{pmatrix}$ e $\mathbf{B}(t)=\begin{pmatrix}2e^t&e^{-t}&3e^{2t}\\-e^t&2e^{-t}&e^{2t}\\3e^t&-e^{-t}&-e^{2t}\end{pmatrix}$, encontre
   (a) $\mathbf{A}+3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{AB}$
   (c) $d\mathbf{A}/dt$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \mathbf{A}(t)\,dt$

Em cada um dos Problemas de 22 a 24, verifique que o vetor dado satisfaz a equação diferencial dada.

22. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}e^{2t}$

23. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}\mathbf{x}+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^t, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^t+2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^t$

24. $\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}6\\-8\\-4\end{pmatrix}e^{-t}+2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$

Em cada um dos Problemas 25 e 26, verifique que a matriz dada satisfaz a equação diferencial dada.

25. $\Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi, \qquad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

26. $\Psi' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi, \qquad \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^{t} & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^{t} & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear, Autovalores e Autovetores

Vamos rever, nesta seção, alguns resultados de álgebra linear que são importantes para a resolução de sistemas lineares de equações diferenciais. Alguns desses resultados são facilmente demonstráveis, outros não; como estamos interessados apenas em resumir uma informação útil de forma compacta, não daremos indicação da demonstração em nenhum dos casos. Todos os resultados nesta seção dependem de alguns fatos básicos sobre sistemas lineares de equações algébricas.

Sistemas Lineares de Equações Algébricas. Um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ e o vetor $\mathbf{b}$ são dados, e as componentes de $\mathbf{x}$ têm que ser determinadas. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o sistema é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não homogêneo**.

Se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ for invertível – ou seja, se $\det \mathbf{A}$ for diferente de zero – então o sistema (2) terá uma única solução. Como $\mathbf{A}$ é invertível, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e a solução pode ser encontrada multiplicando-se cada lado da Eq. (2) à esquerda por $\mathbf{A}^{-1}$; assim,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{3}$$

Em particular, o problema homogêneo $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, correspondente a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ na Eq. (2), tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por outro lado, se $\mathbf{A}$ for singular – ou seja, se $\det \mathbf{A}$ é zero – então ou não existe solução da Eq. (2), ou existe, mas não é única. Como $\mathbf{A}$ é singular, $\mathbf{A}^{-1}$ não existe, de modo que a Eq. (3) não é mais válida. O sistemà homogêneo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{4}$$

tem (uma infinidade de) soluções não nulas, além da solução trivial. A situação para o sistema não homogêneo (2) é mais complicada. Esse sistema não tem solução, a menos que o vetor $\mathbf{b}$ satisfaça uma determinada condição. Essa condição é que

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \tag{5}$$

para todos os vetores $\mathbf{y}$ tais que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}^*$ é a adjunta de $\mathbf{A}$. Se a condição (5) for satisfeita, então o sistema (2) tem uma infinidade de soluções. Cada uma dessas soluções tem a forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \tag{6}$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução particular da Eq. (2) e $\boldsymbol{\xi}$ é qualquer solução do sistema homogêneo (4). Note a semelhança entre a Eq. (6) e a solução de uma equação diferencial linear não homogênea. As demonstrações de algumas das afirmações precedentes estão esboçadas nos Problemas de 25 a 30.

Os resultados do parágrafo anterior são importantes para classificar as soluções de sistemas lineares. No entanto, para resolver um sistema particular é melhor, em geral, usar redução por linhas para transformar o sistema em um muito mais simples, do qual a solução (ou as soluções), se existir(em), pode(m) ser escrita(s) facilmente. Para fazer isso de maneira eficiente, podemos formar a matriz aumentada

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

juntando o vetor **b** à matriz de coeficientes **A** como uma coluna adicional. A linha pontilhada fica no lugar dos sinais de igualdade e divide a matriz aumentada. Agora efetuamos as operações elementares na matriz aumentada de modo a transformar **A** em uma matriz triangular – ou seja, em uma matriz cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Uma vez feito isso, é fácil ver se o sistema tem ou não solução e, se tiver, encontrá-las. Observe que as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada (7) são operações legítimas sobre as equações do sistema (1). O exemplo a seguir ilustra o processo.

EXEMPLO 1

Resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{8}$$

A matriz aumentada para o sistema (8) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ -1 & 1 & -2 & | & -5 \\ 2 & -1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Vamos agora efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz (9) com o objetivo de introduzir zeros na matriz em sua parte inferior à esquerda. Cada passo está descrito, e o resultado é mostrado em seguida.

(a) Some a primeira à segunda linha e some (–2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -7 & | & -10 \end{pmatrix}$$

(b) Multiplique a segunda linha por –1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 3 & -7 & | & -10 \end{pmatrix}$$

(c) Some (–3) vezes a segunda linha à terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

(d) Divida a terceira linha por –4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz obtida desse modo corresponde ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \tag{10}$$

que é equivalente ao sistema original (8). Note que os coeficientes na Eq. (10) formam uma matriz triangular. Da última das Eqs. (10), temos $x_3 = 1$; da segunda, $x_2 = -2 + x_3 = -1$; e, da primeira, $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Obtemos, assim,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que é a solução do sistema dado (8). Aliás, como a solução é única, concluímos que a matriz de coeficientes é invertível.

EXEMPLO 2

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{11}$$

para diversos valores de b_1, b_2 e b_3.

Observe que os coeficientes no sistema (11) são os mesmos do sistema (8), exceto pelo coeficiente de x_3 na terceira equação. A matriz aumentada do sistema (11) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & | & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Efetuando as operações (a), (b) e (c) como no Exemplo 1, transformamos a matriz (12) em

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

A equação correspondente à terceira linha da matriz (13) é

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0: \tag{14}$$

logo, o sistema (11) não tem solução, a menos que a condição (14) seja satisfeita por b_1, b_2 e b_3. É possível mostrar que essa condição é exatamente a Eq. (5) para o sistema (11).

Vamos supor que $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ e $b_3 = -5$, caso em que a Eq. (14) é satisfeita. Então, as duas primeiras linhas da matriz (13) correspondem às equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned} \tag{15}$$

Para resolver o sistema (15), escolhemos uma das incógnitas arbitrariamente e resolvemos para as outras duas. Fazendo $x_3 = \alpha$, onde α é arbitrário, segue que

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha - 3, \\ x_1 &= 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4. \end{aligned}$$

Escrevendo a solução em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

É fácil verificar que a segunda parcela à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (16) é uma solução do sistema não homogêneo (11), enquanto a primeira parcela é a solução mais geral possível do sistema homogêneo correspondente a (11).

A redução por linhas é também útil na resolução de sistemas homogêneos e de sistemas nos quais o número de equações é diferente do número de incógnitas.

Independência Linear. Um conjunto de k vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ é dito **linearmente dependente** se existe um conjunto de números (complexos) $c_1, \ldots, c_k$, nem todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \tag{17}$$

Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são linearmente dependentes se existe uma relação linear entre eles. Por outro lado, se o único conjunto $c_1, \ldots, c_k$ para o qual a Eq. (17) é satisfeita é $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, então $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são ditos **linearmente independentes**.

Considere um conjunto de n vetores, cada um deles com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ a i-ésima componente do vetor $\mathbf{x}^{(j)}$ e seja $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Então, a Eq. (17) pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \cdots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \cdots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{Xc} = \mathbf{0}. \tag{18}$$

Se $\det \mathbf{X} \neq 0$, então a única solução da Eq. (18) é $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. mas se $\det \mathbf{X} = \mathbf{0}$, existem soluções não nulas. Logo, o conjunto de vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ é linearmente independente se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

EXEMPLO 3

Determine se os vetores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \tag{19}$$

são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles.

Para determinar se $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes, procuramos constantes c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \tag{20}$$

A Eq. (20) também pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

e resolvida através de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right). \tag{22}$$

Vamos proceder como nos Exemplos 1 e 2.

(a) Some (–2) vezes a primeira linha à segunda e some a primeira à terceira linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

(b) Divida a segunda linha por –3; depois some (–5) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0, \\ c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Da segunda das Eqs. (23) temos $c_2 = c_3$ e, da primeira, obtemos $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Resolvemos, então para c_1 e c_2 em função de c_3, com esse último arbitrário. Se escolhermos, por conveniência, $c_3 = -1$, teremos $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$. Nesse caso a relação desejada (20) fica

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0},$$

e os vetores dados são linearmente dependentes.

De maneira alternativa, podemos calcular $\det(x_{ij})$, cujas colunas são as componentes de $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$, respectivamente. Assim,

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

e cálculos diretos mostram que é zero. Portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes. No entanto, se os coeficientes c_1, c_2 e c_3 forem necessários, ainda podemos resolver a Eq. (20) para encontrá-los.

Muitas vezes é útil pensar nas colunas (ou linhas) de uma matriz $\mathbf{A}$ como vetores. Esses vetores colunas (ou linhas) são linearmente independentes se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Além disso, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, pode-se mostrar que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. Portanto, se as colunas (ou linhas) de ambas, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, são linearmente independentes, então as colunas (ou linhas) de $\mathbf{C}$ também o são.

Vamos agora estender os conceitos de dependência e independência linear a um conjunto de funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ definidas em um intervalo $\alpha < t < \beta$. Os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linear-

mente dependentes em $\alpha < t < \beta$ se existir um conjunto de constantes $c_1, \ldots, c_k$, não todas nulas, tais que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t no intervalo. Caso contrário, $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente independentes. Note que se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente dependentes em um intervalo, então eles serão linearmente dependentes em todos os pontos do intervalo. No entanto, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente independentes em um intervalo, eles podem ou não ser linearmente independentes em cada ponto; eles podem, de fato, ser linearmente dependentes em cada ponto mas com um conjunto diferente de constantes em pontos diferentes. Veja o Problema 15 para um exemplo.

Autovalores e Autovetores. A equação

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{24}$$

pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor dado $\mathbf{x}$ em um novo vetor $\mathbf{y}$. Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmo são importantes em muitas aplicações.[5] Para encontrar tais vetores fazemos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator escalar de proporcionalidade, e procuramos soluções das equações

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{25}$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

A última equação tem soluções não nulas se, e somente se, λ for escolhido de modo que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{27}$$

Os valores de λ que satisfazem a Eq. (27) são chamados de **autovalores** da matriz **A,** e as soluções não nulas correspondentes das Eqs. (25) ou (26), obtidas usando-se tal valor de λ, são chamadas de **autovetores** correspondentes, ou associados, àquele autovalor.

Se **A** é uma matriz 2×2, então a Eq. (26) fica

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

e a Eq. (27) torna-se

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0. \tag{29}$$

O exemplo a seguir ilustra como encontrar autovalores e autovetores.

EXEMPLO 4

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \tag{32}$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para encontrar os autovetores, voltamos à Eq. (31) e substituímos λ por um dos autovalores encontrados. Para $\lambda = 2$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

[5] Por exemplo, este problema é encontrado ao se procurar os eixos principais de tensão em um corpo elástico e ao se procurar os modos de vibração livre em um sistema conservativo com um número finito de graus de liberdade.

Logo, cada linha desta equação vetorial leva à condição $x_1 - x_2 = 0$, logo x_1 e x_2 são iguais, mas seus valores não estão determinados. Se $x_1 = c$, então $x_2 = c$ também e o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ é

$$\mathbf{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad c \neq 0. \tag{34}$$

Logo, existe uma família infinita de autovetores, indexada pela constante arbitrária c, correspondendo ao autovalor λ_1. Escolheremos um único membro dessa família como representante; neste exemplo, parece mais simples escolher $c = 1$. Assim, em vez da Eq. (34), escrevemos

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{35}$$

e lembramos que qualquer múltiplo não nulo desse vetor também é um autovetor. Dizemos que $\mathbf{x}^{(1)}$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Fazendo, agora, $\lambda = -1$ na Eq. (31), obtemos

$$\begin{pmatrix}4 & -1\\4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{36}$$

Mais uma vez obtemos uma única condição sobre x_1 e x_2, a saber, $4x_1 - x_2 = 0$. Logo, o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \tag{37}$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor.

Como ilustrado no Exemplo 4, os autovetores são determinados a menos de uma constante multiplicativa não nula; se essa constante é especificada de algum modo, então os autovetores são ditos **normalizados**. No Exemplo 4 escolhemos a constante c para que as componentes dos autovetores fossem inteiros pequenos. No entanto, qualquer outra escolha de c seria igualmente válida, embora talvez não tão conveniente. Algumas vezes é conveniente normalizar um autovetor $\mathbf{x}$ escolhendo a constante de modo que seu comprimento seja $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} = 1$.

A Eq. (27) é uma equação polinomial de grau n em λ, de modo que existem n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser repetidos. Se um determinado autovalor aparece m vezes como raiz da Eq. (27), ele é dito de **multiplicidade algébrica** m. Cada autovalor tem pelo menos um autovetor associado, e um autovalor de multiplicidade algébrica m pode ter q autovetores linearmente independentes. O número q é chamado de **multiplicidade geométrica** do autovalor, e pode-se mostrar que

$$1 \leq q \leq m. \tag{38}$$

Além disso, exemplos mostram que q pode ser qualquer inteiro nesse intervalo. Se todos os autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ são **simples** (têm multiplicidade algébrica um), então cada autovalor também tem multiplicidade geométrica um.

É possível mostrar que, se λ_1 e λ_2 forem dois autovalores de $\mathbf{A}$, então seus autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes (Problema 34). Este resultado pode ser estendido para qualquer conjunto $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de autovalores distintos: seus autovetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são linearmente independentes. Então, se todos os autovalores de uma matriz $n \times n$ forem simples, os n autovetores de $\mathbf{A}$, um para cada autovalor, serão linearmente independentes. Por outro lado, se $\mathbf{A}$ tiver um ou mais autovalores repetidos, então pode ter menos do que n autovetores linearmente independentes, já que um autovalor repetido pode ter $q < m$ autovetores. Como veremos na Seção 7.8, este fato pode levar a complicações mais tarde na resolução de sistemas de equações diferenciais.

EXEMPLO 5

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{39}$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\1 & -\lambda & 1\\1 & 1 & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \tag{41}$$

As raízes da Eq. (41) são $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Assim, 2 é um autovalor simples e -1 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2, ou um autovalor duplo.

Para encontrar o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor λ_1, substituímos $\lambda = 2$ na Eq. (40); isso nos leva ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Podemos reduzi-lo ao sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

através de operações elementares sobre as linhas. Resolvendo esse sistema, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Para $\lambda = -1$, a Eq. (40) se reduz imediatamente à única equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{45}$$

Assim, valores para duas das quantidades x_1, x_2 e x_3 podem ser escolhidos arbitrariamente, e o terceiro valor fica determinado pela Eq. (45). Por exemplo, se $x_1 = c_1$ e $x_2 = c_2$, então $x_3 = -c_1 - c_2$. Em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Por exemplo, escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Qualquer múltiplo não nulo de $\mathbf{x}^{(2)}$ também é um autovetor, mas um segundo autovetor independente pode ser encontrado para uma outra escolha de c_1 e c_2 – por exemplo, $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Nesse caso, obtemos

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

que é linearmente independente de $\mathbf{x}^{(2)}$. Portanto, neste exemplo existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor duplo.

Uma classe importante de matrizes, chamadas de **autoadjuntas** ou **hermitianas**, é aquela em que $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ou seja, $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. A classe das matrizes autoadjuntas inclui, como subclasse, as matrizes simétricas reais – ou seja, matrizes com todos os elementos reais tais que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Os autovalores e autovetores de matrizes autoadjuntas têm as seguintes propriedades úteis:

1. Todos os autovalores são reais.
2. Sempre existe um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, independentemente das multiplicidades algébricas dos autovalores.
3. Se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são autovetores correspondentes a autovalores distintos, então $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. Logo, se todos os autovalores são simples, os autovetores associados formam um conjunto ortogonal de vetores.
4. É possível escolher m autovetores ortogonais entre si associados a um autovalor de multiplicidade m. Assim, o conjunto completo de n autovetores sempre pode ser escolhido de modo que seja um conjunto ortogonal, além de linearmente independente.

As demonstrações das afirmações 1 e 3 estão esquematizadas nos Problemas 32 e 33. O Exemplo 5 envolve uma matriz simétrica real e ilustra as propriedades 1, 2 e 3, mas a escolha que fizemos para $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ não ilustra a propriedade 4. No entanto, sempre é possível escolher $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ de modo que $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. Por exemplo, poderíamos ter escolhido, no Exemplo 5, $\mathbf{x}^{(2)}$ como antes e $\mathbf{x}^{(3)}$ usando $c_1 = 1$ e $c_2 = -2$ na Eq. (46). Dessa forma, obteríamos

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Esses autovetores são ortogonais entre si e são, também, ortogonais ao autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor $\lambda = 2$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, resolva o conjunto de equações dado ou mostre que não tem solução.

1. $\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -4 \end{aligned}$

Em cada um dos Problemas de 7 a 11, determine se o conjunto de vetores dado é linearmente independente. Se for linearmente dependente, encontre uma relação linear entre os vetores. Os vetores estão escritos na forma de linhas para economizar espaço, mas podem ser considerados como vetores colunas, ou seja, podem ser usadas as transpostas dos vetores dados, em vez dos próprios vetores.

7. $\mathbf{x}^{(1)} = (1,1,0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0,1,1), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (1,0,1)$
8. $\mathbf{x}^{(1)} = (2,1,0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (0,1,0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-1,2,0)$
9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1,2,2,3), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (-1,0,3,1), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-2,-1,1,0), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (-3,0,-1,3)$
10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1,2,-1,0), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (2,3,1,-1), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (-1,0,2,2), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (3,-1,1,3)$
11. $\mathbf{x}^{(1)} = (1,2,-2), \quad \mathbf{x}^{(2)} = (3,1,0), \quad \mathbf{x}^{(3)} = (2,-1,1), \quad \mathbf{x}^{(4)} = (4,3,-2)$
12. Suponha que cada um dos vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ tem n componentes, onde $n < m$. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes.

Em cada um dos Problemas 13 e 14, determine se o conjunto de vetores dado é linearmente independente para $-\infty < t < \infty$. Se for linearmente dependente, encontre uma relação linear entre os vetores. Como nos Problemas de 7 a 10, os vetores estão escritos como linhas para economizar espaço.

13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$
14. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (\operatorname{sen} t, 2\operatorname{sen} t)$
15. Sejam

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente dependentes em cada ponto do intervalo $0 \le t \le 1$. Apesar disso, mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente independentes em $0 \le t \le 1$.

Em cada um dos Problemas de 16 a 25, encontre todos os autovalores e autovetores da matriz dada.

16. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Os problemas de 26 a 30 tratam da resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando $\det \mathbf{A} = 0$.

26. (a) Suponha que $\mathbf{A}$ é uma matriz real $n \times n$. Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
Sugestão: você pode achar mais simples considerar primeiro o caso $n = 2$; depois estenda o resultado para um valor arbitrário de n.
(b) Se $\mathbf{A}$ não for necessariamente real, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
(c) Se $\mathbf{A}$ for hermitiana, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$ quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

27. Suponha que para uma matriz dada $\mathbf{A}$ existe um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Mostre que existe, também, um vetor não nulo $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

28. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Mostre que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, onde $\mathbf{y}$ é qualquer solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Verifique que essa afirmação é verdadeira para o conjunto de equações no Exemplo 2.
Sugestão: use o resultado do Problema 26(b).

29. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Mostre que se $\boldsymbol{\xi}$ é uma solução de $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ e α é qualquer constante, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\boldsymbol{\xi}$ também é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

30. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{y}$ é uma solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Mostre que se $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ para qualquer desses $\mathbf{y}$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Note que isso é a recíproca do Problema 28; a forma da solução é dada pelo Problema 29.
Sugestão: o que a relação $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ diz sobre as linhas de $\mathbf{A}$? Novamente, pode ajudar considerar o caso $n = 2$ primeiro.

31. Prove que $\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é singular.

32. Vamos mostrar, neste problema, que os autovalores de uma matriz autoadjunta $\mathbf{A}$ são reais. Seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado ao autovalor λ.
(a) Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. *Sugestão:* veja o Problema 26(c).
(b) Mostre que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. *Sugestão:* lembre que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
(c) Mostre que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, o autovalor λ é real.

33. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ autoadjunta e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são ortogonais.
Sugestão: use os resultados dos Problemas 26(c) e 32 para mostrar que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

34. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ qualquer e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes.
Sugestão: comece com $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$; multiplique por $\mathbf{A}$ para obter $c_1\lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\lambda_2\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$. Depois mostre que $c_1 = c_2 = 0$.

7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

A teoria geral para sistemas de n equações lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

é bastante semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem n. A discussão nesta seção, portanto, segue as mesmas linhas gerais daquela feita nas Seções 3.2 e 4.1. Para discutir o sistema (1) de maneira mais eficiente, usaremos notação matricial. Ou seja, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$; analogamente, $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ são componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$ e $p_{11}(t), \ldots, p_{nn}(t)$ são elementos de uma matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$. A Eq. (1) fica, então, na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{2}$$

A utilização de vetores e matrizes não só economiza muito espaço e facilita os cálculos, mas também enfatiza a semelhança entre sistemas de equações e uma única equação (escalar).

Dizemos que um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ é uma solução da Eq. (2) se suas componentes satisfazem o sistema de equações (1). Ao longo desta seção, vamos supor que $\mathbf{P}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, ou seja, as funções escalares $p_{11}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ são contínuas nesse intervalo. De acordo com o Teorema 7.1.2, isso é suficiente para garantir a existência de soluções da Eq. (2) no intervalo $\alpha < t < \beta$.

É conveniente considerar primeiro a equação homogênea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

obtida da Eq. (2) fazendo-se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Uma vez resolvida a equação homogênea, existem diversos métodos para se resolver a equação não homogênea (2); isso será feito na Seção 7.9. Usaremos a notação

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots \tag{4}$$

para denotar soluções específicas do sistema (3). Note que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ denota a i-ésima componente da j-ésima solução $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. Os fatos principais sobre a estrutura das soluções do sistema (3) estão enunciados nos Teoremas de 7.4.1 a 7.4.4. Eles são bastante semelhantes aos teoremas correspondentes nas Seções 3.2 e 4.1; algumas das demonstrações ficam como exercício para o leitor.

Teorema 7.4.1 Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são soluções do sistema (3), então a combinação linear $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.

Esse é o princípio da superposição; para prová-lo, basta derivar $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ e usar o fato de que $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfazem a Eq. (3). Aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1, chegamos à conclusão de que, se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são soluções da Eq. (3), então

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \tag{5}$$

também é solução quaisquer que sejam as constantes $c_1, \ldots, c_k$. Como exemplo, pode-se verificar que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{6}$$

satisfazem a equação

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{7}$$

De acordo com o Teorema 7.4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \tag{8}$$

também satisfaz a Eq. (7).

Como indicamos antes, aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1 segue que toda combinação linear finita de soluções da Eq. (3) também é solução. A questão, agora, é saber se todas as soluções da Eq. (3) podem ser encontradas dessa maneira. Por analogia com casos anteriores é razoável esperar que para um sistema da forma (3) de ordem n seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente. Sejam, então, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ n soluções do sistema (3) de ordem n e considere a matriz $\mathbf{X}(t)$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Lembre-se, da Seção 7.3, de que as colunas de $\mathbf{X}(t)$ são linearmente independentes para um valor dado de t se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$ para esse valor de t. Esse determinante é chamado de wronskiano das n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ e denotado por $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$, ou seja,

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t). \tag{10}$$

Então, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não é zero nesse ponto.

Teorema 7.4.2 Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema (3) em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema (3) pode ser expressa como uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{11}$$

de exatamente um modo.

Antes de provar o Teorema 7.4.2, note que de acordo com o Teorema 7.4.1 todas as expressões da forma (11) são soluções do sistema (3), enquanto que pelo Teorema 7.4.2 todas as soluções da Eq. (3) podem ser escritas na forma (11). Se pensarmos nas constantes $c_1, \ldots, c_n$ como arbitrárias, então a Eq. (11) inclui todas as soluções do sistema (3), e é costume chamá-la de **solução geral**. Qualquer conjunto de soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) que seja linearmente independente em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ é chamado de **conjunto fundamental de soluções** para esse intervalo.

Para provar o Teorema 7.4.2 vamos mostrar que, dada qualquer solução $\boldsymbol{\phi}$ da Eq. (3), $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ para valores apropriados de $c_1, \ldots, c_n$. Seja $t = t_0$ algum ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ e seja $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$. Em outras palavras, queremos saber se existem valores $c_1, \ldots, c_n$ para os quais

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \boldsymbol{\xi}, \tag{12}$$

ou, em forma escalar,

$$\begin{aligned} c_1x_{11}(t_0) + \cdots + c_nx_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + \cdots + c_nx_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \tag{13}$$

A condição necessária e suficiente para que as Eqs. (13) possuam uma única solução $c_1, \ldots, c_n$ é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ no ponto t_0, seja diferente de zero. A hipótese de que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em todo o intervalo $\alpha < t < \beta$ garante que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não se anula em $t = t_0$ e, portanto, existe uma (única) solução da Eq. (3) da forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial (12). Pela unicidade no Teorema 7.1.2, essa solução é idêntica a $\boldsymbol{\phi}(t)$, logo $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$, como queríamos provar.

Teorema 7.4.3 Se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções da Eq. (3) no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.

A importância do Teorema 7.4.3 reside no fato de que nos livra da necessidade de examinar $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ em todos os pontos do intervalo de interesse e nos permite determinar se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forma um conjunto fundamental de soluções simplesmente calculando seu wronskiano em qualquer ponto conveniente do intervalo.

A demonstração do Teorema 7.4.3 é feita estabelecendo-se, primeiro, que o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisfaz a equação diferencial (veja o Problema 2)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \tag{14}$$

Logo,

$$W(t) = c\exp\left\{\int [p_{11}(t) + \cdots + p_{nn}(t)]\,dt\right\}, \tag{15}$$

onde c é uma constante arbitrária e a conclusão do teorema segue imediatamente. A expressão para $W(t)$ na Eq. (15) é conhecida como a fórmula de Abel; observe a semelhança com a Eq. (27) da Seção 3.2.

De maneira alternativa, o Teorema 7.4.3 também pode ser demonstrado provando-se que se n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) forem linearmente dependentes em um ponto $t = t_0$, então serão linearmente dependentes em todos os pontos em $\alpha < t < \beta$ (veja o Problema 8). Em consequência, se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ forem linearmente independentes em um ponto, terão que ser linearmente independentes em todos os pontos do intervalo.

O próximo teorema diz que o sistema (3) tem pelo menos um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 7.4.4 Sejam

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema (3) satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}, \tag{16}$$

respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < t < \beta$. Então $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (3).

Para provar este teorema, note que a existência e a unicidade das soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ mencionadas no Teorema 7.4.4 são garantidas pelo Teorema 7.1.2. Não é difícil ver que o wronskiano dessas soluções é igual a 1 quando $t = t_0$; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Uma vez encontrado um conjunto fundamental de soluções, podem ser gerados outros conjuntos através de combinações lineares (independentes) do primeiro conjunto. Para fins teóricos o conjunto dado pelo Teorema 7.4.4 é, em geral, o mais simples possível.

Resumindo:

1. Qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ constitui um conjunto fundamental de soluções.
2. Sob as condições dadas nesta seção, tais conjuntos fundamentais sempre existem.
3. Toda solução do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ pode ser representada como uma combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções.

PROBLEMAS

1. Prove a afirmação feita logo após o Teorema 7.4.1 para um valor arbitrário do inteiro k.
2. Neste problema vamos esquematizar a demonstração do Teorema 7.4.3 no caso $n = 2$. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ soluções da Eq. (3) para $\alpha < t < \beta$ e seja W o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.

   (a) Mostre que

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

   (b) Usando a Eq. (3), mostre que

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

(c) Encontre $W(t)$ resolvendo a equação diferencial obtida no item (b). Use esta expressão para obter a conclusão enunciada no Teorema 7.4.3.

(d) Demonstre o Teorema 7.4.3 para um valor arbitrário de n generalizando os procedimentos dos itens (a), (b) e (c).

3. Mostre que os wronskianos de dois conjuntos fundamentais de soluções do sistema (3) podem diferir, no máximo, por uma constante multiplicativa.

Sugestão: use a Eq. (15).

4. Se $x_1 = y$ e $x_2 = y'$, então a equação de segunda ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{i}$$

corresponde ao sistema

$$x_1' = x_2,$$
$$x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2. \tag{ii}$$

Mostre que, se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formarem um conjunto fundamental de soluções para as Eqs. (ii) e se $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ formarem um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (i), então $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$, onde c é uma constante não nula.

Sugestão: $y^{(1)}(t)$ e $y^{(2)}(t)$ têm que ser combinações lineares de $x_{11}(t)$ e $x_{12}(t)$.

5. Mostre que a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ é a soma de qualquer solução particular $\mathbf{x}^{(p)}$ dessa equação com a solução geral $\mathbf{x}^{(c)}$ da equação homogênea associada.

6. Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

(a) Calcule o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.

(b) Em que intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes?

(c) Que conclusão pode-se tirar sobre os coeficientes no sistema homogêneo de equações diferenciais satisfeito por $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$?

(d) Encontre esse sistema de equações e verifique as conclusões do item (c).

7. Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, e responda às mesmas perguntas existentes no Problema 6.

Os dois problemas a seguir indicam uma outra demonstração para o Teorema 7.4.2.

8. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ no intervalo $\alpha < t < \beta$. Suponha que $\mathbf{P}$ é contínua e seja t_0 um ponto arbitrário no intervalo dado. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes para $\alpha < t < \beta$ se (e somente se) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ são linearmente dependentes. Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes no intervalo (α, β) se forem linearmente dependentes em qualquer ponto nele.

Sugestão: existem constantes $c_1, \ldots, c_m$ tais que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \ldots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$. Seja $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$ e use o teorema de unicidade para mostrar que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$.

9. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ soluções linearmente independentes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{P}$ é contínua em $\alpha < t < \beta$.

(a) Mostre que qualquer solução $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ pode ser escrita na forma

$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$

para constantes apropriadas $c_1, \ldots, c_n$.

Sugestão: use o resultado do Problema 12 da Seção 7.3 e o Problema 8.

(b) Mostre que a expressão para a solução $\mathbf{z}(t)$ no item (a) é única, ou seja, se $\mathbf{z}(t) = k_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, então $k_1 = c_1, \ldots, k_n = c_n$.

Sugestão: mostre que $(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$ e use a independência linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$.

7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Vamos concentrar a maior parte da nossa atenção em sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, sistemas da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante $n \times n$. A menos que se diga o contrário, suporemos que todos os elementos de $\mathbf{A}$ são números reais (e não complexos).

Se $n = 1$, o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{2}$$

cuja solução é $x = ce^{at}$. Observamos, na Seção 2.5, que $x = 0$ é a única solução de equilíbrio se $a \neq 0$. Outras soluções tendem a $x = 0$ se $a < 0$ e, nesse caso, dizemos que $x = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável. Por outro lado, se $a > 0$, então $x = 0$ é instável, já que as outras soluções se distanciam dela. Para sistemas de n equações a situação é análoga, de certa forma, embora mais complicada. Soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo-se $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Em geral, vamos supor que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que a única solução de equilíbrio é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uma pergunta importante é se outras soluções se aproximam ou se afastam dessa quando t aumenta; em outras palavras, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável ou instável? Existem outras possibilidades?

O caso $n = 2$ é particularmente importante e permite visualização no plano x_1x_2, chamado o **plano de fase**. Calculando $\mathbf{Ax}$ em um grande número de pontos e fazendo o gráfico dos vetores resultantes, obtemos um campo de direções de vetores tangentes a soluções do sistema de equações diferenciais. Pode-se obter, em geral, uma compreensão qualitativa do comportamento de soluções através de um campo de direções. Incluindo-se no gráfico algumas curvas-soluções, ou trajetórias, pode-se obter informação mais precisa. Um gráfico contendo uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado um **retrato de fase**. Veremos mais tarde, nesta seção, exemplos de campos de direções e retratos de fase.

Para construir soluções do sistema (1) tentaremos generalizar o tratamento de equações lineares de segunda ordem da Seção 3.1. Vamos supor, então, que uma solução vai envolver uma função exponencial e^{rt}. Além disso, soluções da Eq. (1) são vetores, logo vamos multiplicar e^{rt} por um vetor constante $\boldsymbol{\xi}$. Assim, procuramos soluções da Eq. (1) da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}, \tag{3}$$

onde o expoente r e o vetor $\boldsymbol{\xi}$ devem ser determinados. Substituindo $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) no sistema (1), obtemos

$$r\boldsymbol{\xi} e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} e^{rt}.$$

Cancelando o fator escalar não nulo e^{rt}, obtemos $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$, ou

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $n \times n$. Então, para resolver o sistema de equações diferenciais (1) precisamos resolver o sistema de equações algébricas (4). Esse último problema é precisamente o que determina os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Portanto, o vetor $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) é uma solução da Eq. (1), desde que r seja um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ seja um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Os dois exemplos a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de matrizes de coeficientes 2×2. Vamos mostrar, também, como construir os retratos de fase correspondentes. Mais adiante, nesta seção, vamos discutir mais o sistema geral $n \times n$.

EXEMPLO 1

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{5}$$

Faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções. Depois encontre a solução geral e desenhe diversas trajetórias.

A Figura 7.5.1 mostra um campo de direções para esse sistema. Dessa figura é fácil ver que uma solução típica se afasta da vizinhança da origem e acaba tendo retas tangentes com coeficientes angulares de aproximadamente 2 no primeiro ou no terceiro quadrante.

Para encontrar explicitamente soluções, vamos supor que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e substituir na Eq. (5). Somos levados ao sistema de equações algébricas

$$\begin{pmatrix} 1 - r & 1 \\ 4 & 1 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

As Eqs. (6) têm uma solução não trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero. Logo, os valores permitidos para r são encontrados pela equação

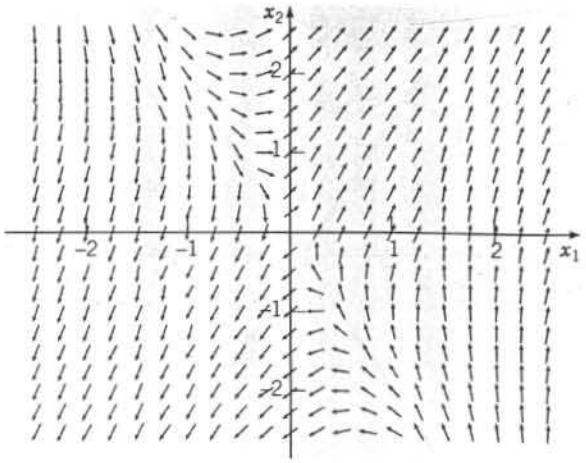


FIGURA 7.5.1 Campo de direções para o sistema (5).

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4$$

$$= r^2 - 2r - 3 = 0. \tag{7}$$

A Eq. (7) tem raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$; esses são os autovalores da matriz de coeficientes na Eq. (5). Se $r = 3$, o sistema (6) se reduz a uma única equação

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0. \tag{8}$$

Logo, $\xi_2 = 2\xi_1$ e o autovetor correspondente a $r_1 = 3$ pode ser escolhido como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Analogamente, correspondendo a $r_2 = -1$ encontramos que $\xi_2 = -2\xi_1$, de modo que o autovetor é

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

As soluções correspondentes da equação diferencial são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{11}$$

O wronskiano dessas soluções é

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}, \tag{12}$$

que nunca se anula. Portanto, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral do sistema (5) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{13}$$

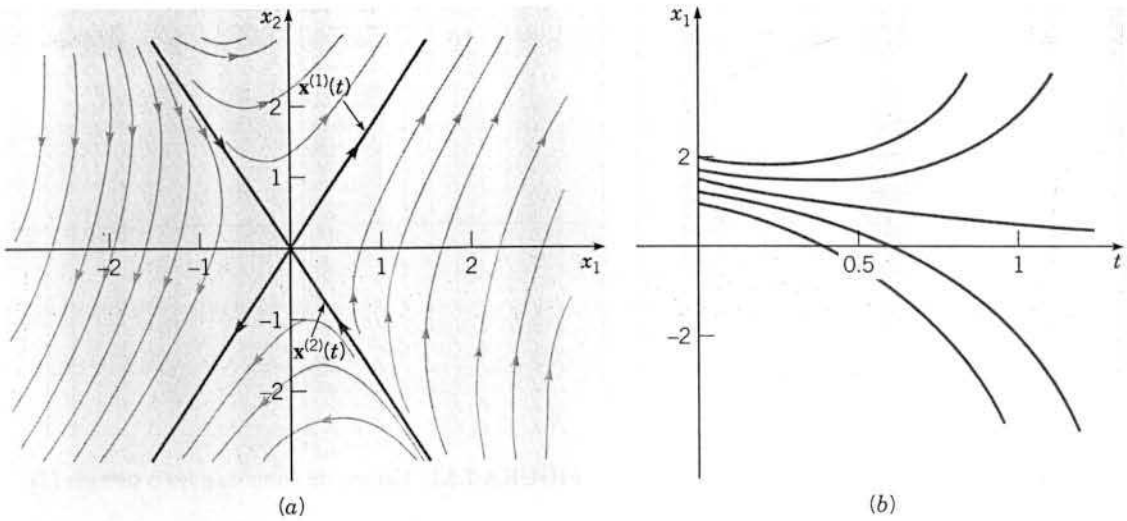
onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para visualizar a solução (13), ajuda considerarmos seu gráfico no plano x_1x_2 para diversos valores das constantes c_1 e c_2. Começamos com $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou, em forma escalar,

$$x_1 = c_1e^{3t}, \qquad x_2 = 2c_1e^{3t}.$$

Eliminando t nessas duas equações, vemos que essa solução pertence à reta $x_2 = 2x_1$; veja a Figura 7.5.2*a*. Esta é a reta que contém a origem e tem a direção do autovetor $\xi^{(1)}$. Se olharmos a solução como a trajetória de uma partícula em movimento, então a partícula está no primeiro quadrante quando $c_1 > 0$ e no terceiro quando $c_1 < 0$. Em qualquer desses casos, a partícula se afasta da origem quando t aumenta. Considere agora $\mathbf{x} = c_2\mathbf{x}^{(2)}$, ou

$$x_1 = c_2e^{-t}, \qquad x_2 = -2c_2e^{-t}.$$



(*a*) (*b*)

FIGURA 7.5.2 (*a*) Trajetórias do sistema (5); a origem é um ponto de sela. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (5).

Essa solução pertence à reta $x_2 = -2x_1$, cuja direção é determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. A solução está no quarto quadrante quando $c_2 > 0$ e no segundo quando $c_2 < 0$, como mostra a Figura 7.5.2*a*. Em ambos os casos a partícula se aproxima da origem quando t aumenta. A solução (13) é uma combinação de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Para valores grandes de t, a parcela $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ é dominante e a parcela $c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$ torna-se desprezível. Logo, todas as soluções para as quais $c_1 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = 2x_1$ quando $t \to \infty$. Analogamente, todas as soluções para as quais $c_2 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = -2x_1$ quando $t \to -\infty$. A Figura 7.5.2*a* mostra o gráfico de diversas soluções. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais e têm sinais opostos. A origem é chamada de **ponto de sela** neste caso. Pontos de sela são sempre instáveis, porque quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta.

No parágrafo precedente descrevemos como desenhar, manualmente, um esboço qualitativamente correto das trajetórias de um sistema como na Eq. (5), uma vez determinados os autovalores e autovetores. No entanto, para produzir um desenho detalhado e preciso como na Figura 7.5.2*a* e em outras figuras que aparecem mais adiante neste capítulo um computador é extremamente útil, se não indispensável.

Como alternativa à Figura 7.5.2*a* você pode fazer, também, o gráfico de x_1, ou de x_2, como função de t; alguns gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Figura 7.5.2*b*, e os de x_2 em função de t são semelhantes. Para determinadas condições iniciais $c_1 = 0$ na Eq. (13), de modo que $x_1 = c_2e^{-t}$ e $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$. A Figura 7.5.2*b* mostra um desses gráficos, correspondente à trajetória que se aproxima da origem na Figura 7.5.2*a*. Para a maioria das condições iniciais, no entanto, $c_1 \neq 0$ e x_1 é dado por $c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$. A presença da parcela contendo uma exponencial positiva faz com que x_1 cresça exponencialmente em módulo quando t aumenta. A Figura 7.5.2*b* mostra diversos gráficos desse tipo, correspondendo a trajetórias que se afastam da origem na Figura 7.5.2*a*. É importante compreender a relação entre as partes (*a*) e (*b*) da Figura 7.5.2 e de outras figuras semelhantes que aparecerão mais tarde, já que você pode querer visualizar soluções no plano x_1x_2 ou como funções da variável independente t.

EXEMPLO 2

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{14}$$

Desenhe um campo de direções para este sistema; depois encontre a solução geral e faça o gráfico de diversas trajetórias no plano de fase.

O campo de direções para o sistema (14) na Figura 7.5.3 mostra claramente que todas as soluções se aproximam da origem. Para encontrar soluções, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$; obtemos, então, o sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Os autovalores satisfazem

$$\begin{aligned} (-3-r)(-2-r) - 2 &= r^2 + 5r + 4 \\ &= (r+1)(r+4) = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

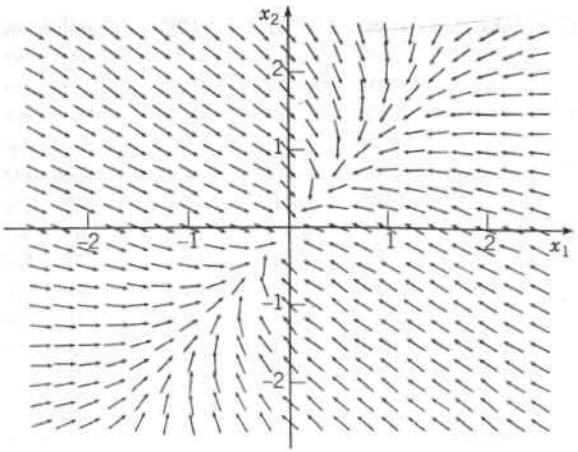


FIGURA 7.5.3 Campo de direções para o sistema (14).

de modo que $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$. Para $r = -1$, a Eq. (15) fica

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Logo, $\xi_2 = \sqrt{2}\,\xi_1$, e o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ associado ao autovalor $r_1 = -1$ pode ser escolhido como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Analogamente, correspondendo ao autovalor $r_2 = -4$, temos $\xi_1 = -\sqrt{2}\,\xi_2$, de modo que o autovetor é

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

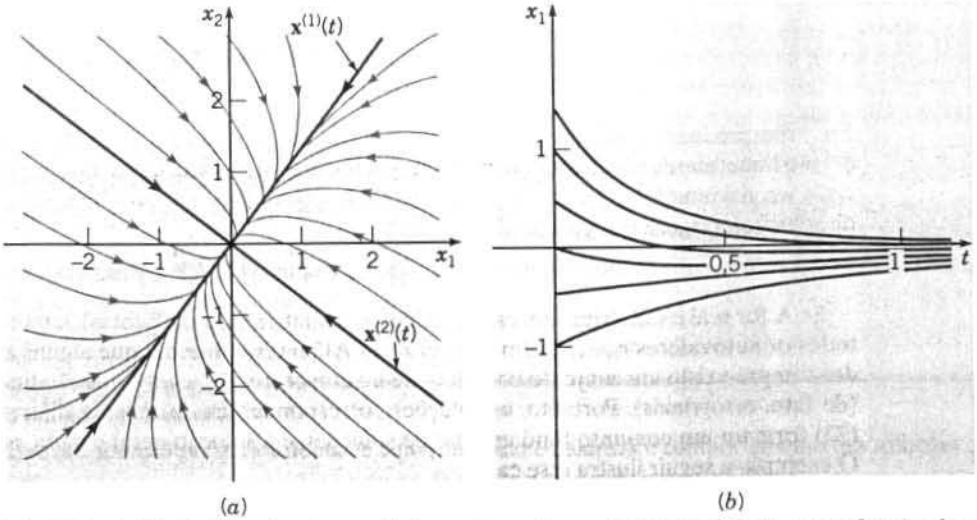
Portanto, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (14) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \tag{20}$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \tag{21}$$

A Figura 7.5.4*a* mostra gráficos da solução (21) para diversos valores de c_1 e c_2. A solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_2 = \sqrt{2}\,x_1$, enquanto a solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta



(*a*) (*b*)

FIGURA 7.5.4 (*a*) Trajetórias do sistema (14); a origem é um nó. (*b*) Gráfico de x_1 em função de t para o sistema (14).

$x_1 = -\sqrt{2}x_2$. As direções dessas retas são determinadas pelos autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$, respectivamente. Temos, em geral, uma combinação dessas duas soluções fundamentais. Quando $t \to \infty$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ é desprezível em comparação com $\mathbf{x}^{(1)}(t)$. Então, a menos que $c_1 = 0$, a solução (21) se aproxima da origem tangente à reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$. O padrão de trajetórias ilustrado na Figura 7.5.4*a* é típico de todos os sistemas 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais, distintos e de mesmo sinal. A origem é chamada de **nó** para tais sistemas. Se os autovalores fossem positivos, em vez de negativos, as trajetórias seriam semelhantes, mas o sentido de percurso seria no sentido oposto. Os nós serão assintoticamente estáveis se os autovalores forem negativos, e instáveis se forem positivos.

Embora a Figura 7.5.4*a* tenha sido gerada por computador, um esboço qualitativamente correto das trajetórias pode ser feito rapidamente à mão, baseado no conhecimento dos autovalores e autovetores.

A Figura 7.5.4*b* mostra gráficos típicos de x_1 em função de t. Note que cada um dos gráficos se aproxima assintoticamente do eixo dos t quando t aumenta, correspondendo a uma trajetória que se aproxima da origem na Figura 7.5.4*a*. O comportamento de x_2 como função de t é análogo.

Os dois exemplos precedentes ilustram os dois casos principais para um sistema 2×2 com autovalores reais distintos: os autovalores têm sinais opostos (Exemplo 1) ou o mesmo sinal (Exemplo 2). Outra possibilidade é zero ser autovalor, mas nesse caso $\det \mathbf{A} = 0$, o que contradiz a hipótese feita no início desta seção. No entanto, veja os Problemas 7 e 8.

Voltando ao sistema geral (1), procedemos como nos exemplos. Para encontrar soluções da equação diferencial (1) precisamos encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ a partir do sistema algébrico (4). Os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ (que não precisam ser distintos) são raízes da equação polinomial de grau n

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{22}$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema (1). Se supusermos que $\mathbf{A}$ é uma matriz real, existem três possibilidades para os autovalores de $\mathbf{A}$:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si.
2. Alguns autovalores ocorrem em pares complexos conjugados.
3. Alguns autovalores são repetidos.

Se os autovalores forem reais e distintos, como nos dois exemplos precedentes, então existe um autovetor real $\xi^{(i)}$ associado a cada autovalor r_i e o conjunto de n autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ é linearmente independente. As soluções correspondentes do sistema diferencial (1) são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \tag{23}$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, calculamos seu wronskiano:

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1 + \cdots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Em primeiro lugar, note que a função exponencial nunca se anula. Segundo, como os autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes, o último determinante na Eq. (24) é diferente de zero. Em consequência, o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ nunca se anula; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \cdots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \tag{25}$$

Se $\mathbf{A}$ for real e simétrica (um caso particular de matrizes autoadjuntas), lembre-se, da Seção 7.3, de que todos os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ têm que ser reais. Além disso, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos sempre existe um conjunto completo de n autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ que são linearmente independentes (de fato, ortogonais). Portanto, as soluções correspondentes do sistema diferencial (1) dadas pela Eq. (23) formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é dada, novamente, pela Eq. (25). O exemplo a seguir ilustra esse caso.

EXEMPLO 3

Encontre a solução geral de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{26}$$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica. Os autovalores e autovetores dessa matriz foram encontrados no Exemplo 5 da Seção 7.3:

$$r_1 = 2, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{27}$$

$$r_2 = -1, \qquad r_3 = -1; \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Portanto, um conjunto fundamental de soluções da Eq. (26) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{29}$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{30}$$

Este exemplo ilustra o fato de que embora um autovalor ($r = -1$) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ainda ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ e, então, construir a solução geral (30).

O comportamento da solução (30) depende, de modo crítico, das condições iniciais. Para valores grandes de t a primeira parcela na Eq. (30) é a dominante; logo, se $c_1 \neq 0$, todas as componentes de $\mathbf{x}$ tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$. Por outro lado, para determinadas condições iniciais c_1 pode ser zero. Nesse caso, a solução só tem termos exponenciais com potências negativas e $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Os pontos iniciais que fazem com que c_1 seja nulo são exatamente aqueles que pertencem ao plano determinado pelos autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ associados aos dois autovalores negativos. Assim, soluções que começam nesse plano se aproximam da origem quando $t \to \infty$, enquanto as outras soluções tornam-se ilimitadas.

Se alguns dos autovalores ocorrem em pares complexos conjugados, então ainda existem n soluções linearmente independentes da forma (23), desde que todos os autovalores sejam distintos. É claro que soluções vindas de autovalores complexos tomam valores complexos. No entanto, como na Seção 3.3, é possível obter um conjunto completo de soluções reais. Isso será discutido na Seção 7.6.

Dificuldades mais sérias podem ocorrer se um autovalor for repetido. Nessa eventualidade, o número de autovetores linearmente independentes pode ser menor do que a multiplicidade algébrica do autovalor. Se for esse o caso, o número de soluções linearmente independentes da forma $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$ será menor do que n. Para construir um conjunto fundamental de soluções é necessário, então, procurar soluções adicionais de outra forma. A situação é parecida com o caso de uma equação linear de ordem n com coeficientes constantes; uma raiz repetida da equação diferencial fornecia soluções da forma $e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt}$, etc. O caso de autovalores repetidos será tratado na Seção 7.8.

Finalmente, se $\mathbf{A}$ for complexa, então os autovalores complexos não precisam aparecer em pares conjugados e os autovetores são, em geral, complexos, mesmo que o autovalor associado seja real. As soluções da equação diferencial (1) ainda são da forma (23), desde que os autovalores sejam distintos, mas em geral todas as soluções são complexas.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6:

(a) Encontre a solução geral do sistema de equações dado e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

(b) Desenhe um campo de direções e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 7 e 8:

(a) Encontre a solução geral do sistema de equações dado.

(b) Desenhe um campo de direções e algumas das trajetórias. Em cada um desses problemas a matriz de coeficientes tem um autovalor nulo. Como resultado, o padrão das trajetórias é diferente dos padrões nos exemplos no texto.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 9 a 14, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 15 a 18. resolva o problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

19. O sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é análogo à equação de Euler de segunda ordem (Seção 5.4). Suponha que $\mathbf{x} = \xi t^r$, onde ξ é um vetor constante, e mostre que ξ e r têm que satisfazer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ para se obter soluções não triviais da equação diferencial dada.

Referindo-se ao Problema 19, resolva o sistema de equações dado em cada um dos Problemas de 20 a 23. Suponha que $t > 0$.

20. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

23. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 24 a 27 são dados os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Considere o sistema correspondente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

(a) Esboce um retrato de fase do sistema.

(b) Esboce a trajetória que passa pelo ponto inicial (2, 3).

(c) Para a trajetória no item (b), esboce os gráficos de x_1 e de x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

24. $r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. $r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

26. $r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. $r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

28. Considere um sistema 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Se supusermos que $r_1 \neq r_2$, a solução geral é $\mathbf{x} = c_1\xi^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{r_2 t}$, desde que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ sejam linearmente independentes. Neste problema vamos estabelecer a independência linear de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ supondo que são linearmente dependentes e, depois, mostrando que isso nos leva a uma contradição.

(a) Note que $\xi^{(1)}$ satisfaz a equação matricial $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}$; analogamente, $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\xi^{(2)} = \mathbf{0}$.

(b) Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$.

(c) Suponha que $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente dependentes. Então $c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)} = \mathbf{0}$ e pelo menos um entre c_1 e c_2 é diferente de zero; suponha que $c_1 \neq 0$. Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}) = \mathbf{0}$ e que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\xi^{(1)}$. Logo, $c_1 = 0$, uma contradição. Portanto, $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são linearmente independentes.

(d) Modifique o argumento no item (c) para o caso em que $c_2 \neq 0$.

(e) Faça um argumento semelhante para o caso em que a ordem n é igual a 3; note que o procedimento pode ser estendido para um valor arbitrário de n.

29. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{i}$$

onde a, b e c são constantes. Foi mostrado, no Capítulo 3, que a solução geral depende das raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{ii}$$

(a) Transforme a Eq. (i) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Encontre o sistema de equações $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ satisfeito por $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

(b) Encontre a equação que determina os autovalores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ no item (a). Note que essa equação é simplesmente a equação característica (ii) da Eq. (i).

30. O sistema de dois tanques do Problema 21 na Seção 7.1 nos leva ao problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix},$$

onde x_1 e x_2 são os desvios dos níveis de sal Q_1 e Q_2 dos seus respectivos pontos de equilíbrio.

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça os gráficos de x_1 e x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

(c) Encontre o menor instante T tal que $|x_1(t)| \leq 0{,}5$ e $|x_2(t)| \leq 0{,}5$ para todo $t \geq T$.

31. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(a) Resolva o sistema para $\alpha = 0{,}5$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(b) Resolva o sistema para $\alpha = 2$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.

(c) As soluções encontradas em (a) e (b) exibem dois tipos de comportamento bem diferentes. Encontre os autovalores da matriz de coeficientes em função de α e determine o valor de α entre 0,5 e 2 onde ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro.

Circuitos Elétricos. Os Problemas 32 e 33 tratam do circuito elétrico descrito pelo sistema de equações diferenciais dado no Problema 21 da Seção 7.1:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \tag{i}$$

32. (a) Encontre a solução geral da Eq. (i) se $R_1 = 1\ \Omega, R_2 = \frac{3}{5}\ \Omega, L = 2$ H e $C = \frac{2}{3}$ F.
    (b) Mostre que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, independentemente dos valores iniciais $I(0)$ e $V(0)$.
33. Considere o sistema precedente de equações diferenciais (i).
    (a) Encontre condições que R_1, R_2, C e L têm que satisfazer para que os autovalores da matriz de coeficientes sejam reais e distintos.
    (b) Se as condições encontradas no item (a) são satisfeitas, mostre que ambos os autovalores são negativos. Depois, mostre que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, independentemente das condições iniciais.
    (c) Se as condições encontradas no item (a) não forem satisfeitas, então os autovalores são complexos ou repetidos. Você acredita que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ também nesses casos?

    Sugestão: uma abordagem possível para o item (c) é transformar o sistema (i) em uma única equação de segunda ordem. Vamos, também, discutir autovalores complexos e repetidos nas Seções 7.6 e 7.8.

7.6 Autovalores Complexos

Nesta seção vamos considerar, novamente, um sistema de n equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

onde a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é real. Se procurarmos soluções da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$, então, como na Seção 7.5, segue que r tem que ser um autovalor e ξ um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Lembre que os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$ são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{2}$$

e que os autovetores associados satisfazem

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Se $\mathbf{A}$ for real, os coeficientes na equação polinomial (2) para r serão reais e os autovalores complexos terão que aparecer em pares conjugados. Por exemplo, se $r_1 = \lambda + i\mu$ for um autovalor de $\mathbf{A}$, onde λ e μ são reais, então $r_2 = \lambda - i\mu$ também o será. Para explorar o efeito de autovalores complexos, vamos começar com um exemplo.

EXEMPLO 1

Encontre um conjunto fundamental de soluções reais do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{4}$$

e mostre-o graficamente.

A Figura 7.6.1 mostra um campo de direções para o sistema (4). Esse gráfico sugere que as trajetórias no plano de fase são espirais aproximando-se na origem no sentido horário.

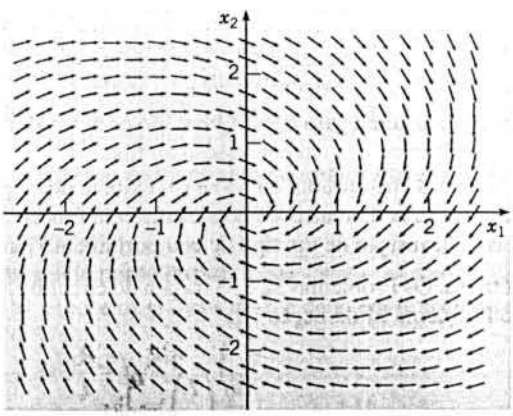


FIGURA 7.6.1 Um campo de direções para o Problema (4).

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções, supomos que

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt} \tag{5}$$

e obtemos o conjunto de equações lineares algébricas

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

para os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$. A equação característica é

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \tfrac{5}{4} = 0; \tag{7}$$

portanto, os autovalores são $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ e $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. Um cálculo direto a partir da Eq. (6) mostra que os autovetores associados são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Observe que os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ também são complexos conjugados. Logo, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (4) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}. \tag{9}$$

Para obter um conjunto de soluções reais, precisamos encontrar as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}$. De fato,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2}(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos t \\ -e^{-t/2}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2}\operatorname{sen} t \\ e^{-t/2}\cos t \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Portanto,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \tag{11}$$

é um conjunto de soluções reais. Para verificar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes, vamos calcular seu wronskiano:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t/2}\cos t & e^{-t/2}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t/2}\operatorname{sen} t & e^{-t/2}\cos t \end{vmatrix} \\ &= e^{-t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

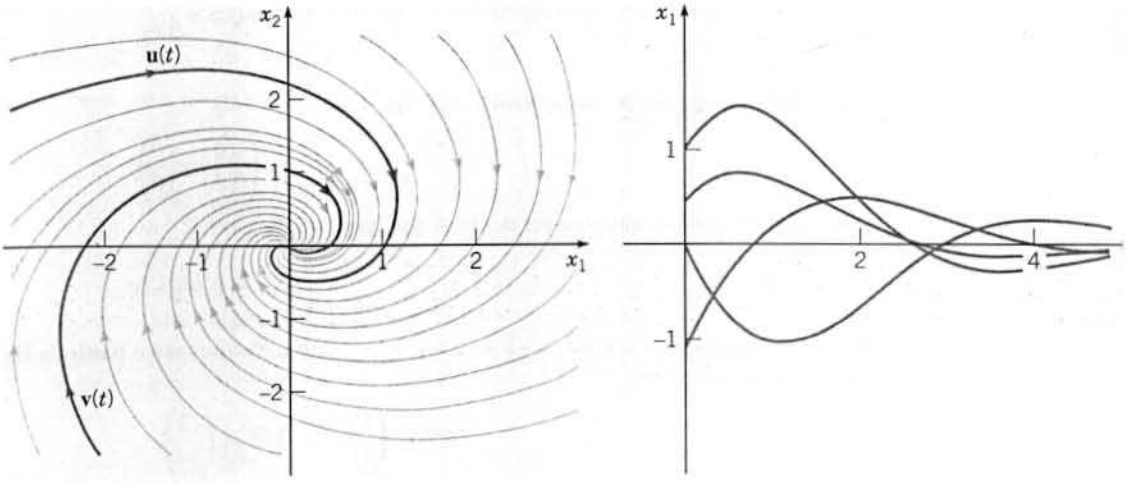
Como o wronskiano nunca se anula, segue que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções (reais) do sistema (4).

Os gráficos das soluções $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ aparecem na Figura 7.6.2*a*. Como

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

os gráficos de $\mathbf{u}(t)$ e de $\mathbf{v}(t)$ contêm os pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, respectivamente. Outras soluções do sistema (4) são combinações lineares de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, e a Figura 7.6.2*a* mostra, também, algumas dessas soluções. Todas as trajetórias se aproximam da origem ao longo de uma espiral quando $t \to \infty$, formando uma infinidade de caminhos em torno da origem; isso é devido ao fato de que as soluções (11) são produtos de uma exponencial decrescente com fatores seno ou cosseno. Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão ilustrados na Figura 7.6.2*b*; cada uma representa uma oscilação decrescente no tempo.

A Figura 7.6.2*a* é típica de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cujos autovalores são complexos com parte real negativa. A origem é chamada de **ponto espiral** e é assintoticamente estável, já que todas as trajetórias se aproximam dela quando t aumenta. Para um sistema cujos autovalores têm parte real positiva as trajetórias são semelhantes às da Figura 7.6.2*a*, exceto que o sentido do movimento é oposto, se afastando da origem, e as trajetórias são ilimitadas. Nesse caso, a origem é instável. Se a parte real dos autovalores é nula, então as trajetórias nem se aproximam da origem nem se tornam ilimitadas, mas, em vez disso, percorrem repetidamente uma curva fechada em torno da origem. Nesse caso, a origem é chamada de **centro** e é também dita estável, mas não assintoticamente estável. Nos três casos o sentido do movimento pode ser horário, como neste exemplo, ou trigonométrico, dependendo dos elementos na matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.



(a) (b)

FIGURA 7.6.2 (*a*) Trajetórias do sistema (4); a origem é um ponto espiral. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (4).

Voltando à equação geral (1)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

Podemos proceder como no exemplo. Suponha que existe um par de autovalores complexos conjugados $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_1 = \lambda - i\mu$. Então os autovetores associados $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ também são complexos conjugados. Para ver isso, suponha que r_1 e $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Calculando a equação complexa conjugada dessa equação e observando que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ são reais, obtemos

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

onde $\bar{r}_1$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ são os complexos conjugados de r_1 e de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, respectivamente. Em outras palavras, $r_2 = \bar{r}_1$ também é um autovalor e $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ é um autovetor associado. As soluções correspondentes

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}e^{\bar{r}_1 t} \tag{14}$$

da equação diferencial (1) são, então, complexas conjugadas uma da outra. Portanto, como no Exemplo 1, podemos encontrar duas soluções reais da Eq. (1) correspondentes aos autovalores r_1 e r_2 tomando as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas pela Eq. (14).

Vamos escrever $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são reais; então,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda+i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\,\mathrm{sen}\,\mu t).\end{aligned} \tag{15}$$

Separando $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ em suas partes real e imaginária, obtemos

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\mu t + \mathbf{b}\cos\mu t). \tag{16}$$

Se escrevermos $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, então os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t - \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\mu t), \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\mathrm{sen}\,\mu t + \mathbf{b}\cos\mu t)\end{aligned} \tag{17}$$

são soluções reais da Eq. (1). É possível mostrar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções linearmente independentes (veja o Problema 27).

Por exemplo, suponha que a matriz $\mathbf{A}$ tem dois autovalores complexos $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$, e que r_3, ..., r_n são reais e distintos. Sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$, ..., $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ os autovetores associados. Então, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}, \tag{18}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são dados pelas Eqs. (17). Enfatizamos que essa análise se aplica apenas quando a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (1) for real, pois só nesse caso os autovalores e autovetores complexos têm que aparecer em pares complexos conjugados.

Para sistemas 2×2 com coeficientes reais, completamos nossa descrição dos três casos principais que podem ocorrer.

1. Autovalores reais com sinais opostos; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto de sela.
2. Autovalores reais diferentes, mas com o mesmo sinal; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um nó.
3. Autovalores complexos com parte real diferente de zero; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto espiral.

Outras possibilidades são menos importantes e ocorrem como transição entre dois dos casos que acabamos de listar. Por exemplo, um autovalor zero ocorre durante a transição entre um ponto de sela e um nó. Autovalores imaginários puros ocorrem durante a transição entre pontos espirais assintoticamente estáveis e instáveis. Finalmente, autovalores reais e iguais aparecem durante a transição entre nós e pontos espirais.

EXEMPLO 2

O sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{19}$$

contém um parâmetro α. Descreva como as soluções dependem qualitativamente de α; em particular, encontre os valores críticos de α nos quais o comportamento qualitativo das trajetórias no plano de fase muda drasticamente.

O comportamento das trajetórias é controlado pelos autovalores da matriz de coeficientes. A equação característica é

$$r^2 - \alpha r + 4 = 0, \tag{20}$$

de modo que os autovalores são

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}. \tag{21}$$

Da Eq. (21) segue que os autovalores são complexos conjugados para $-4 < \alpha < 4$ e reais nos outros casos. Assim, dois valores críticos são $\alpha = -4$ e $\alpha = 4$, onde os autovalores mudam de reais para complexos ou vice-versa. Para $\alpha < -4$ ambos os autovalores são negativos, de modo que todas as trajetórias se aproximam da origem, que é um nó assintoticamente estável. Para $\alpha > 4$ ambos os autovalores são positivos, de modo que a origem é, novamente, um nó, só que dessa vez instável; todas as trajetórias (exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) se tornam ilimitadas. No intervalo intermediário $-4 < \alpha < 4$ os autovalores são complexos e as trajetórias são espirais. No entanto, para $-4 < \alpha < 0$ a parte real dos autovalores é negativa, as espirais estão orientadas para dentro e a origem é assintoticamente estável, enquanto para $0 < \alpha < 4$ a parte real dos autovalores é positiva e a origem é instável. Assim, $\alpha = 0$ também é um valor crítico, onde o sentido do movimento espiral muda de dentro para fora. Para esse valor de α a origem é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em torno da origem, correspondendo a soluções periódicas no tempo. Os outros valores críticos, $\alpha = \pm 4$, geram autovalores reais e iguais. Nesse caso a origem é, novamente, um nó, mas o retrato de fase é um pouco diferente daqueles da Seção 7.5. Vamos analisar esse caso na Seção 7.8.

Um Sistema Mola-Massa Múltiplo. Considere o sistema com duas massas e três molas ilustrado na Figura 7.1.1, cujas equações de movimento são dadas pelas Eqs. (1) na Seção 7.1. Se supusermos que não há forças externas, então $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 0$ e as equações resultantes são

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Essas equações podem ser resolvidas como um sistema de duas equações de segunda ordem (veja o Problema 29), mas consistente com nossa abordagem neste capítulo vamos transformá-las em um sistema de quatro equações de primeira ordem. Sejam $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$. Então

$$y_1' = y_3, \qquad y_2' = y_4, \tag{23}$$

e, das Eqs. (22),

$$m_1 y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \qquad m_2 y_4' = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2. \tag{24}$$

O exemplo a seguir trata um caso particular desse sistema com duas massas e três molas.

EXEMPLO 3

Suponha que $m_1 = 2, m_2 = 9/4, k_1 = 1, k_2 = 3$ e $k_3 = 15/4$ nas Eqs. (23) e (24), de modo que essas equações ficam

$$y_1' = y_3, \qquad y_2' = y_4, \qquad y_3' = -2y_1 + \tfrac{3}{2}y_2, \qquad y_4' = \tfrac{4}{3}y_1 - 3y_2. \tag{25}$$

Analise os movimentos possíveis descritos pelas Eqs. (25) e desenhe gráficos mostrando comportamentos típicos.

Podemos escrever o sistema (25) em forma matricial como

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{26}$$

Tenha em mente que y_1 e y_2 são as posições das duas massas em relações às suas posições de equilíbrio e que y_3 e y_4 são suas velocidades. Supomos, como de hábito, que $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, onde r tem que ser um autovalor da matriz $\mathbf{A}$ e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado. É possível, embora trabalhoso, encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ manualmente, mas é mais fácil com um programa de computador apropriado. O polinômio característico de $\mathbf{A}$ é

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4) \tag{27}$$

de modo que os autovalores são $r_1 = i, r_2 = -i, r_3 = 2i$ e $r_4 = -2i$. Os autovetores associados são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}. \tag{28}$$

As soluções complexas $\boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{it}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{-it}$ são complexas conjugadas, logo podemos encontrar duas soluções reais usando as partes real e imaginária de uma das soluções complexas. Por exemplo, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \operatorname{sen} t) \\ &= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t). \end{aligned} \tag{29}$$

De maneira semelhante, obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{(3)} e^{2it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) \\ &= \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 2t \\ -4\operatorname{sen} 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t). \end{aligned} \tag{30}$$

Deixamos a seu cargo a verificação de que $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$ são linearmente independentes e formam, portanto, um conjunto fundamental de soluções. Assim, a solução geral da Eq. (26) é

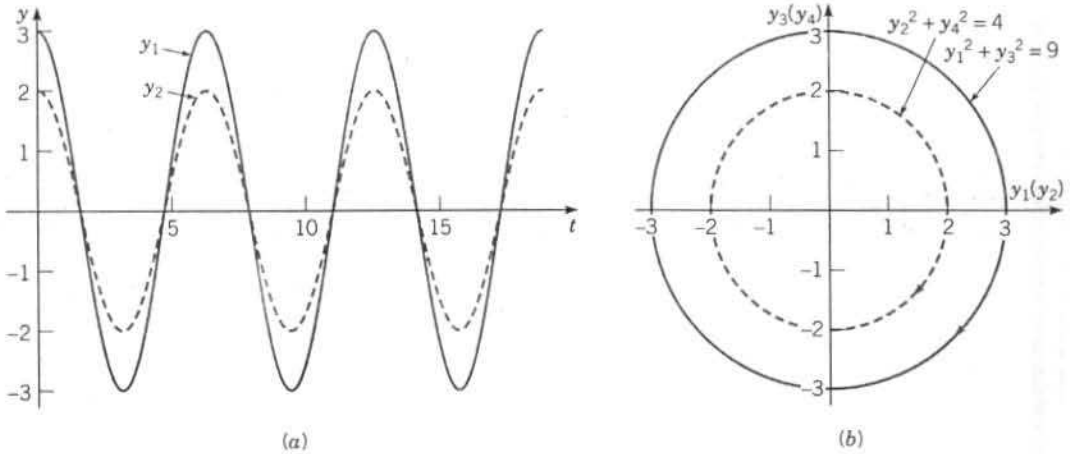
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 2t \\ -4\operatorname{sen} 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix}, \tag{31}$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

O espaço de fase para esse sistema tem dimensão quatro e cada solução, obtida por um conjunto particular de valores para $c_1, \ldots, c_4$ na Eq. (31), corresponde a uma trajetória nesse espaço. Como cada solução, dada pela Eq. (31), é periódica com período 2π, cada trajetória é uma curva fechada. Não importa onde a trajetória começa em $t = 0$, ela retorna a esse ponto em $t = 2\pi, t = 4\pi$, e assim por diante, percorrendo a mesma curva repetidamente em intervalos de tempo de comprimento 2π. Não tentaremos mostrar nenhuma dessas trajetórias de dimensão quatro aqui. Em vez disso, mostramos projeções de algumas trajetórias nos planos y_1y_3 ou y_2y_4 nas figuras mais adiante, mostrando, assim, o movimento de cada massa separadamente.

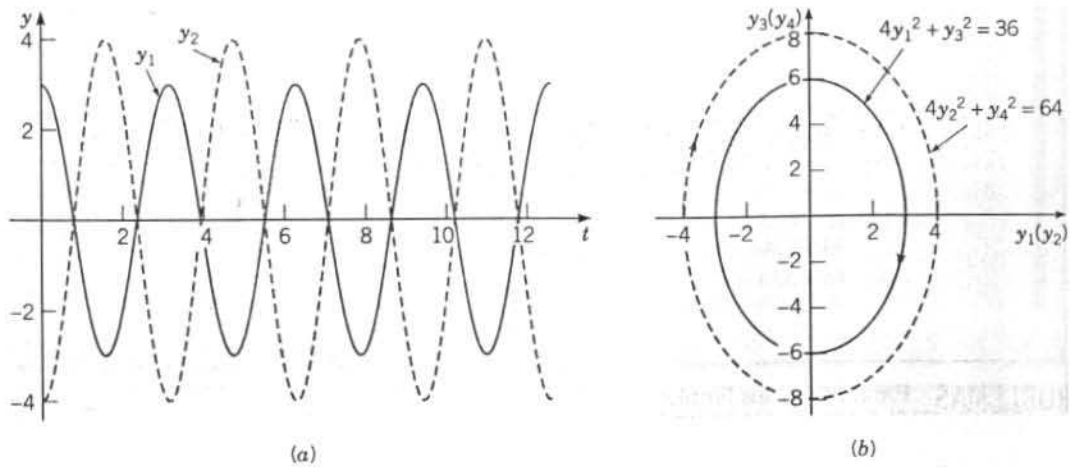
As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem movimentos com frequência 1 e período 2π. Note que $y_3 = (2/3)y_1$ nessas parcelas e que $y_4 = (2/3)y_2$. Isso significa que as duas massas se movem para a frente e para trás juntas, sempre no mesmo sentido, mas com a segunda massa percorrendo dois terços da distância percorrida pela primeira. Se focalizarmos na solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ e fizermos o gráfico de y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos, obteremos os gráficos de cossenos com amplitudes 3 e 2, respectivamente, ilustrados na Figura 7.6.3*a*. A trajetória da primeira massa no plano y_1y_3 permanece no círculo de raio 3 na Figura 7.6.3*b*, percorrido no sentido horário começando no ponto (3, 0) e completando uma volta em um tempo 2π. Esta figura também mostra a trajetória da segunda massa no plano y_2y_4, que permanece no círculo de raio 2, também percorrido no sentido horário começando em (2, 0) e também completando uma volta em um tempo 2π. A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4. Gráficos semelhantes (com um deslocamento apropriado no tempo) são obtidos de $\mathbf{v}^{(1)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(1)}$.

As parcelas remanescentes à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem movimentos com frequência 2 e período π. Observe que nesse caso $y_2 = -(4/3)y_1$ e $y_4 = -(4/3)y_3$. Isso significa que as duas massas estão sempre se movendo em sentidos opostos e que a segunda massa percorre quatro terços da distância percorrida pela primeira. Considerando apenas $\mathbf{u}^{(2)}(t)$ e fazendo os gráficos de y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos, obtemos a Figura 7.6.4*a*. Existe uma diferença de fase de π e a amplitude de y_2 é de quatro terços da amplitu-



(*a*) (*b*)

FIGURA 7.6.3 (*a*) Um gráfico de y_1 em função de t e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$. (*b*) Superposição de projeções de trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.



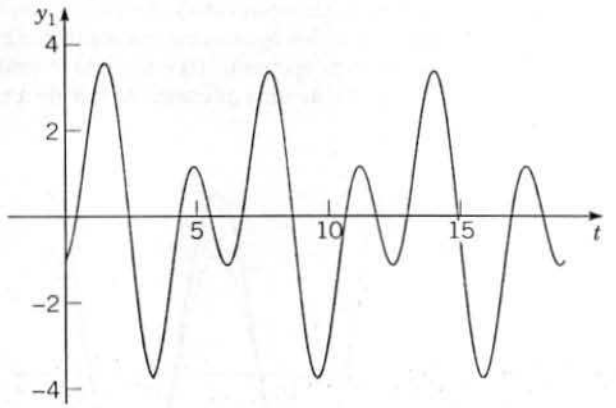
(*a*) (*b*)

FIGURA 7.6.4 (*a*) Um gráfico de y_1 em função de t e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$. (*b*) Superposição de projeções de trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$.

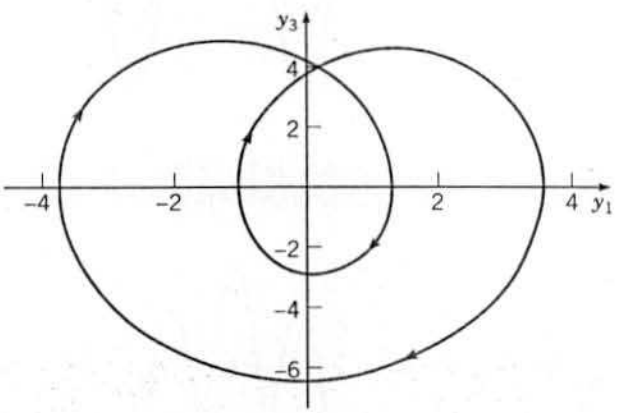
de de y_1, confirmando as afirmações precedentes sobre o movimento das massas. A Figura 7.6.4*b* mostra uma superposição das trajetórias das duas massas em seus respectivos planos de fase. Ambas são elipses, a interna correspondendo à primeira massa e a externa à segunda. A trajetória da elipse interna começa em $(3, 0)$ e a da elipse externa em $(-4, 0)$. Ambas são percorridas no sentido horário e a volta é completada em um tempo π. A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4. Mais uma vez, gráficos semelhantes são obtidos de $\mathbf{v}^{(2)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$.

Os tipos de movimento descritos nos dois parágrafos precedentes são chamados de **modos fundamentais** de vibração para o sistema com duas massas. Cada um deles resulta de condições iniciais bem especiais. Por exemplo, para obter o modo fundamental de frequência 1 ambas as constantes, c_3 e c_4, na Eq. (31) têm que ser nulas. Isso só ocorre para condições iniciais nas quais $3y_2(0) = 2y_1(0)$ e $3y_4(0) = 2y_3(0)$. Analogamente, o modo fundamental de frequência 2 só é obtido quando ambas as constantes, c_1 e c_2, na Eq. (31) são nulas – ou seja, quando as condições iniciais são tais que $3y_2(0) = -4y_1(0)$ e $3y_4(0) = -4y_3(0)$.

Para condições iniciais mais gerais, a solução é uma combinação dos dois modos fundamentais. A Figura 7.6.5*a* mostra um gráfico de y_1 em função de t para um caso típico, e a projeção da trajetória correspondente no plano y_1y_3 está na Figura 7.6.5*b*. Esta última figura pode dar uma ideia errada, já que mostra a projeção da trajetória cruzando a si mesma. Isso não pode ocorrer na trajetória real em quatro dimensões, pois violaria o teorema geral de existência e unicidade: não podem existir duas soluções diferentes saindo do mesmo ponto inicial.



(*a*)



(*b*)

FIGURA 7.6.5 Uma solução do sistema (22) satisfazendo as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (-1, 4, 1, 1)$. (*a*) Um gráfico de y_1 em função de t. (*b*) a projeção da trajetória no plano y_1y_3. Como dito no texto, a trajetória real em quatro dimensões não se intersecta.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6:

(a) Expresse a solução geral do sistema de equações dado como combinação de funções reais.

(b) Desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 7 e 8, expresse a solução geral do sistema de equações dado em termos de funções reais.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 9 e 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.

(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe a trajetória correspondente no plano x_1x_2.

(c) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe os gráficos de x_1 e x_2 em função de t.

(d) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe o gráfico correspondente no espaço tridimensional tx_1x_2.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 20, a matriz de coeficientes contém um parâmetro α. Em cada um desses problemas:

(a) Determine os autovalores em função de α.

(b) Encontre o valor ou valores críticos de α onde a natureza qualitativa do retrato de fase para o sistema muda.

(c) Desenhe retratos de fase para um valor de α ligeiramente menor e para outro valor ligeiramente maior do que cada valor crítico.

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

19. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

20. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 21 e 22, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas 23 e 24:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.

(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe as trajetórias correspondentes no plano x_1x_2. Desenhe, também, as trajetórias nos planos x_1x_3 e x_2x_3.

(c) Para o ponto inicial do item (b), desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$.

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$ 24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

25. Considere o circuito elétrico ilustrado na Figura 7.6.6. Suponha que $R_1 = R_2 = 4\ \Omega$, $C = \frac{1}{2}$ F e $L = 8$ H.
   (a) Mostre que esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \tag{i}$$

   onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor. *Sugestão:* veja o Problema 19 da Seção 7.1.
   (b) Encontre a solução geral das Eqs. (i) como combinação de funções reais.
   (c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ A e $V(0) = 3$ V.
   (d) Determine os valores limites de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \to \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

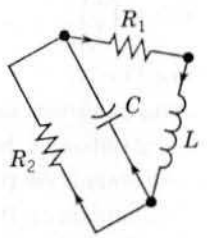


FIGURA 7.6.6 O circuito no Problema 25.

26. O circuito elétrico ilustrado na Figura 7.6.7 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \tag{i}$$

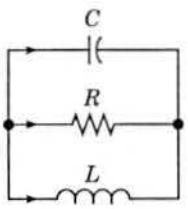


FIGURA 7.6.7 O circuito no Problema 26.

   onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor. Essas equações diferenciais foram deduzidas no Problema 19 da Seção 7.1.
   (a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são reais e distintos se $L > 4R^2C$; mostre que são complexos conjugados se $L < 4R^2C$.
   (b) Suponha que $R = 1\ \Omega$, $C = \frac{1}{2}$ F e $L = 1$ H. Encontre a solução geral do sistema (i) neste caso.
   (c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ A e $V(0) = 1$ V.
   (d) Para o circuito no item (b), determine os valores limites de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \to \infty$. Esses valores limites dependem das condições iniciais?

27. Vamos indicar, neste problema, como mostrar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, dados pelas Eqs. (17), são linearmente independentes. Sejam $r_1 = \lambda + i\mu$ e $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ um par de autovalores conjugados da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ da Eq. (1); sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ os autovetores associados. Lembre-se de que foi dito na Seção 7.3 que se $r_1 \neq \bar{r}_1$, então $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ são linearmente independentes.
   (a) Vamos mostrar, primeiro, que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes. Considere a equação $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Expresse $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em função de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e de $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$, e depois mostre que $(c_1 - ic_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)} + (c_1 + ic_2)\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{0}$.

(b) Mostre que $c_1 - ic_2 = 0$ e $c_1 + ic_2 = 0$ e que, portanto, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Em consequência, **a** e **b** são linearmente independentes.

(c) Para mostrar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes, considere a equação $c_1\mathbf{u}(t_0) + c_2\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$, onde t_0 é um ponto arbitrário. Reescreva essa equação em termos de **a** e **b** e depois prossiga como no item (b) para mostrar que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Logo, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes no ponto arbitrário t_0. Portanto, são linearmente independentes em qualquer ponto e em qualquer intervalo.

28. Uma massa m em uma mola com constante k satisfaz a equação diferencial (veja a Seção 3.7)

$$mv'' + kv = 0,$$

onde $v(t)$ é o deslocamento da massa no instante t a partir de sua posição de equilíbrio.

(a) Sejam $x_1 = v$ e $x_2 = v'$; mostre que o sistema resultante é

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

(b) Encontre os autovalores da matriz para o sistema no item (a).

(c) Esboce diversas trajetórias do sistema. Escolha uma de suas trajetórias e esboce os gráficos correspondentes de x_1 e de x_2 em função de t. Esboce ambos os gráficos no mesmo conjunto de eixos.

(d) Qual a relação entre os autovalores da matriz de coeficientes e a frequência natural do sistema mola-massa?

29. Considere o sistema com duas massas e três molas do Exemplo 3 no texto. Em vez de converter o problema em um sistema de quatro equações de primeira ordem, vamos indicar aqui como proceder diretamente das Eqs. (22).

(a) Mostre que as Eqs. (22) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 4/3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{i}$$

(b) Suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e mostre que

$$(\mathbf{A} - r^2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.$$

Note que r^2 (em vez de r) é um autovalor de $\mathbf{A}$ associado ao autovetor $\boldsymbol{\xi}$.

(c) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.

(d) Escreva expressões para x_1 e x_2. Deve haver quatro constantes arbitrárias nessas expressões.

(e) Diferenciando os resultados do item (d), escreva expressões para x_1' e x_2'. Seus resultados nos itens (d) e (e) devem estar de acordo com a Eq. (31) no texto.

30. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Suponha que $m_1 = 1, m_2 = 4/3, k_1 = 1, k_2 = 3$ e $k_3 = 4/3$.

(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

(b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.

(c) Escreva a solução geral do sistema.

(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Qual o período do movimento nesse caso? Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4. Certifique-se de que você compreende como as trajetórias são percorridas durante um período completo.

(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

31. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Suponha que $m_1 = m_2 = 1, k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

(b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.

(c) Escreva a solução geral do sistema.

(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(e) Considere as condições iniciais $\mathbf{y}(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$. Calcule as constantes arbitrárias na solução geral do item (c). Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Você acha que a solução é periódica? Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.

(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

7.7 Matrizes Fundamentais

A estrutura de soluções de sistemas de equações diferenciais lineares pode ficar mais clara pela introdução da ideia de matriz fundamental. Suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{1}$$

em algum intervalo $\alpha < t < \beta$. Então, a matriz

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, é dita uma **matriz fundamental** para o sistema (1). Note que uma matriz fundamental é invertível, já que suas colunas são vetores linearmente independentes.

EXEMPLO 1

Encontre uma matriz fundamental para o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

No Exemplo 1 da Seção 7.5 vimos que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes da Eq. (3). Assim, uma matriz fundamental para o sistema (3) é

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A solução de um problema de valor inicial pode ser escrita de maneira bem compacta em termos de uma matriz fundamental. A solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{5}$$

ou, em termos de $\Psi(t)$,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c}, \tag{6}$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante com componentes arbitrárias $c_1, \ldots, c_n$. Para um problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (1) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{7}$$

onde t_0 é um ponto dado em $\alpha < t < \beta$ e $\mathbf{x}^0$ é um vetor inicial dado, basta escolher o vetor $\mathbf{c}$ na Eq. (6) que satisfaça a condição inicial (7). Portanto, $\mathbf{c}$ tem que satisfazer

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \tag{8}$$

Logo, como $\Psi(t_0)$ é invertível,

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{9}$$

e

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{10}$$

é a solução do problema de valor inicial (1), (7). Enfatizamos, no entanto, que para resolver um problema de valor inicial dado normalmente resolvemos a Eq. (8) por redução de linhas e, depois, substituímos a solução $\mathbf{c}$ na Eq. (6), em vez de calcular $\Psi^{-1}(t_0)$ e usar a Eq. (10).

Lembre-se de que cada coluna da matriz fundamental Ψ é uma solução da Eq. (1). Segue que Ψ satisfaz a equação diferencial matricial

$$\Psi' = \mathbf{P}(t)\Psi. \tag{11}$$

Essa relação é confirmada imediatamente comparando-se os dois lados da Eq. (11) coluna a coluna.

Algumas vezes é conveniente usar a matriz fundamental especial, denotada por $\Phi(t)$, cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ dados no Teorema 7.4.4. Além da equação diferencial (1), esses vetores satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}, \tag{12}$$

onde $\mathbf{e}^{(j)}$ é o vetor unitário, definido no Teorema 7.4.4, com um na j-ésima posição e zeros em todas as outras componentes. Assim, $\Phi(t)$ tem a propriedade

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \tag{13}$$

Vamos sempre reservar o símbolo Φ para denotar a matriz fundamental que satisfaz a condição inicial (13) e usar Ψ quando se desejar uma matriz fundamental arbitrária. Em termos de $\Phi(t)$, a solução do problema de valor inicial (1), (7) parece até mais simples; como $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, segue da Eq. (10) que

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0. \tag{14}$$

Embora a matriz fundamental $\Phi(t)$ seja, muitas vezes, mais complicada do que $\Psi(t)$, ela será particularmente útil se o mesmo sistema de equações diferenciais for resolvido repetidamente sujeito a condições iniciais diferentes. Isso corresponde a um sistema físico dado que pode começar em muitos estados iniciais diferentes. Se a matriz fundamental $\Phi(t)$ tiver sido determinada, então a solução para cada conjunto de condições iniciais poderá ser encontrada simplesmente através da multiplicação de matrizes, como indicado na Eq. (14). A matriz $\Phi(t)$ representa, assim, uma transformação das condições iniciais $\mathbf{x}^0$ na solução $\mathbf{x}(t)$ em um instante arbitrário t. Comparando as Eqs. (10) e (14), é claro que $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t)$.

EXEMPLO 2

Para o sistema (3),

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

no Exemplo 1, encontre a matriz fundamental Φ tal que $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

As colunas de Φ são as soluções da Eq. (3) que satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Como a solução geral da Eq. (3) é

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t},$$

podemos encontrar a solução que satisfaz o primeiro conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$; analogamente, obtemos a solução que satisfaz o segundo conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = \frac{1}{4}$ e $c_2 = -\frac{1}{4}$. Logo,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \tag{16}$$

Note que os elementos de $\Phi(t)$ são mais complicados que os da matriz fundamental $\Psi(t)$ dada pela Eq. (4); no entanto, agora é fácil determinar a solução correspondente a qualquer conjunto de condições iniciais.

A Matriz exp(At). Lembre que a solução do problema de valor inicial escalar

$$x' = ax, \qquad x(0) = x_0, \tag{17}$$

onde a é constante, é

$$x = x_0 \exp(at). \tag{18}$$

Considere, agora, o problema de valor inicial correspondente para um sistema $n \times n$, a saber,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \tag{19}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Aplicando os resultados desta seção ao problema (19), podemos escrever sua solução como

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0, \tag{20}$$

onde $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. A comparação entre os problemas (17) e (19) e suas soluções sugere que a matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ pode ter um caráter exponencial. Vamos explorar essa possibilidade.

A função exponencial escalar $\exp(at)$ pode ser representada pela série de potências

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \tag{21}$$

que converge para todo t. Vamos, agora, substituir o escalar a pela matriz $n \times n$ constante $\mathbf{A}$ e considerar a série correspondente

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \cdots. \tag{22}$$

Cada termo na série (22) é uma matriz $n \times n$. É possível mostrar que cada elemento dessa soma de matrizes converge para todo t quando $n \to \infty$. Logo, a série (22) define uma nova matriz como sua soma, que denotamos por $\exp(\mathbf{A}t)$, ou seja,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}, \tag{23}$$

análoga à expansão (21) da função escalar $\exp(at)$.

Diferenciando a série (23) termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dt}[\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right] = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{24}$$

Assim, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{25}$$

Além disso, quando $t = 0$ $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a condição inicial

$$\exp(\mathbf{A}t)\Big|_{t=0} = \mathbf{I}. \tag{26}$$

A matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$ satisfaz o mesmo problema de valor inicial que $\exp(\mathbf{A}t)$, a saber,

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \tag{27}$$

Então, pela parte referente à unicidade no Teorema 7.1.2 (estendido para equações diferenciais matriciais) concluímos que $\exp(\mathbf{A}t)$ e a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ são iguais. Assim, podemos escrever a solução do problema de valor inicial (19) na forma

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0, \tag{28}$$

que é análoga à solução (18) do problema de valor inicial (17).

Para justificar, definitivamente, a utilização de $\exp(\mathbf{A}t)$ para a soma da série (22) deveríamos demonstrar que essa função matricial tem as propriedades que associamos à função exponencial usual. Um modo de fazer isso está esquematizado no Problema 15.

Matrizes Diagonalizáveis. A razão básica pela qual um sistema linear de equações (algébricas ou diferenciais) apresenta alguma dificuldade é que as equações estão, em geral, *acopladas*. Em outras palavras, algumas das equações, ou todas elas, envolvem mais de uma das incógnitas – tipicamente, todas elas. Portanto, as equações em um sistema têm que ser resolvidas *simultaneamente*. Por outro lado, se cada equação dependesse de uma única variável então cada equação poderia ser resolvida independentemente de todas as outras, o que é uma tarefa muito mais simples. Essa observação sugere que uma possível maneira de resolver um sistema de equações pode ser transformando-o em um sistema equivalente *desacoplado*, no qual cada equação contém uma única incógnita. Isso corresponde a transformar a matriz de coeficientes **A** em uma matriz *diagonal*.

Autovetores servem para se obter uma tal transformação. Suponha que a matriz $n \times n$ **A** tem um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Lembre-se de que esse é certamente o caso quando os autovalores de **A** forem todos distintos ou quando **A** for autoadjunta. Denotando esses autovetores por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ e por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores associados, formamos a matriz **T**, cujas colunas são os autovetores, ou seja,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Como as colunas de **T** são vetores linearmente independentes, $\det \mathbf{T} \neq 0$; logo, **T** é invertível e $\mathbf{T}^{-1}$ existe. Um cálculo direto mostra que as colunas da matriz **AT** são simplesmente os vetores $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(n)}$. Como $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(k)} = \lambda_k \boldsymbol{\xi}^{(k)}$, segue que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \xi_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \xi_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \tag{30}$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{31}$$

é uma matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores de **A**. Da Eq. (30), segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}. \tag{32}$$

Assim, se os autovalores e autovetores de **A** são conhecidos, **A** pode ser transformada em uma matriz diagonal pela Eq. (32). Esse processo é conhecido como uma **transformação de semelhança** e a Eq. (32) é descrita, em palavras, dizendo-se que **A** é **semelhante** à matriz diagonal **D**. Outra maneira é dizer que **A** é **diagonalizável**. Observe que uma semelhança não muda os autovalores de **A** e transforma seus autovetores nos vetores coordenados $\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}$.

Se **A** for autoadjunta, o determinante de $\mathbf{T}^{-1}$ é muito simples. Sabemos que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de **A** são ortogonais entre si, logo podemos escolhê-los de modo que estejam normalizados por $(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(i)}) = 1$. Então, é fácil verificar que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$; em outras palavras, a inversa de **T** é igual à sua adjunta (sua transposta conjugada).

Finalmente, observamos que se **A** tiver menos do que n autovetores linearmente independentes, então não existe matriz **T** tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$. Nesse caso, **A** não é semelhante a nenhuma matriz diagonal e não é diagonalizável.

EXEMPLO 3

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Encontre uma matriz **T** que defina uma semelhança e mostre que **A** é diagonalizável.

No Exemplo 1 da Seção 7.5 vimos que os autovalores e autovetores de **A** são

$$r_1 = 3, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Logo, a matriz de semelhança **T** e sua inversa $\mathbf{T}^{-1}$ são dadas por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Portanto, você pode verificar que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \tag{36}$$

Vamos, agora, voltar para o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{37}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Nas Seções 7.5 e 7.6 descrevemos como resolver tal sistema partindo da hipótese de que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Vamos fornecer, agora, outro ponto de vista, baseado na diagonalização da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

De acordo com os resultados que acabamos de enunciar, é possível diagonalizar $\mathbf{A}$ sempre que $\mathbf{A}$ tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Sejam $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ os autovetores de $\mathbf{A}$ associados aos autovalores $r_1, \ldots, r_n$ e formem a matriz de semelhança $\mathbf{T}$ cujas colunas são $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$. Então, definindo uma nova variável dependente $\mathbf{y}$ pela relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \tag{38}$$

temos, da Eq. (37),

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}. \tag{39}$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y}, \tag{40}$$

ou, usando a Eq. (32),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y}. \tag{41}$$

Lembre que $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$. Uma matriz fundamental para o sistema (41) é a matriz diagonal (veja o Problema 16)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\mathbf{D}t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n t} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Uma matriz fundamental Ψ para o sistema (37) é formada, então, de $\mathbf{Q}$ através da transformação (38)

$$\Psi = \mathbf{T}\mathbf{Q}; \tag{43}$$

ou seja,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

A Eq. (44) confirma o resultado obtido na Seção 7.5. Esse processo de diagonalização não tem nenhuma vantagem computacional em relação ao método da Seção 7.5, já que, em qualquer caso, é preciso calcular os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes no sistema de equações diferenciais.

EXEMPLO 4

Considere, mais uma vez, o sistema de equações diferenciais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{45}$$

onde $\mathbf{A}$ é dada pela Eq. (33). Usando a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{T}$ é dada pela Eq. (35), você pode reduzir o sistema (45) ao sistema diagonal

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{y}. \tag{46}$$

Obtenha uma matriz fundamental para o sistema (46) e depois a transforme para obter uma matriz fundamental para o sistema original (45).

Multiplicando, repetidamente, $\mathbf{D}$ por si mesma, vemos que

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \ldots. \tag{47}$$

Portanto, segue da Eq. (23) que $\exp(\mathbf{D}t)$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais e^{3t} e e^{-t}, ou seja,

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Finalmente, obtemos a matriz fundamental desejada $\Psi(t)$ multiplicando $\mathbf{T}$ por $\exp(\mathbf{D}t)$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Note que essa matriz fundamental é a encontrada no Exemplo 1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 10:

(a) Encontre uma matriz fundamental para o sistema de equações dado.

(b) Encontre, também, a matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisfaz $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\Phi(t)$ encontrada no Problema 3.

12. Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

usando a matriz fundamental $\Phi(t)$ encontrada no Problema 6.

13. Mostre que $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$, onde $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ são como definidas nesta seção.

14. A matriz fundamental $\Phi(t)$ para o sistema (3) foi encontrada no Exemplo 2. Mostre que $\Phi(t)\,\Phi(s) = \Phi(t + s)$ multiplicando $\Phi(t)$ e $\Phi(s)$.

15. Seja $\Phi(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$. No texto, denotamos essa matriz também por $\exp(\mathbf{A}t)$. Neste problema vamos mostrar que Φ tem, de fato, as propriedades algébricas principais associadas à função exponencial.

(a) Mostre que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t + s)$, ou seja, $\exp(\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}s) = \exp[\mathbf{A}(t + s)]$.

Sugestão: mostre que se s é fixo e t variável, então $\Phi(t)\Phi(s)$ e $\Phi(t + s)$ satisfazem o problema de valor inicial $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(0) = \Phi(s)$.

(b) Mostre que $\Phi(t)\Phi(-t) = \mathbf{I}$, ou seja, $\exp(\mathbf{A}t)\exp[\mathbf{A}(-t)] = \mathbf{I}$. Depois, mostre que $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.

(c) Mostre que $\Phi(t-s) = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)$.

16. Mostre que se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, então $\exp(\mathbf{A}t)$ é também uma matriz diagonal com elementos diagonais $\exp(a_1t), \exp(a_2t), \ldots, \exp(a_nt)$.

17. Considere um oscilador satisfazendo o problema de valor inicial

$$u'' + \omega^2 u = 0, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \tag{i}$$

(a) Sejam $x_1 = u, x_2 = u'$ e coloque as Eqs.(i) na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \tag{ii}$$

(b) Usando a série (23), mostre que

$$\exp \mathbf{A}t = \mathbf{I}\cos\omega t + \mathbf{A}\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}. \tag{iii}$$

(c) Encontre a solução do problema de valor inicial (ii).

18. O método de aproximações sucessivas (veja a Seção 2.8) também pode ser aplicado a sistemas de equações. Por exemplo, considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \tag{i}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante e $\mathbf{x}^0$ um vetor dado.

(a) Suponha que existe uma solução $\mathbf{x} = \Phi(t)$ e mostre que ela tem que satisfazer a equação integral

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(s)\,ds. \tag{ii}$$

(b) Comece com a aproximação inicial $\Phi^{(0)}(t) = \mathbf{x}^0$. Substitua $\Phi(s)$ no lado direito da Eq. (ii) por essa expressão e obtenha uma nova aproximação $\Phi^{(1)}(t)$. Mostre que

$$\boldsymbol{\phi}^{(1)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \tag{iii}$$

(c) Repita esse processo obtendo, assim, uma sequência de aproximações $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, ..., $\Phi^{(n)}$, ... Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\boldsymbol{\phi}^{(n)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!}\right)\mathbf{x}^0. \tag{iv}$$

(d) Faça $n \to \infty$ e mostre que a solução do problema de valor inicial (i) é

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \tag{v}$$

7.8 Autovalores Repetidos

Concluiremos nossa discussão do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

considerando o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos. Lembre que observamos, na Seção 7.3, que um autovalor repetido com multiplicidade algébrica $k \geq 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor do que k. Em outras palavras, pode ter menos do que k autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. O exemplo a seguir ilustra essa possibilidade.

EXEMPLO 1

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Os autovalores r e os autovetores $\boldsymbol{\xi}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = 0. \tag{4}$$

Logo, os dois autovalores são $r_1 = 2$ e $r_2 = 2$, ou seja, o autovalor 2 tem multiplicidade 2.

Para determinar os autovetores associados, precisamos voltar para a Eq. (3) e usar o valor 2 para r. Isso nos dá

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Obtemos, portanto, uma única condição $\xi_1 + \xi_2 = 0$, que determina ξ_2 em função de ξ_1, ou vice-versa. Então, um autovetor associado ao autovalor $r = 2$ é

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor. Note que existe apenas um autovetor linearmente independente associado a esse autovalor duplo.

Voltando para o sistema (1), suponha que $r = \rho$ é uma raiz de multiplicidade k da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{7}$$

Então ρ é um autovalor de multiplicidade k da matriz $\mathbf{A}$. Nesse caso, existem duas possibilidades: ou existem k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ, ou existem menos do que k desses vetores.

No primeiro caso, sejam $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(k)}$ os k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade k. Então, $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{\rho t}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \xi^{(k)}e^{\rho t}$ são k soluções linearmente independentes da Eq. (1). Assim, nesse caso, não faz diferença que o autovalor $r = \rho$ seja repetido: ainda existe um conjunto fundamental de soluções da Eq. (1) da forma ξe^{rt}. Esse caso sempre ocorre se a matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes for autoadjunta.

No entanto, se a matriz de coeficientes não for autoadjunta então podem existir menos do que k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade algébrica k e, se for esse o caso, haverá menos do que k soluções da Eq. (1) da forma ξe^{rt} associadas a esse autovalor. Portanto, para construir a solução geral da Eq. (1) é preciso encontrar outras soluções de forma diferente. Por analogia com resultados anteriores para equações lineares de ordem n, é natural procurar outras soluções envolvendo produtos de funções polinomiais e exponenciais. Vamos primeiro considerar um exemplo.

EXEMPLO 2

Encontre um conjunto fundamental de soluções para

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{8}$$

e desenhe um retrato de fase para esse sistema.

A Figura 7.8.1 mostra um campo de direções para o sistema (8). Nessa figura parece que todas as soluções não nulas se afastam da origem.

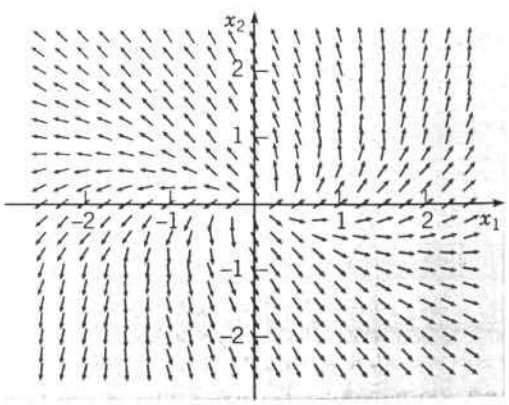


FIGURA 7.8.1 Um campo de direções para o sistema (8).

Para resolver esse sistema, note que a matriz de coeficientes é igual à matriz no Exemplo 1. Sabemos, então, que $r = 2$ é um autovalor duplo que tem um único autovetor correspondente linearmente independente, que podemos escolher como $\xi^T = (1, -1)$. Logo, uma solução do sistema (8) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \tag{9}$$

mas não existe uma segunda solução da forma $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.'

Baseado no procedimento usado para equações lineares de segunda ordem na Seção 3.4, parece natural tentar encontrar uma segunda solução do sistema (8) da forma

$$\mathbf{x} = \xi t e^{2t}, \tag{10}$$

onde ξ é um vetor constante a ser determinado. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8), obtemos

$$2\xi t e^{2t} + \xi e^{2t} - \mathbf{A}\xi t e^{2t} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Para que a Eq. (11) seja satisfeita para todo t, é necessário que os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} sejam nulos. Do termo e^{2t}, vemos que

$$\xi = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Logo, não existe solução não nula do sistema (8) da forma (10).

Como a Eq. (11) contém termos em te^{2t} e e^{2t}, parece que além de ξte^{2t} a segunda solução tem que conter, também, um termo da forma ηe^{2t}; em outras palavras, precisamos supor que

$$\mathbf{x} = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}, \tag{13}$$

onde ξ e η são vetores constantes que deverão ser determinados. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8) por essa expressão, obtemos

$$2\xi t e^{2t} + (\xi + 2\eta)e^{2t} = \mathbf{A}(\xi t e^{2t} + \eta e^{2t}). \tag{14}$$

Igualando os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} de cada lado da Eq. (14), encontramos as condições

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \tag{15}$$

e

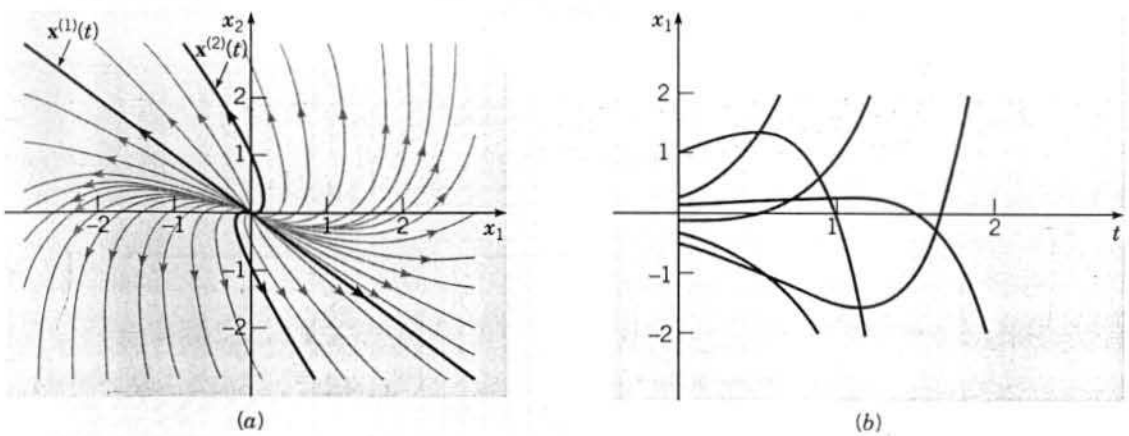
$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi \tag{16}$$

para ξ e η. A Eq. (15) será satisfeita se ξ for um autovetor de $\mathbf{A}$ associado ao autovalor $r = 2$, ou seja, $\xi^T = (1, -1)$. Como $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ é nulo, poderíamos esperar que a Eq. (16) não tivesse solução. No entanto, isso não é necessariamente verdade, já que para alguns vetores ξ é possível resolver a Eq. (16). De fato, a matriz aumentada para a Eq. (16) é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

A segunda linha dessa matriz é proporcional à primeira, de modo que o sistema pode ser resolvido. Temos

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1,$$



(a) (b)

FIGURA 7.8.2 (*a*) Trajetórias do sistema (8); a origem é um nó impróprio. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (8).

de modo que se $\eta_1 = k$, onde k é arbitrário, então $\eta_2 = -k - 1$. Se escrevermos

$$\eta = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

então, substituindo ξ e η na Eq. (13), obtemos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{18}$$

O último termo na Eq. (18) é simplesmente um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e pode ser ignorado, mas os dois primeiros termos constituem uma nova solução:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{19}$$

Um cálculo elementar mostra que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ e, portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (8). A solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]. \end{aligned} \tag{20}$$

O gráfico da solução (20) é um pouco mais difícil de analisar do que em alguns dos exemplos anteriores. É claro que $\mathbf{x}$ torna-se ilimitada quando $t \to \infty$ e que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to -\infty$. É possível mostrar que quando $t \to -\infty$, todas as soluções se aproximam da origem tangentes à reta $x_2 = -x_1$ determinada pelo autovetor. Analogamente, quando $t \to \infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta com coeficiente angular –1. As trajetórias do sistema (8) aparecem na Figura 7.8.2*a*, e alguns gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Figura 7.8.2*b*. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ com autovalores iguais e apenas um autovetor independente. A origem é chamada de **nó impróprio** nesse caso. Se os autovalores forem negativos, então as trajetórias são semelhantes mas percorridas em sentido oposto. Um nó impróprio pode ser assintoticamente estável ou instável, dependendo de os autovalores serem negativos ou positivos.

Uma diferença entre um sistema de duas equações de primeira ordem e uma única equação de segunda ordem é evidente no exemplo precedente. Lembre-se de que para uma equação linear de segunda ordem cuja equação característica tem uma raiz repetida r_1, não é necessário um termo da forma $\eta e^{r_1 t}$ na segunda solução, já que isso é um múltiplo da primeira solução. Por outro lado, para um sistema com duas equações de primeira ordem o termo $\eta e^{r_1 t}$ da Eq. (13) com $r_1 = 2$ não é um múltiplo da primeira solução $\xi e^{r_1 t}$, de modo que o termo $\eta e^{r_1 t}$ precisa ser mantido.

O Exemplo 2 é típico do caso geral quando existe um autovalor duplo e um único autovetor associado independente. Considere, novamente, o sistema (1) e suponha que $r = \rho$ é um autovalor duplo de $\mathbf{A}$, mas que existe apenas um autovetor associado independente ξ. Então, uma solução [semelhante à Eq. (9)] é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t}, \tag{21}$$

onde ξ satisfaz

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \tag{22}$$

Procedendo como no Exemplo 2, vemos que uma segunda solução [semelhante à Eq. (19)] é

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi te^{\rho t} + \eta e^{\rho t}, \tag{23}$$

onde ξ satisfaz a Eq. (22) e η é determinado de

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\eta = \xi. \tag{24}$$

Embora $\det(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I}) = 0$, pode-se mostrar que é sempre possível resolver a Eq. (24) para η. O vetor η é chamado de **autovetor generalizado** associado ao autovalor ρ.

Matrizes Fundamentais. Como explicado na Seção 7.7, matrizes fundamentais são formadas colocando-se soluções linearmente independentes em colunas. Assim, por exemplo, pode-se formar uma matriz fundamental para o sistema (8) usando-se as soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas nas Eqs. (9) e (19), respectivamente:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}. \tag{25}$$

A matriz Φ que satisfaz $\Phi(0) = \mathbf{I}$ também pode ser imediatamente encontrada através da relação $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$. Para a Eq. (8), temos

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0) &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{27}$$

A última matiz é, também, a matriz exponencial $\exp(\mathbf{A}t)$.

Formas de Jordan. Como vimos na Seção 7.7, uma matriz $\mathbf{A}$ $n \times n$ só pode ser diagonalizada se tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Se existem menos autovetores (devido a autovalores repetidos), então $\mathbf{A}$ sempre pode ser transformada em uma matriz quase diagonal denominada sua forma canônica de Jordan,[6] que tem os autovalores de $\mathbf{A}$ em sua diagonal, um em determinadas posições acima da diagonal principal e zeros em todos os outros lugares.

Considere, novamente, a matriz $\mathbf{A}$ dada pela Eq. (2). Forme a matriz de semelhança $\mathbf{T}$ com o único autovetor ξ dado pela Eq. (6) em sua primeira coluna e com o autovetor generalizado η dado pela Eq. (17) com $k = 0$ na segunda coluna. Então, $\mathbf{T}$ e sua inversa são dados por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Como você pode verificar, segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \tag{29}$$

A matriz $\mathbf{J}$ na Eq. (29) é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$. Ela é típica de todas as formas de Jordan por ter o número 1 acima da diagonal principal na coluna correspondente ao autovetor que está faltando (e é substituído em $\mathbf{T}$ pelo autovetor generalizado).

Se começarmos de novo da Eq. (1),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{T}$ é dado pela Eq. (28), produz o sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y}, \tag{30}$$

onde $\mathbf{J}$ é dado pela Eq. (29). Em forma escalar, o sistema (30) é

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \qquad y_2' = 2y_2. \tag{31}$$

Essas equações podem ser resolvidas imediatamente em ordem inversa. Dessa forma, obtemos

$$y_2 = c_1 e^{2t}, \qquad y_1 = c_1 t e^{2t} + c_2 e^{2t}. \tag{32}$$

Logo, as duas soluções independentes do sistema (30) são

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \tag{33}$$

e a matriz fundamental correspondente é

$$\hat{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Como $\hat{\Psi}(0) = \mathbf{I}$, podemos identificar, também, a matriz na Eq. (34) como $\exp(\mathbf{J}t)$. O mesmo resultado pode ser encontrado calculando-se as potências de $\mathbf{J}$ e substituindo-as na série exponencial (veja os Problemas de 19 a 21). Para obter uma matriz fundamental para o sistema original, formamos o produto

[6] Camille Jordan (1838-1921), professor da École Polytechnique e do Collège de France, fez contribuições importantes à análise, à topologia e especialmente à álgebra. A forma de Jordan de uma matriz apareceu em seu influente livro, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, publicado em 1870.

$$\Psi(t) = \mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

que é igual à matriz fundamental dada na Eq. (25).

Não discutiremos aqui as formas de Jordan de matrizes $n \times n$ em maiores detalhes. Para n grande, é possível que existam autovalores com multiplicidade algébrica alta e talvez com multiplicidade geométrica muito menor. Uma discussão completa[7] da forma de Jordan para uma matriz $n \times n$ geral requer conhecimentos mais profundos de álgebra linear do que supomos que os leitores deste livro têm. Os Problemas de 17 a 21 pedem que você explore o uso de formas de Jordan para sistemas com três equações.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4:

(a) Desenhe um campo de direções e esboce algumas trajetórias.

(b) Descreva como as soluções se comportam quando $t \to \infty$.

(c) Encontre a solução geral do sistema de equações.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos Problemas 5 e 6, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe a trajetória da solução no plano x_1x_2 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:

(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.

(b) Desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$ e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

[7]Veja, por exemplo, os livros listados nas Referências no final deste capítulo.

13. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15. Mostre que todas as soluções do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

tendem a zero quando $t \to \infty$ se, e somente se, $a + d < 0$ e $ad - bc > 0$. Compare esse resultado com o do Problema 38 na Seção 3.4.

16. Considere, novamente, o circuito elétrico no Problema 26 da Seção 7.6. Esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que os autovalores são reais e iguais se $L = 4R^2C$.

(b) Suponha que $R = 1\ \Omega$. $C = 1$ F e $L = 4$ H. Suponha, também, que $I(0) = 1$ A e $V(0) = 2$ V. Encontre $I(t)$ e $V(t)$.

Autovalores de Multiplicidade 3. Se a matriz $\mathbf{A}$ tem um autovalor de multiplicidade algébrica 3, então podem existir um, dois ou três autovetores associados linearmente independentes. A solução geral do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é diferente, dependendo do número de autovetores independentes associados ao autovalor triplo. Como observado no texto não há dificuldade se existem três autovetores, já que, nesse caso, existem três soluções independentes da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Os dois problemas a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de um autovalor triplo com um ou dois autovetores independentes, respectivamente.

17. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{i}$$

(a) Mostre que $r = 2$ é um autovalor de multiplicidade 3 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e que existe apenas um autovetor associado, a saber,

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a informação do item (a), escreva uma solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ do sistema (i). Não existe outra solução da forma puramente exponencial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$.

(c) Para encontrar uma segunda solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t}$. Mostre que $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

Como $\boldsymbol{\xi}$ já foi encontrado no item (a), resolva a segunda equação para $\boldsymbol{\eta}$. Despreze o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece em $\boldsymbol{\eta}$, já que nos leva, apenas, a um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}$. Depois, escreva uma segunda solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ do sistema (i).

(d) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(t^2/2)e^{2t} + \boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\zeta}e^{2t}$. Mostre que $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}, \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta}.$$

As duas primeiras equações são as mesmas do item (c), logo, para resolver a equação para $\boldsymbol{\zeta}$ despreze novamente o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece. Depois, escreva uma terceira solução $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ do sistema (i).

(e) Escreva uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ para o sistema (i).

(f) Forme a matriz $\mathbf{T}$ com o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ na primeira coluna e os autovetores generalizados $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ nas segunda e terceira colunas. Depois, encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. A matriz $\mathbf{J}$ é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

18. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{i}$$

(a) Mostre que $r = 1$ é um autovetor triplo da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e que existem dois autovetores associados linearmente independentes, que podemos escolher como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{ii}$$

Encontre duas soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ da Eq. (i).

(b) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \xi te^t + \eta e^t$; mostre que então ξ e η têm que satisfazer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \tag{iii}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi. \tag{iv}$$

(c) Mostre que $\xi = c_1\xi^{(1)} + c_2\xi^{(2)}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é a solução mais geral da Eq. (iii). Mostre que para resolver a Eq. (iv) é necessário que $c_1 = c_2$.

(d) É conveniente escolher $c_1 = c_2 = 2$. Para essa escolha, mostre que

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{v}$$

onde retiramos os múltiplos de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ que aparecem em η. Use os resultados dados nas Eqs. (v) para encontrar uma terceira solução linearmente independente $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ da Eq. (i).

(e) Escreva uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema (i).

(f) Forme a matriz $\mathbf{T}$ com o autovetor $\xi^{(1)}$ na primeira coluna e com o autovetor ξ e o autovetor generalizado η, dados pelas Eqs. (v), nas duas últimas colunas. Encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$. A matriz $\mathbf{J}$ é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

19. Seja $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que $\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Use $\exp(\mathbf{J}t)$ para resolver o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Jx}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

20. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Observe que se você escolher $\lambda = 1$, então a matriz $\mathbf{J}$ neste problema é igual à matriz $\mathbf{J}$ no Problema 18(f). Usando a matriz $\mathbf{T}$ do Problema 18(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 1$. A matriz resultante é igual à matriz fundamental $\Psi(t)$ no Problema 18(e)? Se não for, explique a discrepância.

21. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & [n(n-1)/2]\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Observe que se você escolher $\lambda = 2$, então a matriz $\mathbf{J}$ neste problema é igual à matriz $\mathbf{J}$ no Problema 17(f). Usando a matriz $\mathbf{T}$ do Problema 17(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 2$. Observe que a matriz resultante é a mesma da matriz fundamental $\Psi(t)$ no Problema 17(e).

7.9 Sistemas Lineares Não Homogêneos

Nesta seção vamos considerar o sistema não homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{1}$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$ e o vetor $n \times 1$ $\mathbf{g}(t)$ são contínuos em $\alpha < t < \beta$. Pelo mesmo argumento usado na Seção 3.5 (veja, também, o Problema 16 nesta seção), a solução geral da Eq. (1) pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t), \tag{2}$$

onde $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}(t)$ é uma solução particular do sistema não homogêneo (1). Vamos descrever, rapidamente, diversos métodos para se encontrar $\mathbf{v}(t)$.

Diagonalização. Começamos com um sistema da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{3}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ constante diagonalizável. Diagonalizando a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ como indicado na Seção 7.7, podemos transformar a Eq. (3) em um sistema de equações facilmente solúvel.

Seja $\mathbf{T}$ a matriz cujas colunas são os autovetores $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ de $\mathbf{A}$ e defina uma variável dependente nova $\mathbf{y}$ por

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \tag{4}$$

Então, substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (3) pela expressão anterior, obtemos

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, segue que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t), \tag{5}$$

onde $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$ e $\mathbf{D}$ é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$, arrumados na mesma ordem que os autovetores correspondentes $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$ que aparecem como colunas de $\mathbf{T}$. A Eq. (5) é um sistema de n equações *desacopladas* para $y_1(t), \ldots, y_n(t)$; em consequência, as equações podem ser resolvidas separadamente. Em forma escalar, a Eq. (5) fica

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

onde $h_j(t)$ é uma determinada combinação linear de $g_1(t), \ldots, g_n(t)$. A Eq. (6) é uma equação linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. De fato, temos

$$y_j(t) = e^{r_j t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_j s}h_j(s)\,ds + c_j e^{r_j t}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

onde os c_j são constantes arbitrárias. Finalmente, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (3) é obtida da Eq. (4). Ao ser multiplicado pela matriz de semelhança $\mathbf{T}$ o segundo termo do lado direito do sinal de igualdade na Eq. (7) fornece a solução geral da equação homogênea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, enquanto o primeiro termo fornece uma solução particular do sistema não homogêneo (3).

EXEMPLO 1

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{8}$$

Procedendo como na Seção 7.5, vemos que os autovalores da matriz de coeficientes são $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, e os autovetores correspondentes são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Logo, a solução geral da equação homogênea é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{10}$$

Antes de escrever a matriz $\mathbf{T}$ de autovetores, lembre que vamos precisar encontrar $\mathbf{T}^{-1}$. A matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é real e simétrica, logo podemos usar o resultado enunciado no final da Seção 7.3: $\mathbf{T}^{-1}$ é simplesmente a adjunta ou (como $\mathbf{T}$ é real) a transposta de $\mathbf{T}$, desde que os autovetores de $\mathbf{A}$ estejam normalizados de modo que $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 1$. Portanto, normalizando $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, temos

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ e substituindo na Eq. (8), obtemos o seguinte sistema de equações para a variável dependente nova $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1' + 3y_1 &= \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \\ y_2' + y_2 &= \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t. \end{aligned} \tag{13}$$

Cada uma das Eqs. (13) é uma equação linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{9}\right] + c_1 e^{-3t} \\ y_2 &= \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2 e^{-t}. \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente, escrevemos a solução em função das variáveis originais:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\right]e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\right]e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{15}$$

onde $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ e $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (15) formam a solução geral do sistema homogêneo associado à Eq. (8). As parcelas restantes formam uma solução particular do sistema não homogêneo.

Se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (3) não for diagonalizável (devido a autovalores repetidos e à falta de autovetores) pode, de qualquer jeito, ser reduzida à sua forma canônica de Jordan $\mathbf{J}$ através de uma matriz de semelhança apropriada $\mathbf{T}$, envolvendo tanto autovetores quanto autovetores generalizados. Nesse caso, as equações diferenciais para $y_1, \ldots, y_n$ não estarão totalmente desacopladas, já que algumas

linhas de **J** têm dois elementos não nulos, um autovalor na posição diagonal e um 1 na posição adjacente à direita. No entanto, as equações para $y_1, \ldots, y_n$ ainda podem ser resolvidas consecutivamente, começando com y_n. Então, a solução do sistema original (3) pode ser encontrada pela relação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

Coeficientes Indeterminados. Uma segunda maneira de se encontrar uma solução particular do sistema não homogêneo (1) é o método dos coeficientes indeterminados. Para usar esse método supomos que a solução tem determinada forma com alguns ou todos os coeficientes indeterminados e depois procuramos esses coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial. Do ponto de vista prático esse método só é aplicável se a matriz de coeficientes **P** for constante e se as componentes de **g** forem funções polinomiais, exponenciais, senoidais ou produtos de tais funções. Nesse caso, a forma correta da solução pode ser prevista de maneira simples e sistemática. O procedimento para escolher a forma da solução é essencialmente o mesmo dado na Seção 3.5 para equações lineares de segunda ordem. A principal diferença é ilustrada pelo caso de um termo não homogêneo da forma $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, onde λ é uma raiz simples da equação característica. Nessa situação, em vez de supor uma solução da forma $\mathbf{a}te^{\lambda t}$ é preciso usar $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, onde **a** e **b** são determinados substituindo-se a expressão na equação diferencial.

EXEMPLO 2

Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{16}$$

Esse é o mesmo sistema de equações do Exemplo 1. Para usar o método dos coeficientes a determinar escrevemos $\mathbf{g}(t)$ na forma

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t. \tag{17}$$

Vamos supor, então, que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \tag{18}$$

onde **a**, **b**, **c** e **d** são vetores a serem determinados. Note que $r = -1$ é um autovalor da matriz de coeficientes e, portanto, temos que incluir tanto $\mathbf{a}te^{-t}$ quanto $\mathbf{b}e^{-t}$ na solução proposta. Substituindo a Eq. (18) na Eq. (16) e juntando os termos, obtemos as seguintes equações algébricas para **a**, **b**, **c** e **d**:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= -\mathbf{a}, \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{c} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{d} &= \mathbf{c}. \end{aligned} \tag{19}$$

Da primeira das Eqs. (19), vemos que **a** é um autovetor de **A** associado ao autovalor $r = -1$. Logo, $\mathbf{a}^T = (\alpha, \alpha)$, onde α é qualquer constante diferente de zero. Note que a segunda das Eqs. (19) só pode ser resolvida se $\alpha = 1$ e, nesse caso, temos

$$\mathbf{b} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{20}$$

para qualquer constante k. A escolha mais simples é $k = 0$, donde $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. As terceira e quarta equações em (19) fornecem, então, $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ e $\mathbf{d}^T = (-4/3, -5/3)$, respectivamente. Finalmente, da Eq. (18) obtemos a solução particular

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

A solução particular (21) não é idêntica à contida na Eq. (15) do Exemplo 1, porque o termo contendo e^{-t} é diferente. No entanto, se escolhermos $k = 1/2$ na Eq. (20) teremos $\mathbf{b}^T = (1/2, -1/2)$, e as duas soluções particulares ficarão idênticas.

Variação dos Parâmetros. Vamos considerar, agora, problemas mais gerais onde a matriz de coeficientes não é constante ou não é diagonalizável. Seja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \tag{22}$$

onde $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ são contínuas em $\alpha < t < \beta$. Suponha que uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema homogêneo associado

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{23}$$

já foi encontrada. Vamos usar o método de variação dos parâmetros para construir uma solução particular e, portanto, a solução geral do sistema não homogêneo (22).

Como a solução geral do sistema homogêneo (23) é $\Psi(t)\mathbf{c}$, é natural proceder como na Seção 3.6 e buscar uma solução do sistema não homogêneo (22) substituindo-se o vetor constante $\mathbf{c}$ por uma função vetorial $\mathbf{u}(t)$. Assim, supomos que

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \tag{24}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é um vetor a ser encontrado. Diferenciando $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (24) e impondo a Eq. (22), obtemos

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{25}$$

Como $\Psi(t)$ é uma matriz fundamental, $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$; logo, a Eq. (25) se reduz a

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \tag{26}$$

Lembre que $\Psi(t)$ é invertível em qualquer intervalo onde $\mathbf{P}$ é contínua. Então $\Psi^{-1}(t)$ existe e temos

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \tag{27}$$

Logo, podemos selecionar como $\mathbf{u}(t)$ qualquer vetor na classe de vetores que satisfazem a Eq. (27); esses vetores estão determinados a menos de um vetor constante aditivo; portanto, denotamos $\mathbf{u}(t)$ por

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}, \tag{28}$$

onde o vetor constante $\mathbf{c}$ é arbitrário. Se as integrais na Eq. (28) puderem ser calculadas, a solução geral do sistema (22) poderá ser encontrada substituindo-se $\mathbf{u}(t)$ na Eq. (24) pela expressão na Eq. (28). No entanto, mesmo se as integrais não puderem ser calculadas ainda podemos escrever a solução geral da Eq. (22) na forma

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int_{t_1}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds, \tag{29}$$

onde t_1 é qualquer ponto no intervalo (α, β). Note que a primeira parcela à direita do sinal de igualdade na Eq. (29) é a solução geral do sistema homogêneo associado (23), e a segunda parcela é uma solução particular da Eq. (22).

Vamos considerar agora o problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (22) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \tag{30}$$

Podemos encontrar a solução desse problema de maneira conveniente se escolhermos o limite inferior de integração na Eq. (29) como o ponto inicial t_0. Então a solução geral da equação diferencial é

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{31}$$

Para $t = t_0$ a integral na Eq. (31) é zero, de modo que a condição inicial (30) também será satisfeita se escolhermos

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \tag{32}$$

Portanto,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t)\int_{t_0}^{t} \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \tag{33}$$

é a solução do problema de valor inicial dado. Mais uma vez, embora seja útil usar Ψ^{-1} para escrever as soluções (29) e (33) em geral, em casos particulares é melhor resolver as equações necessárias por redução de linhas do que calcular Ψ^{-1} e substituir nas Eqs. (29) e (33).

A solução (33) fica em uma forma ligeiramente mais simples se usarmos a matriz fundamental $\Phi(t)$ que satisfaz $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$. Nesse caso, temos

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \tag{34}$$

A Eq. (34) pode ser ainda mais simplificada se a matriz de coeficientes $\mathbf{P}(t)$ for constante (veja o Problema 17).

EXEMPLO 3

Use o método de variação dos parâmetros para encontrar a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{35}$$

Esse é o mesmo sistema de equações dos Exemplos 1 e 2.

A solução geral do sistema homogêneo associado foi dada na Eq. (10). Assim,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \tag{36}$$

é uma matriz fundamental. Então, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (35) é dada por $\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ satisfaz $\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, ou

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Resolvendo a Eq. (37) por redução de linhas, obtemos

$$u_1' = e^{2t} - \tfrac{3}{2}te^{3t},$$
$$u_2' = 1 + \tfrac{3}{2}te^{t}.$$

Logo,

$$u_1(t) = \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}te^{3t} + \tfrac{1}{6}e^{3t} + c_1,$$
$$u_2(t) = t + \tfrac{3}{2}te^{t} - \tfrac{3}{2}e^{t} + c_2,$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{38}$$

que é a mesma solução obtida anteriormente.

Transformadas de Laplace. Usamos a transformada de Laplace no Capítulo 6 para resolver equações lineares de qualquer ordem. Ela também pode ser usada de maneira semelhante para resolver sistemas de equações. Como a transformada é uma integral, a transformada de um vetor é calculada componente a componente. Assim, $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ é o vetor cujas componentes são as transformadas das componentes respectivas de $\mathbf{x}(t)$ e, analogamente, para $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\}$. Denotaremos $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ por $\mathbf{X}(s)$. Então, por uma extensão do Teorema 6.2.1 para vetores, temos

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0). \tag{39}$$

EXEMPLO 4

Use o método de transformada de Laplace para resolver o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \tag{40}$$

Esse é o mesmo sistema de equações dos Exemplos de 1 a 3.

Calculando a transformada de Laplace de cada parcela na Eq. (40), obtemos

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s), \tag{41}$$

onde $\mathbf{G}(s)$ é a transformada de $\mathbf{g}(t)$. A transformada $\mathbf{G}(s)$ é dada por

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Simplificaremos os cálculos restantes supondo que $\mathbf{x}(t)$ satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Então, a Eq. (41) fica

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s), \tag{43}$$

onde, como de hábito, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Logo, $\mathbf{X}(s)$ é dada por

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(s). \tag{44}$$

A matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é chamada **matriz de transferência** porque, multiplicando-a pela transformada do vetor de entrada $\mathbf{g}(t)$, obtemos a transformada do vetor de saída $\mathbf{x}(t)$. Neste exemplo, temos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \tag{45}$$

e obtemos, por um cálculo direto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

Então, substituindo as Eqs. (42) e (46) na Eq. (44) e efetuando as multiplicações indicadas, vemos que

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Finalmente, precisamos obter a solução $\mathbf{x}(t)$ de sua transformada $\mathbf{X}(s)$. Isso pode ser feito expandindo-se as expressões na Eq. (47) em frações parciais e usando-se a Tabela 6.2.1 ou (mais eficientemente) usando um programa de computador apropriado. De qualquer modo, depois de simplificado o resultado fica

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{48}$$

A Eq. (48) fornece a solução particular do sistema (40) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Por causa disso, ela difere ligeiramente das soluções particulares obtidas nos três exemplos precedentes. Para obter a solução geral da Eq. (40) você precisa somar a expressão na Eq. (48) à solução geral (10) do sistema homogêneo associado à Eq. (40).

Cada um dos métodos para se resolver equações não homogêneas tem vantagens e desvantagens. O método dos coeficientes indeterminados não precisa de integração, mas tem escopo limitado e pode levar a diversos conjuntos de equações algébricas. O método de diagonalização requer que se encontre a inversa da matriz de semelhança e a solução de um conjunto de equações lineares de primeira ordem desacopladas, seguida de uma multiplicação de matrizes. Sua principal vantagem é que para matrizes de coeficiente autoadjuntas a inversa da matriz de semelhança pode ser encontrada sem cálculos — uma característica muito importante para sistemas grandes. O método da transformada de Laplace envolve a inversão de uma matriz para se encontrar a matriz de transferência, seguida de uma multiplicação e, finalmente, da determinação da transformada inversa de cada parcela na expressão resultante. Ela é particularmente útil em problemas com termos não homogêneos que envolvem funções descontínuas ou impulsivas. O método de variação dos parâmetros é o mais geral. Por outro lado, envolve a solução de um conjunto de equações lineares algébricas com coeficientes variáveis, seguido de uma integração e de uma multiplicação de matrizes, de modo que também é o mais complicado do ponto de vista computacional. Para muitos sistemas pequenos com coeficientes constantes, tais como as dos exemplos desta seção, todos esses métodos funcionam bem, e pode não fazer muita diferença qual deles é escolhido.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 12, encontre a solução geral do sistema de equações dados.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^t$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$

13. O circuito elétrico mostrado na Figura 7.9.1 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}I(t), \tag{i}$$

onde x_1 é a corrente através do indutor, x_2 é a queda de voltagem através do capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.

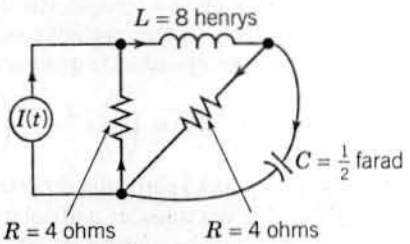


FIGURA 7.9.1 O circuito no Problema 13.

(a) Determine uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema homogêneo associado à Eq. (i). Veja o Problema 25 da Seção 7.6.

(b) Se $I(t) = e^{-t/2}$, determine a solução do sistema (i) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Em cada um dos Problemas 14 e 15, verifique que o vetor dado é a solução geral do sistema homogêneo associado e depois resolva o sistema não homogêneo. Suponha que $t > 0$.

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t^{-1}$

15. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t^2$

16. Seja $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ e seja $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ uma solução particular do mesmo sistema. Considerando a diferença $\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{v}(t)$, mostre que $\Phi(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

17. Considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

(a) Depois de observar o Problema 15(c) na Seção 7.7, mostre que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t - s)\mathbf{g}(s)\,ds.$$

(b) Mostre também que

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t - s)]\mathbf{g}(s)\,ds.$$

Compare esses resultados com os do Problema 27 na Seção 3.6.

REFERÊNCIAS* Mais informações sobre matrizes e álgebra linear estão disponíveis em qualquer livro introdutório sobre o assunto. A lista a seguir é uma amostra representativa:

Anton, H. and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (New York: Wiley, 2000).

Johnson, L. W., Riess, R. D., and Arnold, J. T., *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2001).

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003).

Leon, S. J., *Linear Algebra with Applications* (6th ed.) (New York: Macmillan, 2002).

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.)(New York: Academic Press, 1998).

O livro a seguir trata equações diferenciais elementares com ênfase especial em sistemas de equações de primeira ordem:

Brannan, J. R. and Boyce, W. E., *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications* (New York: Wiley, 2007).

*Os livros de Kolman, B. e Leon, S.J. foram traduzidos para o português. (N.T.)

CAPÍTULO

8

Métodos Numéricos

Até agora discutimos métodos para resolver equações diferenciais usando técnicas analíticas como integração ou expansão em séries. Em geral, a ênfase era em encontrar uma expressão exata para a solução. Infelizmente, existem muitos problemas importantes em engenharia e ciência, especialmente problemas não lineares, nos quais esses métodos ou não se aplicam ou são muito complicados para se usar. Neste capítulo vamos usar uma abordagem alternativa, a utilização de métodos numéricos aproximados para se obter uma aproximação precisa da solução de um problema de valor inicial. Vamos apresentar esses métodos no contexto o mais simples possível, ou seja, uma única equação escalar de primeira ordem. No entanto, eles podem ser facilmente estendidos para sistemas de equações de primeira ordem, e isso está esquematizado rapidamente na Seção 8.6. Os procedimentos aqui descritos podem ser executados facilmente em computadores pessoais.

8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente

Para discutir o desenvolvimento e a utilização de procedimentos numéricos vamos nos concentrar principalmente em problemas de valor inicial para equações de primeira ordem consistindo na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

e na condição inicial

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Vamos supor que as funções f e f_y são contínuas em algum retângulo no plano ty contendo o ponto (t_0, y_0). Então, pelo Teorema 2.4.2 existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema dado em algum intervalo em torno de t_0. Se a Eq. (1) for não linear, então o intervalo de existência da solução pode ser difícil de ser determinado e pode não ter uma relação simples com a função f. No entanto, vamos supor, em todas as nossas discussões, que existe uma única solução do problema de valor inicial (1), (2) no intervalo de interesse.

Na Seção 2.7 descrevemos o método mais antigo e mais simples de aproximação numérica, a saber, o método de Euler, ou o método da reta tangente. Esse método é expresso pela equação

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Se o tamanho do passo tiver valor uniforme h e se denotarmos $f(t_n, y_n)$ por f_n, então a Eq. (3) fica na forma

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

O método de Euler consiste em calcular repetidamente a Eq. (3) ou (4), usando o resultado de cada passo para executar o próximo passo. Dessa maneira você obtém uma sequência de valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ que aproximam o valor da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$.

Na Seção 2.7 observamos que um programa de computador para o método de Euler tem a estrutura dada a seguir. As instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação conveniente.

O Método de Euler

Passo 1. **defina** $f(t, y)$
Passo 2. **alimente** os valores iniciais $t0$ e $y0$
Passo 3. **alimente** o tamanho do passo h e o número de passos n
Passo 4. **escreva** $t0$ e $y0$
Passo 5. **para** j de 1 até n **calcule**
Passo 6. $k1 = f(t, y)$
$y = y + h * k1$
$t = t + h$
Passo 7. **escreva** t e y
Passo 8. **fim**

Alguns exemplos do método de Euler aparecem na Seção 2.7. Como outro exemplo, considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \tag{5}$$

$$y(0) = 1. \tag{6}$$

A Eq. (5) é uma equação linear de primeira ordem, e pode-se verificar facilmente que a solução que satisfaz as condições iniciais (6) é

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{16} + \tfrac{19}{16}e^{4t}. \tag{7}$$

Como a solução exata é conhecida não precisamos de métodos numéricos para resolver o problema de valor inicial (5), (6). Por outro lado, a disponibilidade da solução exata torna fácil determinar a precisão de qualquer procedimento numérico utilizado nesse problema. Usaremos esse problema ao longo do capítulo para ilustrar e comparar os métodos numéricos diferentes. As soluções da Eq. (5) divergem rapidamente umas das outras, de modo que deveríamos esperar uma dificuldade razoável em aproximar bem a solução (7) em qualquer intervalo considerável. De fato, essa é a razão da escolha desse problema em particular; será relativamente fácil observar as vantagens de se usar métodos mais precisos.

EXEMPLO 1

Usando a fórmula de Euler (4) e tamanhos de passo $h = 0{,}05$; 0,025; 0,01 e 0,001, determine valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema (5), (6) no intervalo $0 \le t \le 2$.

Os cálculos indicados foram feitos em um computador, e a Tabela 8.1.1 mostra alguns resultados. A precisão não impressiona muito. Para $h = 0{,}01$, o erro percentual é de 3,85% em $t = 0{,}5$, 7,49% em $t = 1{,}0$ e 14,4% em $t = 2{,}0$. Os erros percentuais correspondentes para $h = 0{,}001$ são de 0,40%, 0,79% e 1,58%, respectivamente. Note que se $h = 0{,}001$, precisamos de 2.000 passos para atravessar o intervalo de $t = 0$ até $t = 2$. Assim, é necessária uma quantidade considerável de cálculos para se obter uma precisão razoavelmente boa para esse problema usando-se o método de Euler. Quando discutirmos outros métodos numéricos mais adiante, neste capítulo, veremos que é possível obter precisão comparável, ou até melhor, com tamanhos de passos muito maiores e muito menos passos computacionais.

TABELA 8.1.1 Comparação dos Resultados de Aproximações Numéricas da Solução de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, Usando o Método de Euler para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	Exata
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5475000	1,5761188	1,5952901	1,6076289	1,6090418
0,2	2,3249000	2,4080117	2,4644587	2,5011159	2,5053299
0,3	3,4333560	3,6143837	3,7390345	3,8207130	3,8301388
0,4	5,0185326	5,3690304	5,6137120	5,7754845	5,7942260
0,5	7,2901870	7,9264062	8,3766865	8,6770692	8,7120041
1,0	45,588400	53,807866	60,037126	64,382558	64,897803
1,5	282,07187	361,75945	426,40818	473,55979	479,25919
2,0	1745,6662	2432,7878	3029,3279	3484,1608	3540,2001

Para se começar a investigar os erros na utilização de aproximações numéricas e sugerir, também, maneiras de se construir algoritmos mais precisos ajuda mencionar algumas maneiras alternativas de se olhar o método de Euler.

Primeiro, vamos escrever a equação diferencial (1) no ponto $t = t_n$ na forma

$$\frac{d\phi}{dt}(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]. \tag{8}$$

Então, aproximamos a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças correspondente (direto, ou para a frente), obtendo

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \cong f[t_n, \phi(t_n)]. \tag{9}$$

Finalmente, se substituirmos $\phi(t_{n-1})$ e $\phi(t_n)$ pelos seus valores aproximados y_{n-1} e y_n, respectivamente, e resolvermos para y_{n+1}, obteremos a fórmula de Euler (3).

Outro ponto de vista é escrever o problema como uma equação integral. Como $y = \phi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), integrando-se de t_n até t_{n+1} obtemos

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\, dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt,$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{10}$$

A integral na Eq. (10) representa geometricamente a área sob a curva na Figura 8.1.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$. Se aproximarmos a integral substituindo $f[t, \phi(t)]$ por seu valor $f[t_n, \phi(t_n)]$ em $t = t_n$, estaremos aproximando a área real pela área do retângulo sombreado. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned}\phi(t_{n+1}) &\cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n) \\ &= \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)].\end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, para obter uma aproximação y_{n+1} para $\phi(t_{n+1})$ fazemos uma segunda aproximação substituindo $\phi(t_n)$ pelo seu valor aproximado y_n na Eq. (11). Isso nos dá a fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Um algoritmo mais preciso pode ser obtido através de uma aproximação mais precisa da integral. Isso será discutido na Seção 8.2.

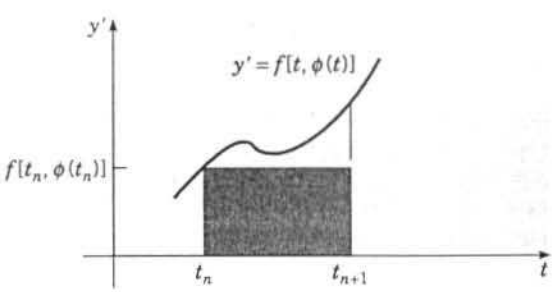


FIGURA 8.1.1 Dedução integral do método de Euler.

Uma terceira abordagem é supor que a solução $y = \phi(t)$ tem uma série de Taylor em torno do ponto t_n. Então,

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots,$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)]h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots. \tag{12}$$

Se a série é truncada depois das duas primeiras parcelas e $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ são substituídos por seus valores aproximados y_{n+1} e y_n, novamente obtemos a fórmula de Euler (4). Se forem usadas mais parcelas na série, obtém-se uma fórmula mais precisa. Além disso, usando uma série de Taylor com resto é possível estimar o tamanho do erro na fórmula. Isso será discutido mais adiante nesta seção.

A Fórmula de Euler Inversa. Pode-se obter uma variante da fórmula de Euler aproximando-se a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças inverso (ou para trás) $[\phi(t_n) - \phi(t_{n-1})]/h$, em vez do quociente de diferenças direto usado na Eq. (9). Obtemos, assim,

$$\phi(t_n) - \phi(t_{n-1}) \cong hf(t_n, y_n),$$

ou

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_n, y_n).$$

Variando o índice de n para $n + 1$, obtemos a fórmula de Euler inversa

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{13}$$

Supondo y_n conhecido e y_{n+1} a ser calculado, note que a Eq. (13) não fornece uma fórmula explícita para y_{n+1}. Em vez disso, é uma equação que define implicitamente y_{n+1} e precisa ser resolvida para se determinar o valor de y_{n+1}. A dificuldade disso depende exclusivamente da natureza da função f.

EXEMPLO 2 Use a fórmula de Euler inversa (13) e tamanhos de passos $h = 0{,}05$; 0,025; 0,01 e 0,001 para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial (5), (6) no intervalo $0 \le t \le 2$.

Para este problema, a fórmula de Euler inversa (13) fica

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - t_{n+1} + 4y_{n+1}).$$

Vamos mostrar os dois primeiros passos em detalhe, de modo a tornar claro como o método funciona. No primeiro passo, temos

$$y_1 = y_0 + h(1 - t_1 + 4y_1) = 1 + (0{,}05)(1 - 0{,}05 + 4y_1).$$

Resolvendo essa equação para y_1, obtemos

$$y_1 = 1{,}0475/0{,}8 = 1{,}309375.$$

Note que como a equação diferencial é linear, a equação implícita para y_1 também é linear e, portanto, fácil de resolver. A seguir,

$$y_2 = y_1 + h(1 - t_2 + 4y_2) = 1{,}309375 + (0{,}05)(1 - 0{,}1 + 4y_2),$$

o que leva a

$$y_2 = 1{,}354375/0{,}8 = 1{,}69296875.$$

Continuando os cálculos em um computador, obtemos os resultados ilustrados na Tabela 8.1.2. Os valores dados pela fórmula de Euler inversa são uniformemente muito grandes para este problema, enquanto os valores obtidos pelo método de Euler eram muito pequenos. Neste problema os erros são um pouco maiores para a fórmula de Euler inversa do que para o método de Euler, embora para valores pequenos de h a diferença seja insignificante. Como o método de Euler inverso parece ser menos preciso do que o direto e é um pouco mais complicado, é natural perguntar por que mencioná-lo. A resposta é que ele é o exemplo mais simples de uma classe de métodos conhecidos como fórmulas inversas de diferenciação que são muito úteis para certos tipos de equações diferenciais. Voltaremos a essa questão mais adiante, neste capítulo.

TABELA 8.1.2 Comparação dos Resultados de Aproximações Numéricas da Solução de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ Usando-se o Método de Euler Inverso para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	Exata
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6929688	1,6474375	1,6236638	1,6104634	1,6090418
0,2	2,7616699	2,6211306	2,5491368	2,5095731	2,5053299
0,3	4,4174530	4,0920886	3,9285724	3,8396379	3,8301388
0,4	6,9905516	6,3209569	5,9908303	5,8131282	5,7942260
0,5	10,996956	9,7050002	9,0801473	8,7472667	8,7120041
1,0	103,06171	80,402761	70,452395	65,419964	64,897803
1,5	959,44236	661,00731	542,12432	485,05825	479,25919
2,0	8934,0696	5435,7294	4172,7228	3597,4478	3540,2001

Erros em Aproximações Numéricas. A utilização de um procedimento numérico, como a fórmula de Euler, para resolver um problema de valor inicial levanta uma série de questões que precisam ser respondidas antes de se aceitar a solução numérica aproximada como satisfatória. Uma dessas é a questão da **convergência**, ou seja, quando o tamanho do passo h tende a zero os valores da solução numérica $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tendem ao valor correspondente da solução exata? Mesmo supondo que a resposta seja afirmativa, resta o problema prático importante de quão rápido a aproximação numérica converge para a solução. Em outras palavras, o quão pequeno tem que ser o tamanho do passo para garantir um determinado nível de precisão? Queremos usar um tamanho de passo que seja suficientemente pequeno para garantir a precisão necessária, mas que não seja pequeno demais. Um passo desnecessariamente pequeno torna os cálculos mais lentos, mais caros e, em alguns casos, pode até causar perda de precisão.

Existem duas fontes fundamentais de erro ao se resolver um problema de valor inicial numericamente. Vamos supor, primeiro, que nosso computador é tal que podemos efetuar todos os cálculos com precisão absoluta, ou seja, mantendo um número infinito de casas decimais. A diferença E_n entre a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) e sua aproximação numérica é dada por

$$E_n = \phi(t_n) - y_n \tag{14}$$

e é conhecida como o **erro de truncamento global**. Ele tem duas causas: primeiro, em cada passo usamos uma fórmula aproximada para determinar y_{n+1}; segundo, os dados de entrada em cada etapa estão apenas aproximadamente corretos, já que em geral $\phi(t_n)$ não é igual a y_n. Se supusermos que $y_n = \phi(t_n)$, então o único erro efetuado em cada passo é devido ao uso de uma fórmula aproximada. Esse erro é conhecido como o **erro de truncamento local** e_n.

A segunda fonte fundamental de erro é que efetuamos os cálculos em aritmética com apenas um número finito de dígitos. Isso nos leva a um **erro de arredondamento** R_n definido por

$$R_n = y_n - Y_n, \tag{15}$$

onde Y_n é o valor *computado de fato* pelo método numérico dado.

O valor absoluto do erro total em se calcular $\phi(t_n)$ é dado por

$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|. \tag{16}$$

Usando a desigualdade triangular, $|a + b| \leq |a| + |b|$, obtemos da Eq. (16)

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - Y_n| &\leq |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\leq |E_n| + |R_n|. \end{aligned} \tag{17}$$

Logo, o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e de arredondamento. Para os procedimentos numéricos discutidos neste livro é possível obter estimativas úteis do erro de truncamento. No entanto, limitamos nossa discussão basicamente ao erro de truncamento local, que é um pouco mais simples. O erro de arredondamento é claramente de natureza mais aleatória. Depende do tipo de computador utilizado, da ordem em que os cálculos são efetuados, do método de arredondamento e assim por diante. Embora uma análise do erro de arredondamento esteja além do escopo deste livro, é possível dizer mais do que se poderia esperar à primeira vista (veja, por exemplo, o livro de Henrici listado nas referências). Alguns dos perigos do erro de arredondamento são discutidos nos Problemas de 25 a 27 e na Seção 8.5.

Erro de Truncamento Local para o Método de Euler. Vamos supor que a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) tem derivada segunda contínua no intervalo de interesse. Para garantir isso podemos supor que f, f_t e f_y são contínuas. Observe que se f tem essas propriedades e se ϕ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), então

$$\phi'(t) = f[t, \phi(t)],$$

e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t) \\ &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]f[t, \phi(t)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade nessa equação é contínua, ϕ'' também é contínua.

Usando, então, um polinômio de Taylor com resto para expandir ϕ em torno de t_n, obtemos

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \tag{19}$$

onde $\bar{t}_n$ é algum ponto no intervalo $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Subtraindo a Eq. (4) da Eq. (19) e observando que $\phi(t_n + h) = \phi(t_{n+1})$ e $\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]$, vemos que

$$\phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = [\phi(t_n) - y_n] + h[f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)] + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{20}$$

Para calcular o erro de truncamento local, aplicamos a Eq. (20) à solução exata $\phi(t)$, ou seja, tomamos y_n como sendo $\phi(t_n)$. Então, vemos imediatamente da Eq. (20) que o erro de truncamento local e_{n+1} é

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{21}$$

Assim, o erro de truncamento local para o método de Euler é proporcional ao quadrado do tamanho do passo h, e o fator de proporcionalidade depende da derivada segunda da solução ϕ. A expressão dada pela Eq. (21) depende de n e, em geral, é diferente para cada passo. Uma cota uniforme, válida em um intervalo $[a, b]$, é dada por

$$|e_n| \le Mh^2/2, \tag{22}$$

onde M é o máximo de $|\phi''(t)|$ no intervalo $[a, b]$. Como a Eq. (22) é baseada no pior caso possível — ou seja, o maior valor possível de $|\phi''(t)|$ — essa pode ser uma estimativa bem maior do que o erro de truncamento local em certas partes do intervalo $[a, b]$. Um dos usos da Eq. (22) é escolher um tamanho de passo que resultará em um erro de truncamento local que não ultrapasse um nível de tolerância dado. Por exemplo, se o erro de truncamento local não pode ser maior do que ε, então, da Eq. (22), temos

$$h \le \sqrt{2\epsilon/M}. \tag{23}$$

A dificuldade básica em se usar a Eq. (21), (22) ou (23) reside na estimativa de $|\phi''(t)|$, ou M. No entanto, o fato central expresso por essas equações é que o erro de truncamento local é proporcional a h^2. Logo, se h for reduzido por um fator de 1/2, então o erro é reduzido por um fator de 1/4, e assim por diante.

O erro de truncamento global E_n é mais importante do que o erro de truncamento local. A análise para se estimar E_n é mais difícil do que a para e_n. Entretanto, conhecendo o erro de truncamento local podemos fazer uma estimativa *intuitiva* do erro de truncamento global em um ponto fixo $T > t_0$ como segue. Suponha que levamos n passos para ir de t_0 até $T = t_0 + nh$. Em cada passo o erro é no máximo $Mh^2/2$; logo, o erro em n passos é no máximo $nMh^2/2$. Notando que $n = (T - t_0)/h$, vemos que o erro de truncamento global para o método de Euler para se ir de t_0 até T é limitado por

$$n\frac{Mh^2}{2} = (T - t_0)\frac{Mh}{2}. \tag{24}$$

Esse argumento não está completo, pois não leva em consideração o efeito de um erro em um passo sobre os passos seguintes. De qualquer jeito, pode-se mostrar que o erro de truncamento global ao se usar o método de Euler em um intervalo finito não é maior do que uma constante vezes h; veja o Problema 23 para mais detalhes. O método de Euler é chamado de um método de primeira ordem porque seu erro de truncamento global é proporcional à primeira potência do tamanho do passo.

Por ser mais acessível, vamos usar daqui para a frente o erro de truncamento local como nossa medida principal da precisão de um método numérico e para comparar métodos diferentes. Se tivermos uma informação *a priori* sobre a solução do problema de valor inicial dado, podemos usar o resultado (21) para obter informação mais precisa sobre como o erro de truncamento local varia com t. Como exemplo, considere o problema ilustrativo

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1 \tag{25}$$

no intervalo $0 \le t \le 2$. Seja $y = \phi(t)$ a solução do problema de valor inicial (25). Então, como observado anteriormente,

$$\phi(t) = (4t - 3 + 19e^{4t})/16$$

e, portanto,

$$\phi''(t) = 19e^{4t}.$$

A Eq. (21) diz, então, que

$$e_{n+1} = \frac{19e^{4\bar{t}_n}h^2}{2}, \qquad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \tag{26}$$

O aparecimento do fator 19 e o crescimento rápido de e^{4t} explicam por que os resultados na Tabela 8.1.1 não foram muito precisos.

Por exemplo, para $h = 0{,}05$ o erro no primeiro passo é

$$e_1 = \phi(t_1) - y_1 = \frac{19e^{4\bar{t}_0}(0{,}0025)}{2}, \qquad 0 < \bar{t}_0 < 0{,}05.$$

É claro que e_1 é positivo e, como $e^{4\bar{t}_0} < e^{0,2}$, temos

$$e_1 \leq \frac{19e^{0,2}(0{,}0025)}{2} \cong 0{,}02901. \tag{27}$$

Note, também, que $e^{4\bar{t}_0} > 1$: logo, $e_1 > 19(0{,}0025)/2 = 0{,}02375$. O erro é, de fato, 0,02542. Segue da Eq. (26) que o erro piora progressivamente quando t aumenta; isso também é claro nos resultados que aparecem na Tabela 8.1.1. Cálculos semelhantes para cotas do erro de truncamento local dão

$$1.0617 \cong \frac{19e^{3,8}(0{,}0025)}{2} \leq e_{20} \leq \frac{19e^{4}(0.0025)}{2} \cong 1.2967 \tag{28}$$

para se ir de 0,95 para 1,0 e

$$57.96 \cong \frac{19e^{7,8}(0{,}0025)}{2} \leq e_{40} \leq \frac{19e^{8}(0.0025)}{2} \cong 70{,}80 \tag{29}$$

para se ir de 1,95 para 2,0.

Esses resultados indicam que para este problema o erro de truncamento local é em torno de 2500 vezes maior perto de $t = 2$ do que próximo a $t = 0$. Assim, para reduzir o erro de truncamento local a um nível aceitável em todo o intervalo $0 \leq t \leq 2$ é preciso escolher um tamanho de passo baseado na análise em uma vizinhança de $t = 2$. É claro que esse tamanho de passo será muito maior do que o necessário próximo a $t = 0$. Por exemplo, para se obter um erro de truncamento local de 0,01 para este problema precisamos de um tamanho de passo de em torno de 0,00059 próximo a $t = 2$ e de um tamanho de passo de aproximadamente 0,032 perto de $t = 0$. A utilização de um tamanho de passo uniforme que é menor do que o necessário em boa parte do intervalo resulta em mais cálculos do que necessário, mais tempo consumido e, possivelmente, mais perigo de erros de arredondamento inaceitáveis.

Outra abordagem é manter o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo do intervalo, reduzindo gradualmente o tamanho do passo à medida que t aumenta. No problema do exemplo precisaríamos reduzir h por um fator de mais ou menos 50 ao se ir de $t = 0$ para $t = 2$. Um método onde se varia o tamanho do passo é dito **adaptativo**. Todos os códigos computacionais modernos para se resolver equações diferenciais têm a capacidade de ajustar o tamanho do passo quando necessário. Voltaremos a essa questão na próxima seção.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$.

(a) Use o método de Euler com $h = 0{,}05$.

(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}025$.

(c) Use o método de Euler inverso com $h = 0{,}05$.

(d) Use o método de Euler inverso com $h = 0{,}025$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0{,}5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5$ e $2{,}0$.

(a) Use o método de Euler com $h = 0{,}025$.

(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}0125$.

(c) Use o método de Euler inverso com $h = 0{,}025$.

(d) Use o método de Euler inverso com $h = 0{,}0125$.

7. $y' = 0.5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$ 8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$

9. $y' = \sqrt{t+y}, \quad y(0) = 3$ 10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$

12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$

13. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.1.

14. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.2.

15. Usando três parcelas da série de Taylor dada na Eq. (12) e fazendo $h = 0{,}1$, determine valores aproximados da solução do exemplo ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ em $t = 0{,}1$ e $0{,}2$. Compare os resultados com os do método de Euler e com os valores exatos.

Sugestão: se $y' = f(t, y)$, o que é y''?

Nos Problemas 16 e 17, estime o erro de truncamento local para o método de Euler em termos da solução $y = \phi(t)$. Obtenha uma cota para e_{n+1} em termos de t e de $\phi(t)$ que seja válida no intervalo $0 \le t \le 1$. Usando uma fórmula para a solução, obtenha uma cota mais precisa para e_{n+1}. Para $h = 0{,}1$, calcule uma cota para e_1 e compare-a com o erro exato em $t = 0{,}1$. Calcule, também, uma cota para o erro e_4 no quarto passo.

16. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ 17. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$

Em cada um dos Problemas de 18 a 21, obtenha uma fórmula para o erro de truncamento local para o método de Euler em termos de t e da solução ϕ.

18. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$ 19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$

20. $y' = \sqrt{t+y}, \quad y(1) = 3$ 21. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

22. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \cos 5\pi t, \quad y(0) = 1.$$

(a) Determine a solução $y = \phi(t)$ e desenhe o gráfico de $y = \phi(t)$ para $0 \le t \le 1$.

(b) Determine valores aproximados para $\phi(t)$ em $t = 0{,}2; 0{,}4$ e $0{,}6$ usando o método de Euler com $h = 0{,}2$. Desenhe um gráfico com segmentos de reta para a solução aproximada e compare-o com o gráfico da solução exata.

(c) Repita o cálculo do item (b) para $0 \le t \le 0{,}4$ mas com $h = 0{,}1$.

(d) Mostre, através do cálculo do erro de truncamento local, que nenhum desses tamanhos de passos é suficientemente pequeno. Determine um valor de h que garanta que o erro de truncamento local é menor do que 0,05 ao longo do intervalo $0 \le t \le 1$. O fato de ser necessário um valor tão pequeno de h é consequência de o máx$|\phi''(t)|$ ser tão grande.

23. Vamos discutir, neste problema, o erro de truncamento global associado ao método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$. Supondo que as funções f e f_y são contínuas em uma região R fechada e limitada do plano ty que inclui o ponto (t_0, y_0), pode-se mostrar que existe uma constante L tal que $|f(t, y) - f(t, \tilde{y}| < L|y - \tilde{y}|$ onde (t, y) e $(t, \tilde{y})$ são dois pontos quaisquer em R com a mesma coordenada t (veja o Problema 15 da Seção 2.8). Além disso, vamos supor que f_t é contínua, de modo que a solução ϕ tem derivada segunda contínua.

(a) Usando a Eq. (20), mostre que

$$|E_{n+1}| \le |E_n| + h|f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)| + \tfrac{1}{2}h^2|\phi''(\bar{t}_n)| \le \alpha|E_n| + \beta h^2, \tag{i}$$

onde $\alpha = 1 + hL$ e $\beta = \text{máx}|\phi''(t)|/2$ em $t_0 \le t \le t_n$.

(b) Aceitando, sem demonstração, o fato de que se $E_0 = 0$ e se $|E_n|$ satisfaz a Eq. (i), então $|E_n| \le \beta h^2(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ para $\alpha \ne 1$, mostre que

$$|E_n| \le \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}\beta h. \tag{ii}$$

A Eq. (ii) fornece uma cota para $|E_n|$ em termos de h, L, n e β. Note que para um h fixo essa cota aumenta quando n aumenta, ou seja, o erro aumenta com a distância ao ponto inicial t_0.

(c) Mostre que $(1 + hL)^n \le e^{nhL}$; portanto,

$$|E_n| \le \frac{e^{nhL} - 1}{L}\beta h = \frac{e^{(t_n - t_0)L} - 1}{L}\beta h.$$

Para um ponto fixo $T = t_0 + nh$ [ou seja, nh é constante e $h = (T - t_0)/n$], essa cota para o erro é da forma uma constante vezes h e tende a zero quando $h \to 0$. Note, também, que para $nhL = (T - t_0)L$ pequeno o lado à direita do sinal de igualdade na equação precedente é aproximadamente igual a $nh^2\beta = (T - t_0)\beta h$, que foi obtido na Eq. (24) por um argumento intuitivo.

24. Deduza uma expressão análoga à Eq. (21) para o erro de truncamento local para a fórmula de Euler inversa. *Sugestão:* construa uma aproximação de Taylor apropriada de $\phi(t)$ em torno de $t = t_{n+1}$.

25. Usando um tamanho de passo $h = 0{,}05$ e o método de Euler, mas mantendo apenas três dígitos ao longo dos cálculos, determine valores aproximados para a solução em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$ para cada um dos problemas de valor inicial a seguir.

(a) $y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1$

(b) $y' = 3 + t - y, \qquad y(0) = 1$

(c) $y' = 2y - 3t, \qquad y(0) = 1$

Compare os resultados com os obtidos no Exemplo 1 e nos Problemas 1 e 3. As pequenas diferenças entre alguns dos resultados arredondados para três dígitos e os resultados atuais são devidas ao erro de arredondamento. O erro de arredondamento tornar-se-ia importante se os cálculos exigissem muitos passos.

26. O problema a seguir ilustra um perigo que ocorre devido ao erro de arredondamento quando números quase iguais são subtraídos e a diferença é multiplicada, então, por um número muito grande. Calcule a quantidade

$$1000 \cdot \begin{vmatrix} 6.010 & 18.04 \\ 2.004 & 6.000 \end{vmatrix}$$

da seguinte maneira:

(a) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para dois dígitos.

(b) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para três dígitos.

(c) Retenha todos os quatro dígitos. Compare este valor com os resultados dos itens (a) e (b).

27. A distributividade $a(b - c) = ab - ac$ não vale, em geral, se os produtos são arredondados para um número menor de dígitos. Para mostrar isso em um caso específico, faça $a = 0{,}22$, $b = 3{,}19$ e $c = 2{,}17$. Depois de cada multiplicação, arredonde retirando o último dígito.

8.2 Aprimoramentos no Método de Euler

Como para muitos problemas o método de Euler precisa de um tamanho de passo muito pequeno para se obter resultados suficientemente precisos, houve um grande esforço para se desenvolver métodos mais eficientes. Nas próximas três seções vamos discutir alguns desses métodos. Considere o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

e denote por $y = \phi(t)$ sua solução. Lembre da Eq. (10) da Seção 8.1 que, ao integrar uma equação diferencial dada de t_n até t_{n+1}, obtemos

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt. \tag{2}$$

A fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{3}$$

é obtida substituindo-se $f[t, \phi(t)]$ na Eq. (2) por seu valor aproximado $f(t_n, y_n)$ no extremo esquerdo do intervalo de integração.

Fórmula de Euler Aprimorada. Uma fórmula de aproximação melhor pode ser obtida se o integrando na Eq. (2) for aproximado de modo mais preciso. Um modo de fazer isso é aproximar o integrando pela média de seus valores nas duas extremidades, a saber, $\{f[t_n, \phi(t_n)] + f[t_{n+1}, \phi(t_{n+1})]\}/2$. Isso é equivalente a aproximar a área em baixo da curva na Figura 8.2.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$ pela área do trapézio sombreado. Além disso, substituímos $\phi(t_n)$ e $\phi(t_{n+1})$ pelos seus valores aproximados respectivos y_n e y_{n+1}. Dessa forma, obtemos, da Eq. (2),

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2} h. \tag{4}$$

Como a incógnita y_{n+1} aparece como um dos argumentos de f à direita do sinal de igualdade na Eq. (4), esta equação define y_{n+1} implicitamente, em vez de explicitamente. Dependendo da natureza da função f pode ser bem difícil resolver a Eq. (4) para y_{n+1}. Essa dificuldade pode ser sanada substituindo-se y_{n+1} à direita do sinal de igualdade na Eq. (4) pelo valor obtido usando-se a fórmula de Euler (3). Então,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)]}{2} h \\ &= y_n + \frac{f_n + f(t_n + h, y_n + hf_n)}{2} h, \end{aligned} \tag{5}$$

onde t_{n+1} foi substituído por $t_n + h$.

A Eq. (5) nos dá uma fórmula explícita para se calcular y_{n+1}, o valor aproximado de $\phi(t_{n+1})$, em função dos dados em t_n. Essa fórmula é conhecida como a **fórmula de Euler aprimorada** ou a **fórmula de Heun.**[1] A fórmula de Euler aprimorada é um exemplo de um método em duas etapas: primeiro calculamos $y_n + hf_n$ da fórmula de Euler e, depois, usamos esse resultado para calcular y_{n+1} da Eq. (5). A fórmula de Euler aprimorada (5) não representa uma melhoria sobre a fórmula (3), já que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (5) é proporcional a h^3, enquanto para o método de Euler é proporcional a h^2. Essa estimativa para o erro na fórmula de Euler aprimorada está provada no Problema 14. Pode-se mostrar, também, que para um intervalo finito o erro de truncamento global para a fórmula de Euler aprimorada é limitado por uma constante vezes h^2, de modo que esse método é de segunda ordem. Note que essa precisão maior é obtida à custa de mais trabalho computacional, já que agora é necessário calcular $f(t, y)$ duas vezes para se ir de t_n a t_{n+1}.

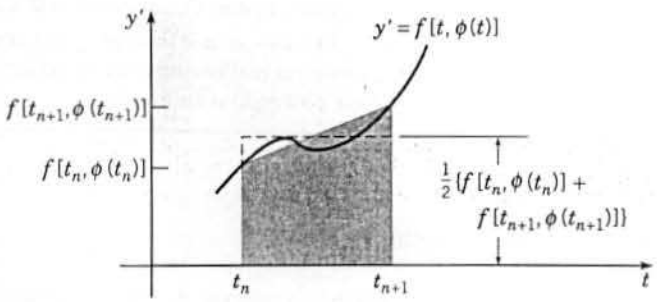


FIGURA 8.2.1 Dedução do método de Euler aprimorado.

Se $f(t, y)$ depender apenas de t e não de y, então a resolução da equação diferencial $y' = f(t, y)$ se reduzirá a integrar $f(t)$. Nesse caso, a fórmula de Euler aprimorada (5) fica

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_n + h)], \tag{6}$$

que é, simplesmente, a regra do trapézio para integração numérica.

EXEMPLO 1

Use a fórmula de Euler aprimorada (5) para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{7}$$

Para esclarecer exatamente quais cálculos são necessários, vamos mostrar alguns passos em detalhe. Para este problema, $f(t, y) = 1 - t + 4y$; logo,

$$f_n = 1 - t_n + 4y_n$$

e

$$f(t_n + h, y_n + hf_n) = 1 - (t_n + h) + 4(y_n + hf_n).$$

[1] A fórmula tem esse nome em homenagem a Karl Heun (1859-1929), professor da Technical University of Karlsruhe.

Além disso, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f_0 = 1 - t_0 + 4y_0 = 5$. Se $h = 0{,}025$, então

$$f(t_0 + h, y_0 + hf_0) = 1 - 0{,}025 + 4[1 + (0{,}025)(5)] = 5{,}475.$$

Portanto, da Eq. (5) temos

$$y_1 = 1 + (0{,}5)(5 + 5{,}475)(0{,}025) = 1{,}1309375. \tag{8}$$

No segundo passo, precisamos calcular

$$f_1 = 1 - 0{,}025 + 4(1{,}1309375) = 5{,}49875,$$

$$y_1 + hf_1 = 1{,}1309375 + (0{,}025)(5{,}49875) = 1{,}26840625,$$

e

$$f(t_2, y_1 + hf_1) = 1 - 0{,}05 + 4(1{,}26840625) = 6{,}023625.$$

Logo, da Eq. (5),

$$y_2 = 1{,}1309375 + (0{,}5)(5{,}49875 + 6{,}023625)(0{,}025) = 1{,}2749671875. \tag{9}$$

A Tabela 8.2.1 mostra outros resultados para $0 \le t \le 2$ obtidos usando-se o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ e $h = 0{,}01$. Para comparar os resultados do método de Euler aprimorado com os do método de Euler, note que o método de Euler aprimorado precisa de dois cálculos dos valores de f em cada passo, enquanto o método de Euler precisa só de um. Isso é importante, já que tipicamente a maior parte do tempo computacional de cada passo é gasto calculando-se os valores de f, de modo que contar essas operações é uma maneira razoável de se estimar o esforço computacional total. Então, para um tamanho de passo dado h o método de Euler aprimorado precisa do dobro dos cálculos de valores de f do método de Euler. De outro ponto de vista, o método de Euler aprimorado com tamanho de passo h necessita do mesmo número de cálculos de valores de f que o método de Euler com passo $h/2$.

TABELA 8.2.1 Uma Comparação dos Resultados Usando-se os Métodos de Euler e de Euler Aprimorado para o Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler		Euler Aprimorado		
t	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	Exata
0	1.0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1.5952901	1,6076289	1,6079462	1,6088585	1,6090418
0,2	2.4644587	2,5011159	2,5020618	2,5047827	2,5053299
0,3	3.7390345	3,8207130	3,8228282	3,8289146	3,8301388
0,4	5.6137120	5,7754845	5,7796888	5,7917911	5,7942260
0,5	8.3766865	8,6770692	8,6849039	8,7074637	8,7120041
1,0	60.037126	64,382558	64,497931	64,830722	64,897803
1,5	426.40818	473,55979	474,83402	478.51588	479,25919
2,0	3029.3279	3484,1608	3496,6702	3532,8789	3540,2001

Observando a Tabela 8.2.1 você pode ver que o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ dá resultados muito melhores do que o método de Euler com $h = 0{,}01$. Note que para alcançar $t = 2$ com esses tamanhos de passos o método de Euler aprimorado precisa de 160 cálculos de valores de f, enquanto o método de Euler precisa de 200. Mais importante de se notar é que o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ é ligeiramente mais preciso do que o método de Euler com $h = 0{,}001$ (2000 cálculos de valores de f). Em outras palavras, com algo da ordem de um doze avos do esforço computacional o método de Euler aprimorado fornece resultados para este problema comparáveis a, ou um pouco melhores do que, os gerados pelo método de Euler. Isso ilustra o fato de que comparado ao método de Euler o método de Euler aprimorado é claramente mais eficiente, gerando resultados substancialmente melhores ou precisando de muito menos esforço computacional total, ou ambos.

Os erros percentuais em $t = 2$ para o método de Euler aprimorado são de 1,22% para $h = 0{,}025$ e de 0,21% para $h = 0{,}01$.

Um programa de computador para o método de Euler pode ser imediatamente modificado para implementar o método de Euler aprimorado. Basta substituir o Passo 6 no algoritmo da Seção 8.1 pelo seguinte:

Passo 6.
$$k1 = f(t, y)$$
$$k2 = f(t + h, y + h * k1)$$
$$y = y + (h/2) * (k1 + k2)$$
$$t = t + h$$

Variação no Tamanho dos Passos. Mencionamos, na Seção 8.1, a possibilidade de ajustar o tamanho dos passos à medida que os cálculos prosseguem, de modo a manter o erro de truncamento local em um nível mais ou menos constante. O objetivo é não usar mais passos do que o necessário e, ao mesmo tempo, manter algum controle sobre a precisão das aproximações. Vamos descrever aqui como isso pode ser feito. Suponha que, após n passos, chegamos ao ponto (t_n, y_n). Escolhemos um tamanho de passo h e calculamos y_{n+1}. A seguir, estimamos o erro que fizemos ao calcular y_{n+1}. Sem conhecer a solução exata, o melhor que podemos fazer é usar um método mais preciso e repetir os cálculos a partir de (t_n, y_n). Por exemplo, se tivermos usado o método de Euler para o cálculo original poderíamos repetir com o método de Euler aprimorado. Então, a diferença entre os dois valores calculados é uma estimativa e_{n+1}^{est} do erro ao se usar o método original. Se o erro estimado é diferente da tolerância de erro ε, então ajustamos o tamanho do passo e repetimos o cálculo. A chave em fazer esse ajuste eficientemente é saber como o erro de truncamento local e_{n+1} depende do tamanho do passo h. Para o método de Euler o erro de truncamento local é proporcional a h^2, de modo que para trazer o erro estimado (diminuindo ou aumentando) ao nível de tolerância ϵ precisamos multiplicar o tamanho do passo original pelo fator $\sqrt{\epsilon / e_{n+1}^{\text{est}}}$.

Para ilustrar esse procedimento vamos considerar o problema (7) do exemplo

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1.$$

Você pode verificar que após um passo com $h = 0{,}1$ obtemos os valores 1,5 e 1,595 com os métodos de Euler e de Euler aprimorado, respectivamente. Logo, o erro estimado para o método de Euler é 0,095. Se tivermos escolhido uma tolerância de 0,05 para o erro, por exemplo, precisaríamos diminuir o tamanho do passo multiplicando-o pelo fator $\sqrt{0{,}05/0{,}095} \cong 0{,}73$. Arredondando para baixo para ser conservador, vamos escolher o tamanho de passo ajustado como sendo $h = 0{,}07$. Obtemos, então, da fórmula de Euler,

$$y_1 = 1 + (0{,}07) f(0, 1) = 1{,}35 \cong \phi(0{,}07).$$

Usando a fórmula de Euler aprimorada obtemos $y_1 = 1{,}39655$, de modo que o erro estimado ao se usar a fórmula de Euler é 0,04655, que é ligeiramente menor do que a tolerância especificada. O erro de fato, baseado em uma comparação com a solução exata, é um pouco maior, a saber, 0,05122.

Podemos seguir o mesmo procedimento em cada passo dos cálculos, mantendo assim o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo de todo o processo. Códigos modernos adaptativos para a resolução de equações diferenciais ajustam o tamanho do passo à medida que prosseguem de maneira bem semelhante a essa, embora usem, em geral, fórmulas mais precisas do que as de Euler e de Euler aprimorado. Em consequência, são ao mesmo tempo eficientes e precisos, usando passos muito pequenos apenas onde é realmente necessário.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e 0.4. Compare os resultados com os obtidos pelo método de Euler e pelo método de Euler inverso na Seção 8.1 e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}05$.

(b) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$.

(c) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}0125$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0{,}5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5$ e 2.0.

(a) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$.

(b) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}0125$.

7. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$
13. Complete os cálculos necessários para se obter os elementos nas colunas quatro e cinco da Tabela 8.2.1.
14. Neste problema vamos provar que o erro de truncamento local para a fórmula de Euler aprimorada é proporcional a h^3. Se supusermos que a solução ϕ do problema de valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ tem derivadas contínuas até a terceira ordem (f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas), segue que

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{\phi''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)}{3!}h^3,$$

onde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Suponha que $y_n = \phi(t_n)$.

(a) Mostre que, para y_{n+1} dado pela Eq. (5),

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

$$= \frac{\phi''(t_n)h - \{f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)] - f(t_n, y_n)\}}{2!}h + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)h^3}{3!}. \tag{i}$$

(b) Usando os fatos de que $\phi''(t) = f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t)$ e a aproximação de Taylor com resto para uma função $F(t, y)$ de duas variáveis é da forma

$$F(a + h, b + k) = F(a, b) + F_t(a, b)h + F_y(a, b)k + \frac{1}{2!}(h^2F_{tt} + 2hkF_{ty} + k^2F_{yy})\Big|_{x=\xi, y=\eta}$$

onde ξ está entre a e $a + h$ e η está entre b e $b + k$, mostre que o primeiro termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) é proporcional a h^3 mais termos de ordem maior. Esse é o resultado desejado.

(c) Mostre que, se $f(t, y)$ é linear em t e y, então $e_{n+1} = \phi'''(\bar{t}_n)h^3/6$, onde $t_n < \bar{t}_n < t_{n+1}$.

Sugestão: o que são f_{tt}, f_{ty} e f_{yy}?

15. Considere o método de Euler aprimorado para resolver o problema de valor inicial ilustrativo $y' = 1 - t + 4y, y(0) = 1$. Usando o resultado do problema 14(c) e a solução exata do problema de valor inicial, determine e_{n+1} e uma cota para o erro em qualquer passo em $0 \le t \le 2$. Compare esse erro com o obtido na Eq. (26) da Seção 8.1 usando o método de Euler. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0{,}05$ e compare com a Eq. (27) da Seção 8.1.

Em cada um dos Problemas 16 e 17, use a solução exata $\phi(t)$ para determinar e_{n+1} e uma cota para e_{n+1} em qualquer passo no intervalo $0 \le t \le 1$ para o método de Euler aprimorado para o problema de valor inicial dado. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0{,}1$ e compare com a estimativa semelhante para o método de Euler e com o erro exato usando o método de Euler aprimorado.

16. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
17. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$

Em cada um dos Problemas de 18 a 21, efetue um passo do método de Euler e do método de Euler aprimorado usando o tamanho de passo $h = 0{,}1$. Suponha que se deseja um erro de truncamento local não maior do que 0,0025. Estime o tamanho de passo necessário para o método de Euler satisfazer essa condição no primeiro passo.

18. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
20. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
21. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$
22. A **fórmula de Euler modificada** para o problema de valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$ é dada por

$$y_{n+1} = y_n + hf[t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hf(t_n, y_n)].$$

Seguindo o procedimento esquematizado no Problema 14, mostre que o erro de truncamento local na fórmula de Euler modificada é proporcional a h^3.

Em cada um dos Problemas de 23 a 26, use a fórmula de Euler modificada do Problema 22 com $h = 0{,}05$ para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$. Compare os resultados com os obtidos nos Problemas de 1 a 4.

23. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$ 24. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$

25. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$ 26. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$

27. Mostre que a fórmula de Euler modificada do Problema 22 é idêntica à fórmula de Euler aprimorada da Eq. (5) para $y' = f(t, y)$ se f é linear em t e y.

8.3 O Método de Runge-Kutta

Introduzimos, nas seções anteriores, a fórmula de Euler, a fórmula de Euler inversa e a fórmula de Euler aprimorada como maneiras de resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

numericamente. Os erros de truncamento locais para esses métodos são proporcionais a h^2, h^2 e h^3, respectivamente. Os métodos de Euler e de Euler aprimorado pertencem àquela que é conhecida hoje como a classe de métodos de Runge-Kutta.[2]

Nesta seção vamos discutir o método desenvolvido originalmente por Runge e Kutta. Esse método é chamado atualmente de método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem em quatro estágios, mas na prática as pessoas se referem a ele simplesmente como *o* método de Runge-Kutta, e seguiremos essa prática. Esse método tem um erro de truncamento local proporcional a h^5. Assim, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler aprimorado e três ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler. Ele é relativamente simples de usar e suficientemente preciso para tratar muitos problemas de maneira eficiente. Isso é particularmente verdadeiro para os métodos de Runge-Kutta adaptativos, nos quais se pode variar o tamanho dos passos quando necessário. Retornaremos a essa questão no final desta seção.

A fórmula de Runge-Kutta envolve uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \le t \le t_{n+1}$. É dada por

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6}\right), \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \\ k_{n3} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \tag{3}$$

A soma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ também pode ser interpretada como um coeficiente angular médio. Note que k_{n1} é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} é o coeficiente angular no ponto médio usando-se a fórmula de Euler para ir de t_n até $t_n + h/2$, k_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e k_{n4} é o coeficiente angular em $t_n + h$ usando a fórmula de Euler e o coeficiente angular k_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$.

Embora, em princípio, não seja difícil mostrar que a Eq. (2) difere da expansão de Taylor da solução ϕ por termos proporcionais a h^5, os cálculos algébricos são bem longos.[3] Vamos aceitar, então, o fato de que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (2) é proporcional a h^5 e que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é no máximo uma constante vezes h^4. A descrição anterior deste método como um método de quarta ordem em quatro estágios reflete os fatos de que o erro de truncamento global é de quarta ordem no tamanho do passo h e há quatro estágios intermediários nos cálculos (os cálculos de $k_{n1}, \ldots, k_{n4}$).

É claro que as fórmulas de Runge-Kutta, Eqs. (2) e (3), são mais complicadas que qualquer das fórmulas discutidas até agora. Isso não é muito importante, no entanto, já que não é difícil escrever um progra-

[2]Carl David Runge (1856-1927), matemático e físico alemão, trabalhou muitos anos em espectroscopia. A análise de dados o levou a considerar problemas em computação numérica, e o método de Runge-Kutta teve origem em seu artigo sobre soluções numéricas de equações diferenciais de 1895. O método foi estendido para sistemas de equações em 1901 por M. Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio.

[3]Veja, por exemplo, o Capítulo 3 do livro de Henrici, listado nas referências.

ma de computador que implemente esse método. Tal programa tem a mesma estrutura que o algoritmo para o método de Euler esquematizado na Seção 8.1. Especificamente, as linhas no Passo 6 no algoritmo de Euler têm que ser substituídas pelas seguintes:

Passo 6.
$$k1 = f(t, y)$$
$$k2 = f(t + 0{,}5 * h, y + 0{,}5 * h * k1)$$
$$k3 = f(t + 0{,}5 * h, y + 0{,}5 * h * k2)$$
$$k4 = f(t + h, y + h * k3)$$
$$y = y + (h/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$$
$$t = t + h$$

Note que, se f não depende de y, então

$$k_{n1} = f(t_n), \qquad k_{n2} = k_{n3} = f(t_n + h/2), \qquad k_{n4} = f(t_n + h), \tag{4}$$

e a Eq. (2) se reduz a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}[f(t_n) + 4f(t_n + h/2) + f(t_n + h)]. \tag{5}$$

A Eq. (5) pode ser identificada com a regra de Simpson[4] para o cálculo aproximado da integral de $y' = f(t)$. O fato de que a regra de Simpson tem um erro proporcional a h^5 é consistente com o erro de truncamento local na fórmula de Runge-Kutta.

EXEMPLO 1 Use o método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{6}$$

Fazendo $h = 0{,}2$, temos

$$k_{01} = f(0;1) = 5; \qquad hk_{01} = 1\,0,$$
$$k_{02} = f(0 + 0{,}1; 1 + 0{,}5) = 6{,}9; \qquad hk_{02} = 1{,}38,$$
$$k_{03} = f(0 + 0{,}1; 1 + 0{,}69) = 7{,}66; \qquad hk_{03} = 1{,}532,$$
$$k_{04} = f(0 + 0{,}2; 1 + 1{,}532) = 10{,}928.$$

Logo,

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}2}{6}[5 + 2(6{,}9) + 2(7{,}66) + 10{,}928]$$
$$= 1 + 1{,}5016 = 2{,}5016.$$

A Tabela 8.3.1 mostra outros resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$, $h = 0{,}1$ e $h = 0{,}05$. Note que o método de Runge-Kutta fornece um valor em $t = 2$ que difere da solução exata por apenas 0,122%,

TABELA 8.3.1 Uma Comparação dos Resultados para a Aproximação Numérica da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler Aprimorado	Runge–Kutta			Exata
t	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}2$	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6079462		1,6089333	1,6090338	1,6090418
0,2	2,5020618	2,5016000	2 5050062	2,5053060	2,5053299
0,3	3,8228282		3,8294145	3,8300854	3,8301388
0,4	5,7796888	5,7776358	5,7927853	5,7941197	5,7942260
0,5	8,6849039		8,7093175	8,7118060	8,7120041
1,0	64,497931	64,441579	64,858107	64,894875	64,897803
1,5	474,83402		478,81928	479,22674	479,25919
2,0	3496,6702	3490,5574	3535,8667	3539,8804	3540,2001

[4]A regra de Simpson leva esse nome em homenagem a Thomas Simpson (1710-1761), um matemático inglês e autor de livros-textos, que a publicou em 1743.

se o tamanho do passo é $h = 0{,}1$, e por apenas 0,00903% se $h = 0{,}05$. No último caso, o erro é menor do que uma parte em dez mil, e o valor calculado em $t = 2$ está correto até quatro dígitos.

Para efeitos de comparação, note que os métodos de Runge-Kutta, com $h = 0{,}05$, e o de Euler aprimorado, com $h = 0{,}025$, precisam de 160 cálculos de valores de f para chegar a $t = 2$. O método de Euler aprimorado fornece um resultado em $t = 2$ com erro de 1,23%. Embora esse erro possa ser aceitável para alguns fins, é mais de 135 vezes o erro feito pelo método de Runge-Kutta com esforço computacional comparável. Note, também, que o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$, ou 40 cálculos de valores de f produz um valor em $t = 2$ com erro de 1,40%, que é só ligeiramente maior do que o erro no método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$, que calcula 160 valores de f. Assim, vemos, de novo, que um algoritmo mais preciso é mais eficiente; produz melhores resultados com esforço semelhante, ou resultados análogos com menos esforço.

O método clássico de Runge-Kutta sofre dos mesmos defeitos que outros métodos com tamanho de passo fixo para problemas onde o erro de truncamento local varia muito no intervalo de interesse. Ou seja, um passo suficientemente pequeno para obter precisão satisfatória em algumas partes do intervalo pode ser muito menor do que o necessário em outras partes. Isso estimulou o desenvolvimento de métodos de Runge-Kutta adaptativos, que providenciam a modificação do tamanho do passo automaticamente à medida que procedem os cálculos, de modo a manter o erro de truncamento local próximo ou abaixo de um nível de tolerância especificado. Como explicado na Seção 8.2, isso requer a estimativa do erro de truncamento local em cada passo. Um modo de fazer isso é repetir os cálculos com um método de quinta ordem — que tem um erro de truncamento local proporcional a h^6 — e depois usar a diferença entre os dois resultados como uma estimativa para o erro. Se isso for feito de um modo direto o uso de um método de quinta ordem precisa de pelo menos mais cinco cálculos de f em cada etapa, além dos necessários originalmente pelo método de quarta ordem. No entanto, se fizermos uma escolha apropriada dos pontos intermediários e dos coeficientes de peso nas expressões para $k_{n1}, \ldots$ em um determinado método de Runge-Kutta de quarta ordem, então essas expressões podem ser usadas novamente, junto com um estágio adicional, em um método de quinta ordem correspondente. Isso resulta em um ganho substancial em eficiência. Acontece que isso pode ser feito de mais de uma maneira.

O primeiro par de métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens foi desenvolvido por Erwin Fehlberg[5] no final da década de 1960 e é conhecido como o método de Runge-Kutta-Fehlberg, ou método RKF.[6] A popularidade do método RKF foi consideravelmente aumentada pelo aparecimento, em 1977, de sua implementação RKF45 em Fortran por Lawrence F. Shampine e H. A. Watts. O método RKF e outros métodos de Runge-Kutta adaptativos são métodos muito poderosos e eficientes para a aproximação numérica de soluções de uma classe enorme de problemas de valor inicial. Implementações específicas de um ou mais deles estão disponíveis amplamente em pacotes comerciais de softwares.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1; 0{,}2; 0{,}3$ e $0{,}4$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}05$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-y}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0{,}5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5; 1{,}0; 1{,}5$ e $2{,}0$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos.

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}05$.

[5]Fehlberg (1911-1990) nasceu na Alemanha, recebeu seu doutorado da Technical University of Berlin em 1942, emigrou para os Estados Unidos depois da Segunda Guerra Mundial e trabalhou na NASA por muitos anos. O método de Runge-Kutta-Fehlberg foi publicado pela primeira vez em um Relatório Técnico da NASA em 1969.

[6]Os detalhes do método RKF podem ser encontrados, por exemplo, no livro de Ascher e Petzold e no de Mattheij e Molenaar, listados nas referências.

7. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$
13. Confirme os resultados na Tabela 8.3.1 efetuando os cálculos indicados.
14. Considere o problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

(a) Desenhe um campo de direções para essa equação.

(b) Use o método de Runge-Kutta ou outros métodos para encontrar valores aproximados da solução em $t = 0{,}8$; 0,9 e 0,95. Escolha um tamanho de passo suficientemente pequeno de modo que você acredite que seus resultados tenham precisão de, pelo menos, quatro dígitos.

(c) Tente estender os cálculos no item (b) para obter uma aproximação precisa da solução em $t = 1$. Se encontrar dificuldade em fazer isso, explique por que você acha que isso acontece. O campo de direções no item (a) pode ajudar.

15. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \qquad y(0) = 0.$$

(a) Desenhe um campo de direções para essa equação.

(b) Estime até onde a solução pode ser estendida para a direita. Seja t_M a extremidade direita do intervalo de existência dessa solução. O que acontece em t_M que impede a solução de continuar?

(c) Use o método de Runge-Kutta com diversos tamanhos de passos para encontrar um valor aproximado de t_M.

(d) Se você continuar os cálculos além de t_M, você pode continuar a gerar valores de y. Qual o significado (se há algum) desses valores?

(e) Suponha que a condição inicial é modificada para $y(0) = 1$. Repita os itens (b) e (c) para este problema.

8.4 Métodos de Passos Múltiplos

Discutimos, em seções anteriores, procedimentos numéricos para resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

no qual os dados no ponto t_n são usados para calcular um valor aproximado da solução $\phi(t_{n+1})$ no próximo ponto da partição $t = t_{n+1}$. Em outras palavras, o valor calculado ϕ em qualquer ponto da partição depende, apenas, dos dados no ponto anterior da partição. Tais métodos são chamados de **métodos de partida** ou **métodos de passo único**. Entretanto, uma vez obtidos valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ em alguns pontos além de t_0, é natural perguntar se podemos usar algumas dessas informações, em vez de só o valor no último ponto, para calcular o valor de $\phi(t)$ no próximo ponto. Especificamente, se são conhecidos y_1 em t_1, y_2 em t_2, ..., y_n em t_n, como podemos usar essa informação para determinar y_{n+1} em t_{n+1}? Métodos que utilizam informação em mais do que o último ponto da partição são conhecidos como **métodos de passos múltiplos**. Vamos descrever dois tipos de tais métodos nesta seção, os métodos de Adams[7] e as fórmulas inversas de diferenciação. Dentro de cada tipo podem-se obter níveis diversos de precisão, dependendo do número de pontos de dados utilizados. Por simplicidade, vamos supor ao longo de nossa discussão que o tamanho do passo h é constante.

Métodos de Adams. Lembre que

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\, dt, \tag{2}$$

[7]John Couch Adams (1819-1892), astrônomo inglês, é mais famoso pela sua descoberta, junto com Joseph Leverrier, do planeta Netuno em 1846. Adams era, também, extremamente habilidoso em cálculo; seu procedimento para integração numérica de equações diferenciais apareceu em 1883 em um livro de coautoria com Francis Bashforth sobre ação capilar.

onde $\phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial (1). A ideia básica de um método de Adams é aproximar $\phi'(t)$ por um polinômio $P_k(t)$ de grau k e usar o polinômio para calcular a integral na Eq. (2). Os coeficientes de $P_k(t)$ são determinados usando-se os $k+1$ dados calculados anteriormente. Por exemplo, suponha que queremos usar um polinômio de grau um $P_1(t) = At + B$. Precisamos, então, de dois pontos de dados apenas, (t_n, y_n) e (t_{n-1}, y_{n-1}). Como P_1 deve ser uma aproximação de ϕ', fazemos $P_1(t_n) = f(t_n, y_n)$ e $P_1(t_n) = f(t_{n-1}, y_{n-1})$. Lembre que denotamos $f(t_i, y_j)$ por f_j para j inteiro. Então, A e B têm que satisfazer as equações

$$\begin{aligned} At_n + B &= f_n, \\ At_{n-1} + B &= f_{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Resolvendo para A e B, obtemos

$$A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}, \qquad B = \frac{f_{n-1}t_n - f_n t_{n-1}}{h}. \tag{4}$$

Substituindo $\phi'(t)$ por $P_1(t)$ e calculando a integral na Eq. (2), vemos que

$$\phi(t_{n-1}) - \phi(t_n) = \frac{A}{2}(t_{n+1}^2 - t_n^2) + B(t_{n+1} - t_n).$$

Finalmente, substituímos $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ por y_{n+1} e y_n, respectivamente, e fazemos algumas simplificações algébricas. Para um tamanho de passo constante h, obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{3}{2}hf_n - \tfrac{1}{2}hf_{n-1}. \tag{5}$$

A Eq. (5) é a fórmula de Adams-Bashforth de segunda ordem. É uma fórmula explícita para y_{n+1} em função de y_n e y_{n-1}, e tem erro de truncamento local proporcional a h^3.

Observamos que a fórmula de Adams-Bashforth de primeira ordem, baseada no polinômio $P_0(t) = f_n$ de grau zero, é simplesmente a fórmula de Euler original.

Fórmulas de Adams mais precisas podem ser obtidas usando-se esse procedimento esquematizado, só que com um polinômio de ordem maior e um número correspondente maior de pontos. Por exemplo, suponha que está sendo usado um polinômio de grau três, $P_3(t)$. Os coeficientes são determinados pelos quatro pontos (t_n, y_n), (t_{n-1}, y_{n-1}), (t_{n-2}, y_{n-2}) e (t_{n-3}, y_{n-3}). Substituindo $\phi'(t)$ por esse polinômio na Eq. (2), calculando a integral e simplificando o resultado obtemos, finalmente, a fórmula de Adams-Bashforth de quarta ordem, a saber,

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \tag{6}$$

O erro de truncamento local para essa fórmula de quarta ordem é proporcional a h^5.

Uma variação na dedução das fórmulas de Adams-Bashforth fornece outro conjunto de fórmulas conhecido como as fórmulas de Adam-Moulton.[8] Para ver a diferença, vamos considerar novamente o caso de segunda ordem. Mais uma vez, usamos um polinômio de primeiro grau $Q_1(t) = \alpha t + \beta$, mas determinamos os coeficientes usando os pontos (t_n, y_n) e (t_{n+1}, y_{n+1}). Então, α e β satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha t_n + \beta &= f_n, \\ \alpha t_{n+1} + \beta &= f_{n+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

e segue que

$$\alpha = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}, \qquad \beta = \frac{f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n}{h}. \tag{8}$$

Substituindo $\phi'(t)$ na Eq. (2) por $Q_1(t)$ e simplificando, obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}hf_n + \tfrac{1}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \tag{9}$$

que é a fórmula de Adam-Moulton de segunda ordem. Escrevemos $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ na última parcela para enfatizar que a fórmula de Adam-Moulton é implícita, em vez de explícita, já que a incógnita y_{n+1} aparece nos dois lados da equação. O erro de truncamento local para a fórmula de Adam-Moulton de segunda ordem é proporcional a h^3.

A fórmula de Adam-Moulton de primeira ordem é simplesmente a fórmula de Euler inversa, como você poderia imaginar por analogia com a fórmula de Adams-Bashforth de primeira ordem.

---

[8]Forest Ray Moulton (1872-1952) foi um astrônomo e administrador científico americano. Enquanto calculava trajetórias balísticas durante a Primeira Guerra Mundial, fez melhorias substanciais na fórmula de Adams.

Fórmulas mais precisas de ordem mais alta podem ser obtidas usando-se um polinômio de maior grau. A fórmula de Adam-Moulton de quarta ordem, com um erro de truncamento local proporcional a h^5, é

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \tag{10}$$

Observe que essa é, também, uma fórmula implícita, já que y_{n+1} aparece em f_{n+1}.

Embora as fórmulas de Adams-Bashforth e de Adam-Moulton de mesma ordem tenham erros de truncamento local proporcionais à mesma potência de h, as fórmulas de Adam-Moulton de ordem não muito alta são, de fato, bem mais precisas. Por exemplo, para as fórmulas de quarta ordem (6) e (10) a constante de proporcionalidade para a fórmula de Adam-Moulton é menor do que 1/10 da constante de proporcionalidade para a fórmula de Adams-Bashforth. A pergunta natural é, então: deve-se usar a fórmula de Adams-Bashforth explícita (e mais rápida), ou a fórmula de Adam-Moulton, mais precisa, porém implícita (e mais lenta)? A resposta depende de, ao se usar a fórmula mais precisa, se poder aumentar o tamanho do passo, reduzindo o número de passos, de modo a compensar os cálculos adicionais que têm de ser feitos em cada passo.

De fato, analistas numéricos tentaram obter, ao mesmo tempo, simplicidade e precisão combinando as duas fórmulas no que é conhecido como o **método de previsão e correção**. Uma vez conhecidos y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1} e y_n, podemos calcular $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}$ e f_n, e depois usar a fórmula de Adams-Bashforth (6) (para a previsão) para obter um primeiro valor para y_{n+1}. Calculamos, então, f_{n+1} e usamos a fórmula de Adam-Moulton (10) (para a correção), que não é mais implícita, para obter um valor melhorado de y_{n+1}. Podemos, é claro, continuar a usar a fórmula de correção (10) se a mudança em y_{n+1} for muito grande. No entanto, se for necessário usar a fórmula de correção mais de uma, ou talvez duas vezes, isso significa que o tamanho do passo h está muito grande e deve ser reduzido.

Para se usar qualquer dos métodos de passos múltiplos é necessário calcular, primeiro, alguns y_i por outro método. Por exemplo, o método de Adam-Moulton de quarta ordem precisa de valores para y_1 e y_2, enquanto o método de Adams-Bashforth de quarta ordem precisa, também, de um valor para y_3. Um modo de proceder é usar um método de partida de precisão comparável para se calcular os valores iniciais necessários. Então, para um método de passos múltiplos de quarta ordem pode-se usar o método de Runge-Kutta para calcular os valores iniciais. Esse é o método utilizado no próximo exemplo.

Outra abordagem é usar um método de ordem baixa com um h bem pequeno para calcular y_1, e, depois, ir aumentando gradualmente tanto a ordem quanto o tamanho do passo até determinar um número suficiente de valores.

EXEMPLO 1

Considere, novamente, o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{11}$$

Com um tamanho de passo $h = 0{,}1$, determine um valor aproximado da solução $y = \phi(t)$ em $t = 0{,}4$ usando a fórmula de Adams-Bashforth de quarta ordem, a fórmula de Adam-Moulton de quarta ordem e o método de previsão e correção.

Para os dados iniciais, vamos usar os valores y_1, y_2 e y_3 obtidos pelo método de Runge-Kutta. Esses valores estão na Tabela 8.3.1. A seguir, calculamos os valores correspondentes de $f(t, y)$, obtendo

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & f_0 &= 5, \\ y_1 &= 1{,}6089333, & f_1 &= 7{,}3357332, \\ y_2 &= 2{,}5050062, & f_2 &= 10{,}820025, \\ y_3 &= 3{,}8294145, & f_3 &= 16{,}017658. \end{aligned}$$

Então, da fórmula de Adams-Bashforth, Eq. (6), vemos que $y_4 = 5{,}7836305$. O valor exato da solução em $t = 0{,}4$, correto até oito dígitos, é 5,7942260, de modo que o erro é $-0{,}010595$.

A fórmula de Adam-Moulton, Eq. (10), nos leva à equação

$$y_4 = 4{,}9251275 + 0{,}15y_4,$$

de onde segue que $y_4 = 5{,}7942676$, com um erro de apenas 0,0000416.

Finalmente, usando o resultado da fórmula de Adams-Bashforth como valor previsto para $\phi(0{,}4)$ podemos usar a Eq. (10) para correção. Correspondendo ao valor previsto de y_4, encontramos $f_4 = 23{,}734522$. Portanto, da Eq. (10), o valor correto de y_4 é 5,7926721. Isso resulta em um erro de $-0{,}0015539$.

Observe que o método de Adams-Bashforth é o mais simples e mais rápido desses métodos, já que envolve apenas o cálculo de uma única fórmula explícita. Também é o menos preciso. Usar a fórmula de Adam-Moulton para a correção aumenta a quantidade de cálculos, mas o método ainda é explícito. Neste exemplo, o erro no

valor corrigido de y_4 é reduzido por aproximadamente um fator de 7, quando comparado com o erro no valor previsto. O método de Adam-Moulton sozinho fornece o melhor resultado, de longe, com um erro em torno de 1/40 do erro do método de previsão e correção. Lembre-se, no entanto, de que a fórmula de Adam-Moulton é implícita, o que significa que é necessário resolver uma equação em cada passo. No problema considerado aqui essa equação é linear, logo a solução foi encontrada rapidamente, mas em outros problemas essa parte do procedimento pode levar muito mais tempo.

O método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$ fornece $y_4 = 5{,}7927853$, com um erro de $-0{,}0014407$; veja a Tabela 8.3.1. Assim, para esse problema o método de Runge-Kutta é comparável, em precisão, ao método de previsão e correção.

Fórmulas Inversas de Diferenciação. Outro tipo de método de passos múltiplos aparece quando se usa um polinômio $P_k(t)$ para se aproximar a solução $\phi(t)$ do problema de valor inicial (1), em vez de sua derivada $\phi'(t)$ como nos métodos de Adams. Diferenciamos, então, $P_k(t)$ e igualamos $P_k'(t_{n+1})$ a $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ para obter uma fórmula implícita para y_{n+1}. Essas são chamadas de **fórmulas inversas de diferenciação**. Esses métodos foram amplamente utilizados na década de 1970 devido ao trabalho de C. William Gear[9] nas chamadas equações diferenciais rígidas, cujas soluções são muito difíceis de serem aproximadas pelos métodos discutidos até agora; veja a Seção 8.5.

O caso mais simples usa um polinômio de primeiro grau $P_1(t) = At + B$. Os coeficientes são escolhidos de acordo com os valores da solução y_n e y_{n+1}. Assim, A e B têm que satisfazer

$$\begin{aligned} At_n + B &= y_n, \\ At_{n+1} + B &= y_{n+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Como $P_1'(t) = A$, a condição

$$P_1'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

é, simplesmente,

$$A = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{13}$$

Subtraindo a primeira das Eqs. (12) da segunda, obtemos outra expressão para A,

$$A = (y_{n-1} - y_n)/h.$$

Substituindo esse valor de A na Eq. (13) e rearrumando os termos, obtemos a fórmula inversa de diferenciação de primeira ordem

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{14}$$

Note que a Eq. (14) é simplesmente a fórmula de Euler inversa que vimos na Seção 8.1.

Usando polinômios de maior ordem e mais pontos de dados correspondentes, é possível obter fórmulas inversas de diferenciação de qualquer ordem. A fórmula de segunda ordem é

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{3}[4y_n - y_{n-1} + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})], \tag{15}$$

e a de quarta ordem é

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{25}[48y_n - 36y_{n-1} + 16y_{n-2} - 3y_{n-3} + 12hf(t_{n+1}, y_{n+1})]. \tag{16}$$

Essas fórmulas têm erros de truncamento local proporcionais a h^3 e h^5, respectivamente.

EXEMPLO 2

Use a fórmula inversa de diferenciação de quarta ordem com $h = 0{,}1$ e os dados do Exemplo 1 para determinar um valor aproximado da solução $y = \phi(t)$ em $t = 0{,}4$ para o problema de valor inicial (11).

Usando a Eq. (16) com $n = 3$, $h = 0{,}1$ e $y_0, \ldots, y_n$ dados no Exemplo 1, obtemos a equação

$$y_4 = 4{,}6837842 + 0{,}192y_4.$$

Logo,

$$y_4 = 5{,}7967626.$$

[9] C. William Gear (1935–), nascido em Londres, Inglaterra, fez sua graduação na Cambridge University e recebeu seu doutorado em 1960 na University of Illinois. Foi professor da University of Illinois durante a maior parte de sua carreira e fez contribuições importantes tanto para projetos de computador quanto em análise numérica. Seu importante livro sobre análise numérica para equações diferenciais está listado nas referências.

Comparando o valor calculado com o valor exato $\phi(0,4) = 5,7942260$, vemos que o erro é de 0,0025366. Isso é um pouco melhor do que o resultado obtido pelo método de Adams-Bashforth, mas não é tão bom quanto o obtido pelo método de previsão e correção, e está longe de ser tão bom quanto o resultado obtido pelo método de Adams-Moulton.

Uma comparação entre métodos de passo único e de passos múltiplos tem que levar em consideração diversos fatores. O método de Runge-Kutta de quarta ordem precisa de quatro cálculos de valores de f em cada passo, enquanto o método de Adams-Bashforth de quarta ordem (após os valores iniciais) precisa de apenas um, e o de previsão e correção, de apenas dois. Então, para um tamanho de passo h dado os dois últimos métodos podem ser bem mais rápidos do que o de Runge-Kutta. No entanto, se o método de Runge-Kutta é mais preciso e usa, portanto, menos passos, então a diferença em velocidade será reduzida e, talvez, eliminada. Para o método de Adam-Moulton e as fórmulas inversas de diferenciação é preciso levar em consideração, também, a dificuldade em se resolver a equação implícita em cada passo. Todos os métodos de passos múltiplos têm a possibilidade de que erros em passos anteriores possam ser realimentados em cálculos posteriores com consequências desfavoráveis. Por outro lado, as aproximações polinomiais subjacentes em métodos de passos múltiplos tornam fáceis as aproximações da solução em pontos fora da partição, caso isso seja desejável. Os métodos de passos múltiplos tornaram-se populares principalmente porque é relativamente fácil tanto estimar o erro em cada passo quanto ajustar a ordem e o tamanho do passo para controlá-lo. Para uma discussão mais profunda dessas questões, veja os livros citados no final deste capítulo; em particular, Shampine (1994) é uma fonte importante.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine um valor aproximado da solução em $t = 0,4$ e $t = 0,5$ usando o método especificado. Para os valores iniciais, use o método de Runge-Kutta; veja os Problemas de 1 a 6 na Seção 8.3. Compare os resultados dos vários métodos entre si e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de previsão e correção de quarta ordem com $h = 0,1$. Use a fórmula de correção uma vez em cada passo.

(b) Use o método de Adam-Moulton de quarta ordem com $h = 0,1$.

(c) Use o método inverso de diferenciação de quarta ordem com $h = 0,1$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0,5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, determine valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$, usando o método especificado. Para os valores iniciais, use os valores dados pelo método de Runge-Kutta; veja os Problemas de 7 a 12 na Seção 8.3. Compare os resultados dos vários métodos entre si e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de previsão e correção de quarta ordem com $h = 0,05$. Use a fórmula de correção uma vez em cada passo.

(b) Use o método de Adam-Moulton de quarta ordem com $h = 0,05$.

(c) Use o método inverso de diferenciação de quarta ordem com $h = 0,05$.

7. $y' = 0,5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0,5$
13. Mostre que o método de Adams-Bashforth de primeira ordem é o método de Euler e que o método de Adam-Moulton de primeira ordem é o método de Euler inverso.
14. Mostre que a fórmula de Adams-Bashforth de terceira ordem é

$$y_{n+1} = y_n + (h/12)(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}).$$

15. Mostre que a fórmula de Adam-Moulton de terceira ordem é

$$y_{n+1} = y_n + (h/12)(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

16. Deduza a fórmula inversa de diferenciação de segunda ordem dada pela Eq. (15) nesta seção.

8.5 Mais sobre Erros; Estabilidade

Na Seção 8.1 discutimos algumas idéias relacionadas a erros que podem ocorrer na solução numérica do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Vamos continuar essa discussão nesta seção e vamos mostrar, também, outras dificuldades que podem aparecer. Alguns dos pontos que queremos destacar são bem difíceis de tratar em detalhes e, portanto, serão ilustrados através de exemplos.

Erros de Truncamento e de Arredondamento. Lembre que mostramos, para o método de Euler, que o erro de truncamento local é proporcional a h^2 e que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é, no máximo, uma constante vezes h. Em geral, para um método de ordem p o erro de truncamento local é proporcional a h^{p+1} e o erro de truncamento global em um intervalo finito é limitado por uma constante vezes h^p. Para obter uma boa precisão usamos em geral um procedimento com p razoavelmente grande, talvez quatro ou mais. À medida que p aumenta a fórmula que se usa para calcular y_{n+1} vai ficando, em geral, mais complicada, sendo portanto necessários mais cálculos em cada passo; no entanto, isso não representa um problema sério, a menos que $f(t, y)$ seja muito complicada ou que se tenha que repetir os cálculos muitas vezes. Se o tamanho do passo h for diminuído, o erro de truncamento global diminui pelo mesmo fator elevado à potência p. Entretanto, como mencionamos na Seção 8.1, se h for muito pequeno serão necessários muitos passos para se cobrir um intervalo fixo e o erro de arredondamento global pode ser maior do que o erro de truncamento global. A Figura 8.5.1 ilustra essa situação graficamente. Supomos que o erro de arredondamento R_n é proporcional ao número de cálculos efetuados e, portanto, inversamente proporcional ao tamanho do passo h. Por outro lado, o erro de truncamento E_n é proporcional a uma potência positiva de h. Da Eq. (17) da Seção 8.1, sabemos que o erro total é limitado por $|E_n| + |R_n|$; logo, queremos escolher h de modo a minimizar essa quantidade. O valor ótimo de h ocorre quando a taxa de crescimento do erro de truncamento (quando h aumenta) é equilibrada pela taxa de decaimento do erro de arredondamento, como indicado na Figura 8.5.1.

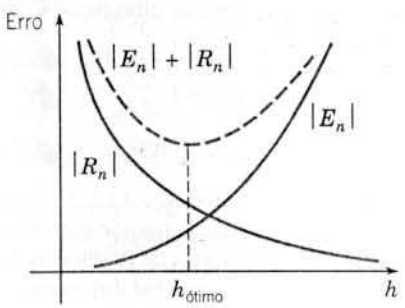


FIGURA 8.5.1 A dependência dos erros de truncamento e de arredondamento em relação tamanho do passo h.

EXEMPLO 1

Considere o problema

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

Usando o método de Euler com diversos tamanhos de passos, calcule valores aproximados para a solução $\phi(t)$ em $t = 0{,}5$ e $t = 1$. Tente determinar o tamanho de passo ótimo.

Mantendo apenas quatro dígitos para diminuir os cálculos, obtemos os dados da Tabela 8.5.1. As duas primeiras colunas correspondem ao tamanho do passo h e ao número de passos N necessários para se percorrer o intervalo $0 \le t \le 1$. Então, $y_{N/2}$ e y_N são aproximações de $\phi(0{,}5) = 8{,}712$ e de $\phi(1) = 64{,}90$, respectivamente. Essas quantidades aparecem na terceira e quinta colunas. A quarta e a sexta colunas mostram as diferenças entre os valores calculados e o valor exato da solução.

Para tamanhos de passos relativamente grandes, o erro de arredondamento é muito menor do que o erro de truncamento global. Em consequência, o erro total é aproximadamente igual ao erro de truncamento global, que é, para o método de Euler, limitado por uma constante vezes h. Assim, ao se reduzir o tamanho do passo o erro é reduzido proporcionalmente. As três primeiras linhas na Tabela 8.5.1 mostram esse tipo de comportamento. Para $h = 0{,}001$ o erro continua sendo reduzido, mas muito menos proporcionalmente; isso indica que

TABELA 8.5.1 Aproximações da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ Usando o Método de Euler com Tamanhos de Passos Diferentes

h	N	$y_{N/2}$	Erro	y_N	Erro
0,01	100	8,390	0,322	60,12	4,78
0,005	200	8,551	0,161	62,51	2,39
0,002	500	8,633	0,079	63,75	1,15
0,001	1000	8,656	0,056	63,94	0,96
0,0008	1250	8,636	0,076	63,78	1,12
0,000625	1600	8,616	0,096	64,35	0,55
0,0005	2000	8,772	0,060	64,00	0,90
0,0004	2500	8,507	0,205	63,40	1,50
0,00025	4000	8,231	0,481	56,77	8,13

o erro de arredondamento está se tornando importante. Ao se reduzir h ainda mais o erro começa a flutuar, e torna-se problemática a obtenção de melhorias significativas na precisão. Para valores de h menores do que 0,0005 o erro está claramente aumentando, o que indica que o erro de arredondamento é agora a parte dominante do erro total.

Esses resultados também podem ser expressos em termos do número de passos N. Para N menor do que algo em torno de 1000 a precisão pode ser melhorada usando-se mais passos, enquanto para N maior do que algo em torno de 2000 o aumento do número de passos tem o efeito contrário. Assim, para esse problema é melhor usar um N que esteja entre 1000 e 2000. Para os cálculos ilustrados na Tabela 8.5.1 o melhor resultado para $t = 0,5$ ocorre para $N = 1000$, enquanto o melhor resultado para $t = 1$ é para $N = 1600$.

Você deve tomar cuidado para não inferir coisas demais dos resultados mostrados no Exemplo 1. Os intervalos para os valores ótimos de h e N dependem da equação diferencial, do método numérico usado e do número de dígitos que são retidos nos cálculos. Apesar disso, é verdade em geral que se forem necessários passos demais em um cálculo, então provavelmente o erro de arredondamento vai acabar se acumulando a tal ponto que pode diminuir consideravelmente a precisão do procedimento. Isso não nos preocupa em muitos problemas: para eles, qualquer um dos métodos de quarta ordem discutidos nas Seções 8.3 e 8.4 produzirá bons resultados com um número de passos muito menor do que o que torna o erro de arredondamento importante. Para alguns problemas, no entanto, o erro de arredondamento torna-se de importância vital. Para tais problemas a escolha do método pode ser crucial. Essa é, também, uma boa razão pela qual códigos modernos fornecem modos de ajuste do tamanho do passo durante o procedimento, usando um tamanho de passo grande sempre que possível e um tamanho muito pequeno apenas onde necessário.

Assíntotas Verticais. Como segundo exemplo, considere o problema de determinar a solução $y = \phi(t)$ de

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

Como a equação diferencial é não linear, o teorema de existência e unicidade (Teorema 2.4.2) só garante que existe solução em *algum* intervalo em torno de $t = 0$. Suponha que tentamos calcular uma solução do problema de valor inicial no intervalo $0 \le t \le 1$ usando procedimentos numéricos diferentes.

Se usarmos o método de Euler com $h = 0,1$; 0,05 e 0,01, encontraremos os seguintes valores aproximados em $t = 1$: 7,189548; 12,32093 e 90,75551, respectivamente. As enormes diferenças entre os valores calculados são uma evidência convincente de que precisamos usar um método numérico mais preciso — o método de Runge-Kutta, por exemplo. Usando o método de Runge-Kutta com $h = 0,1$ obtemos o valor aproximado 735,0991 em $t = 1$, que é bem diferente dos obtidos pelo método de Euler. Repetindo os cálculos com $h = 0,05$ e $h = 0,01$, obtemos a informação interessante listada na Tabela 8.5.2.

Os valores em $t = 0,90$ são razoáveis, e poderíamos acreditar que a solução tem valor aproximado de 14,305 em $t = 0,90$. No entanto, não é claro o está acontecendo entre $t = 0,9$ e $t = 1,0$. Para ajudar a descobrir, vamos fazer algumas aproximações analíticas da solução do problema de valor inicial (3). Note que, em $0 \le t \le 1$,

$$y^2 \le t^2 + y^2 \le 1 + y^2. \tag{4}$$

Isso sugere que a solução $y = \phi_1(t)$ de

TABELA 8.5.2 Aproximações da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = t^2 + y^2, y(0) = 1$ Usando o Método de Runge-Kutta

h	$t = 0{,}90$	$t = 1{,}0$
0,1	14,02182	735,0991
0,05	14,27117	$1{,}75863 \times 10^{5}$
0,01	14,30478	$2{,}0913 \times 10^{2893}$
0,001	14,30486	

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

e a solução $y = \phi_2(t)$ de

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{6}$$

são cotas inferior e superior, respectivamente, para a solução $y = \phi(t)$ do problema original, já que todas essas soluções têm o mesmo valor no instante inicial. De fato, pode-se mostrar (pelo método de iteração da Seção 2.8, por exemplo) que $\phi_2(t) \le \phi(t) \le \phi_1(t)$ enquanto essas funções existirem. É importante observar que *podemos resolver* as Eqs. (5) e (6) para ϕ_1 e ϕ_2 por separação de variáveis. Encontramos

$$\phi_1(t) = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \phi_2(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{7}$$

Logo, $\phi_2(t) \to \infty$ quando $t \to 1$ e $\phi_1(t) \to \infty$ quando $t \to \pi/4 \approx 0{,}785$. Esses cálculos mostram que a solução do problema de valor inicial original existe pelo menos em $0 \le t < \pi/4$ e, no máximo, em $0 \le t < 1$. A solução do problema (3) tem uma assíntota vertical para algum t em $\pi/4 \le t \le 1$ e, portanto, não existe no intervalo inteiro $0 \le t \le 1$.

Nossos cálculos numéricos, no entanto, sugerem que podemos ir além de $t = \pi/4$ e, provavelmente, além de $t = 0{,}9$. Supondo que a solução do problema (3) existe em $t = 0{,}9$ e tem um valor aproximado de 14,305, podemos obter uma estimativa mais precisa do que acontece para valores maiores de t considerando os problemas de valor inicial (5) e (6) com a condição $y(0) = 1$ substituída por $y(0{,}9) = 14{,}305$. Obtemos, então,

$$\phi_1(t) = \tan(t + 0{,}60100), \qquad \phi_2(t) = 1/(0{,}96991 - t), \tag{8}$$

onde guardamos apenas cinco casas decimais. Logo, $\phi_1(t) \to \infty$ quando $t \to \pi/2 - 0{,}60100 \cong 0{,}96980$ e $\phi_2(t) \to \infty$ quando $t \to 0{,}96991$. Concluímos que a assíntota da solução do problema de valor inicial (3) está entre esses dois valores. Esse exemplo ilustra que tipo de informação pode ser obtido por uma combinação cuidadosa de métodos analíticos e numéricos.

Estabilidade. O conceito de estabilidade está associado à possibilidade de que pequenos erros introduzidos durante um procedimento matemático possam ser reduzidos à medida que o procedimento continua. Reciprocamente, ocorre instabilidade se pequenos erros tendem a aumentar, talvez sem limite. Por exemplo, identificamos na Seção 2.5 soluções de equilíbrio de uma equação diferencial como sendo (assintoticamente) estáveis ou instáveis, dependendo se as soluções inicialmente próximas à solução de equilíbrio tendem a se aproximar ou a se afastar dela quando t aumenta. De maneira um pouco mais geral, a solução de um problema de valor inicial é assintoticamente estável se soluções inicialmente próximas tendem a se aproximar da solução dada, e é assintoticamente instável se tendem a se afastar. Visualmente, em um problema assintoticamente estável os gráficos das soluções estão próximos, enquanto em um problema instável eles se separam.

Se estivermos resolvendo numericamente um problema de valor inicial, o melhor que podemos esperar é que a aproximação numérica tenha comportamento semelhante ao da solução exata. Não podemos transformar um problema instável em um estável simplesmente aproximando sua solução numericamente. No entanto, pode acontecer que um procedimento numérico introduza instabilidades que não faziam parte do problema original, o que pode causar problemas ao se aproximar a solução. Para evitar tais instabilidades pode ser necessário colocar restrições sobre o tamanho do passo h.

Para ilustrar o que pode acontecer no contexto mais simples possível, considere a equação diferencial

$$dy/dt = ry, \tag{9}$$

onde r é constante. Suponha que ao resolver essa equação chegamos ao ponto (t_n, y_n). Vamos comparar a solução exata da Eq. (9) que tem esse valor, a saber,

$$y = y_n \exp[r(t - t_n)], \tag{10}$$

com aproximações numéricas obtidas da fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{11}$$

e da fórmula inversa de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{12}$$

Da fórmula de Euler (11), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hry_n = y_n(1 + rh). \tag{13}$$

Analogamente, da fórmula inversa de Euler (12), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hry_{n+1},$$

ou

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - rh} = y_n[1 + rh + (rh)^2 + \cdots]. \tag{14}$$

Finalmente, calculando a solução (10) em $t_n + h$, encontramos

$$y_{n+1} = y_n \exp(rh) = y_n\left[1 + rh + \frac{(rh)^2}{2} + \cdots\right]. \tag{15}$$

Comparando as Eqs. (13), (14) e (15) vemos que os erros em ambas as fórmulas de Euler e inversa de Euler são da ordem de h^2, como previsto pela teoria.

Suponha agora que mudamos o valor de y_n para $y_n + \delta$. Se quiser, pode pensar em δ como sendo um erro acumulado até chegarmos a $t = t_n$. A questão é saber se esse erro aumenta ou diminui quando se dá mais um passo para t_{n+1}.

Para a solução exata (15) a mudança em y_{n+1} devida ao erro δ em y_n é simplesmente $\delta \exp(rh)$. Essa quantidade é menor do que δ se $\exp(rh) < 1$, ou seja, se $r < 0$. Isso confirma nossa conclusão no Capítulo 2 que a Eq. (9) é assintoticamente estável se $r < 0$ e instável se $r > 0$.

Para o método de Euler inverso, a variação em y_{n+1} na Eq. (14) devida ao erro δ é $\delta/(1 - rh)$. Para $r \leq 0$, essa quantidade é sempre negativa e nunca é maior do que 1. Então, se a equação diferencial for estável o método de Euler inverso também o é para um passo de tamanho arbitrário h.

Por outro lado, para o método de Euler a mudança em y_{n+1} na Eq. (13) devida ao erro δ é $\delta\,(1 + rh)$. Se lembrarmos que $r \leq 0$ e impusermos a condição $|1 + rh| \leq 1$, veremos que h terá que satisfazer $h \leq 2/|r|$. Logo, o método de Euler não é estável para esse problema, a menos que h seja suficientemente pequeno.

A restrição sobre o tamanho do passo h ao se usar o método de Euler no exemplo anterior é bem fraca, a não ser que $|r|$ seja muito grande. De qualquer jeito, o exemplo ilustra que pode ser necessário restringir h para se obter estabilidade no método numérico, mesmo quando o problema inicial é estável para todos os valores de h. Problemas para os quais é necessário um tamanho de passo muito menor para estabilidade do que para a precisão são chamados de **rígidos**. As fórmulas inversas de diferenciação descritas na Seção 8.4 (dentre as quais a fórmula inversa de Euler é o exemplo de menor ordem) são as fórmulas mais populares para tratar problemas rígidos. O exemplo a seguir ilustra o tipo de instabilidade que pode ocorrer ao se tentar aproximar a solução de um problema rígido.

EXEMPLO 2

Um Problema Rígido

Considere o problema de valor inicial

$$y' = -100y + 100t + 1, \qquad y(0) = 1. \tag{16}$$

Encontre aproximações numéricas para a solução em $0 \leq t \leq 1$ usando os métodos de Euler, de Euler inverso e de Runge-Kutta. Compare os resultados numéricos com a solução exata.

Como a equação diferencial é linear, é fácil de resolver, e a solução do problema de valor inicial (16) é

$$y = \phi(t) = e^{-100t} + t. \tag{17}$$

A segunda coluna da Tabela 8.5.3 mostra alguns valores da solução $\phi(t)$, corretos até seis casas decimais, e a Figura 8.5.2 mostra um gráfico da solução. Existe uma camada fina (algumas vezes chamada de camada limite) à direita de $t = 0$ na qual o termo exponencial é relevante e a solução varia rapidamente. Uma vez passada essa

camada, no entanto, $\phi(t) \cong t$ e o gráfico da solução é essencialmente uma reta. A largura da camada limite é um tanto arbitrária, mas é necessariamente pequena. Em $t = 0{,}1$, por exemplo, $\exp(-100t) \cong 0{,}000045$.

Se planejarmos aproximar a solução (17) numericamente poderíamos esperar, intuitivamente, que só é necessário um tamanho de passo pequeno na camada limite. Para tornar essa expectativa um pouco mais precisa, lembre-se, da Seção 8.1, de que os erros de truncamento global para os métodos de Euler e de Euler inverso são proporcionais a $\phi''(t)$. Para esse problema, $\phi''(t) = 10^4 e^{-100t}$, que varia de um valor de 10^4 em $t = 0$ para quase zero para $t > 0{,}2$. Logo, é necessário um tamanho de passo muito pequeno para se obter precisão perto de $t = 0$, mas um tamanho de passo muito maior é adequado quando t é um pouco maior.

Por outro lado, a análise de estabilidade das equações de (9) a (15) também se aplica a este problema. Como $r = -100$ para a Eq. (16), segue que precisamos de $h < 0{,}02$ para a estabilidade do método de Euler, mas não existe restrição correspondente para o método de Euler inverso.

TABELA 8.5.3 Aproximações Numéricas da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = -100y + 100t + 1, y(0) = 1$

t	Exata	Euler 0,025	Euler 0,0166...	Runge-Kutta 0,0333...	Runge-Kutta 0,025	Euler Inverso 0,1
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,05	0,056738	2,300000	−0,246296		0,470471	
0,1	0,100045	5,162500	0,187792	10,6527	0,276796	0,190909
0,2	0,200000	25,8289	0,207707	111,559	0,231257	0,208264
0,4	0,400000	657,241	0,400059	$1{,}24 \times 10^4$	0,400977	0,400068
0,6	0,600000	$1{,}68 \times 10^4$	0,600000	$1{,}38 \times 10^6$	0,600031	0,600001
0,8	0,800000	$4{,}31 \times 10^5$	0,800000	$1{,}54 \times 10^8$	0,800001	0,800000
1,0	1,000000	$1{,}11 \times 10^7$	1,000000	$1{,}71 \times 10^{10}$	1,000000	1,000000

As colunas 3 e 4 da Tabela 8.5.3 mostram alguns resultados usando o método de Euler. Os valores obtidos para $h = 0{,}025$ não servem devido à instabilidade, enquanto que os valores para $h = 0{,}01666...$ são razoavelmente precisos para $t \geq 0{,}2$. No entanto, pode-se obter precisão comparável para esse intervalo de t com $h = 0{,}1$ usando-se o método de Euler inverso, como mostram os resultados na coluna 7 da tabela.

A situação não melhora se usarmos, em vez do método de Euler, um método mais preciso, como o de Runge-Kutta. Para este problema o método de Runge-Kutta é instável para $h = 0{,}033...$, mas estável para $h = 0{,}025$, como mostram os resultados nas colunas 5 e 6 da Tabela 8.5.3.

Os resultados dados na tabela para $t = 0{,}05$ e $t = 0{,}1$ mostram que é preciso um tamanho de passo menor na camada limite para se obter uma aproximação precisa. O Problema 3 convida você a explorar mais essa questão.

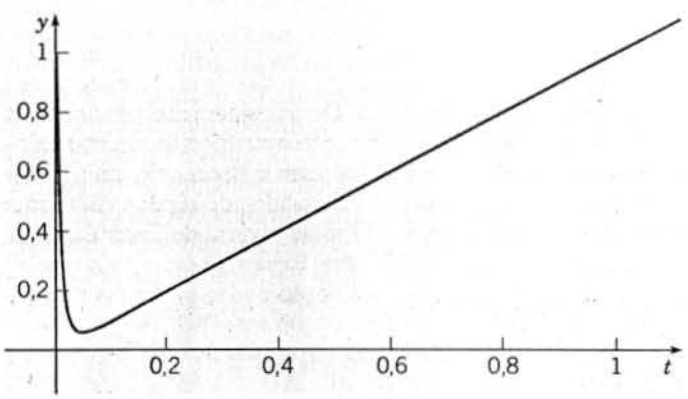


FIGURA 8.5.2 A solução do problema de valor inicial (16).

Como exemplo final, vamos considerar o problema de determinar duas soluções linearmente independentes da equação linear de segunda ordem

$$y'' - 10\pi^2 y = 0 \tag{18}$$

para $t > 0$. A generalização de técnicas numéricas, desenvolvidas para equações de primeira ordem, para equações de ordem maior ou para sistemas de equações será discutida na Seção 8.6, mas não precisamos

disso para essa discussão. Duas soluções linearmente independentes da Eq. (18) são $\phi_1(t) = \cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\phi_2(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{10}\pi t)$. A primeira solução, $\phi_1(t) = \cosh(\sqrt{10}\pi t)$, é gerada pelas condições iniciais $\phi_1(0) = 1, \phi_1'(0) = 0$; a segunda solução, $\phi_2(t) = \operatorname{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, é gerada pelas condições iniciais $\phi_2(0) = 0, \phi_2'(0) = \sqrt{10}\pi$. Embora, analiticamente, possamos ver a diferença entre $\cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\operatorname{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, para valores grandes de t temos $\cosh(\sqrt{10}\pi t)\ e^{\sqrt{10}\pi t} - e^{\sqrt{10}\pi t}/2$ e $\operatorname{senh}(\sqrt{10}\pi t) - e^{\sqrt{10}\pi t}/2$; numericamente, essas duas funções parecem exatamente iguais se mantivermos o mesmo número finito fixo de dígitos. Por exemplo, encontramos que para $t = 1$ os valores corretos com oito dígitos significativos são

$$\operatorname{senh}\sqrt{10}\pi = \cosh\sqrt{10}\pi = 10.315{,}894.$$

Se os cálculos forem feitos em uma máquina que trabalha com oito dígitos, as duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 são idênticas para $t = 1$ e, de fato, para $t > 1$. Logo, embora as duas soluções sejam linearmente independentes, seus valores numéricos mostrariam que elas são iguais, já que podemos manter apenas um número finito de dígitos. Esse fenômeno é chamado de **dependência numérica**.

Para o problema em pauta podemos evitar parcialmente essa dificuldade calculando, em vez de $\cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\operatorname{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, as soluções linearmente independentes $\phi_3 = e^{\sqrt{10}\pi t}$ e $\phi_4 = e^{-\sqrt{10}\pi t}$, correspondendo, respectivamente, às condições iniciais $\phi_3(0) = 1, \phi_3'(0) = \sqrt{10}\pi$ e $\phi_4(0) = 1$ e $\phi_4'(0) = -\sqrt{10}\pi$. A solução ϕ_3 cresce exponencialmente, enquanto que ϕ_4 decai exponencialmente. Mesmo assim, encontramos dificuldade para calcular ϕ_4 corretamente em um intervalo grande. A razão é que em cada passo do cálculo de ϕ_4 introduzimos erros de truncamento e de arredondamento. Logo, em qualquer ponto t_n os dados a serem usados para o próximo ponto não são precisamente os valores de $\phi_4(t_n)$ e de $\phi_4'(t_n)$. A solução do problema de valor inicial com esses dados em t_n não envolve só $e^{-\sqrt{10}\pi t}$, mas envolve também $e^{\sqrt{10}\pi t}$. Como o erro nos dados em t_n é pequeno, essa última função aparece com um coeficiente bem pequeno. De qualquer jeito, como $e^{-\sqrt{10}\pi t}$ tende a zero e $e^{\sqrt{10}\pi t}$ cresce rapidamente, esta última acaba dominando e a solução calculada é simplesmente um múltiplo de $e^{\sqrt{10}\pi t} = \phi_3$.

Especificamente, suponha que usamos o método de Runge-Kutta para calcular a solução $y = \phi_4(t) = e^{-\sqrt{10}\pi t}$ do problema de valor inicial

$$y'' - 10\pi^2 y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -\sqrt{10}\pi.$$

(O método de Runge-Kutta para sistemas de segunda ordem será descrito na Seção 8.6.) Usando aritmética de precisão simples (oito dígitos) com tamanho de passo $h = 0{,}01$, obtemos os resultados na Tabela 8.5.4. É evidente desses resultados que a solução numérica começa a ficar significativamente diferente da solução exata para $t > 0{,}5$, e logo difere dela por várias ordens de grandeza. A razão é a presença, na solução numérica, de uma pequena componente da solução que cresce exponencialmente $\phi_3 = e^{\sqrt{10}\pi t}$. Com aritmética de oito dígitos podemos esperar um erro de arredondamento da ordem de 10^{-8} em cada passo. Como $e^{\sqrt{10}\pi t}$ cresce por um fator de $3{,}7 \times 10^{21}$ de $t = 0$ até $t = 5$, um erro de 10^{-8} perto de $t = 0$ pode produzir um erro da ordem de 10^{13} em $t = 5$, mesmo que não sejam introduzidos outros erros nos cálculos intermediários. Os resultados dados na Tabela 8.5.4 mostram que isso é exatamente o que acontece.

TABELA 8.5.4 Solução exata de $y'' - 10\pi^2 y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -\sqrt{10}\pi$ e Aproximação Numérica Usando o Método de Runge-Kutta com $h = 0{,}01$

	y	
t	Numérica	Exata
0,0	1,0	1,0
0,25	$8{,}3439 \times 10^{-2}$	$8{,}3438 \times 10^{-2}$
0,5	$6{,}9623 \times 10^{-3}$	$6{,}9620 \times 10^{-3}$
0,75	$5{,}8409 \times 10^{-4}$	$5{,}8089 \times 10^{-4}$
1,0	$8{,}6688 \times 10^{-5}$	$4{,}8469 \times 10^{-5}$
1,5	$5{,}4900 \times 10^{-3}$	$3{,}3744 \times 10^{-7}$
2,0	$7{,}8852 \times 10^{-1}$	$2{,}3492 \times 10^{-9}$
2,5	$1{,}1326 \times 10^{2}$	$1{,}6355 \times 10^{-11}$
3,0	$1{,}6268 \times 10^{4}$	$1{,}1386 \times 10^{-13}$
3,5	$2{,}3368 \times 10^{6}$	$7{,}9272 \times 10^{-16}$
4,0	$3{,}3565 \times 10^{8}$	$5{,}5189 \times 10^{-18}$
4,5	$4{,}8211 \times 10^{10}$	$3{,}8422 \times 10^{-20}$
5,0	$6{,}9249 \times 10^{12}$	$2{,}6749 \times 10^{-22}$

Você deve ter em mente que os valores numéricos dos elementos na segunda coluna da Tabela 8.5.4 são extremamente sensíveis a pequenas variações no modo como os cálculos são executados. Independentemente desses detalhes, no entanto, o crescimento exponencial da aproximação ficará evidente.

A Eq. (18) é altamente instável, e o comportamento ilustrado nesse exemplo é típico de problemas instáveis. Podemos seguir precisamente a solução por um tempo e o intervalo pode ser estendido usando-se tamanhos menores de passos ou métodos mais precisos, mas finalmente a instabilidade no problema domina e leva a grandes erros.

Alguns Comentários sobre Métodos Numéricos. Introduzimos, neste capítulo, diversos métodos numéricos para se aproximar a solução de um problema de valor inicial. Tentamos enfatizar algumas ideias importantes mantendo, ao mesmo tempo, um nível razoável de complexidade. Um exemplo disso é que sempre usamos um tamanho de passo uniforme, mas a produção atual de códigos fornece maneiras de se mudar o tamanho do passo à medida que os cálculos prosseguem.

Existem diversas considerações que devem ser levadas em conta ao se escolher o tamanho do passo. É claro que um deles é a precisão; um tamanho de passo muito grande leva a um resultado impreciso. Normalmente é dada uma tolerância para o erro antecipadamente, e o tamanho do passo em cada etapa tem que ser consistente com essa tolerância. Como vimos, o tamanho do passo também tem que ser escolhido de modo que o método seja estável. Caso contrário, pequenos erros vão crescendo e logo tornam os resultados sem valor. Finalmente, para métodos implícitos é necessário resolver uma equação em cada passo, e o método usado para resolvê-la pode impor restrições adicionais sobre o tamanho do passo.

Ao escolher um método é preciso, também, equilibrar as questões de precisão e estabilidade com o tempo necessário para executar cada passo. Um método implícito, como o de Adam-Moulton, precisa de mais cálculos para cada passo, mas se sua precisão e sua estabilidade permitem um tamanho de passo maior (e, em consequência, menos passos), então isso pode mais do que compensar os cálculos adicionais. As fórmulas inversas de diferenciação de ordem moderada, quatro, por exemplo, são altamente estáveis e são, portanto, indicadas para problemas rígidos, para os quais a estabilidade é o fator controlador.

Alguns códigos atuais permitem, também, que se varie a ordem do método, além do tamanho do passo, à medida que se efetuam os cálculos. O erro é estimado em cada passo e a ordem e o tamanho do passo são escolhidos de modo a satisfazerem a tolerância de erro desejada. Na prática são utilizados os métodos de Adams até a ordem doze, e as fórmulas inversas de diferenciação até a ordem cinco. Fórmulas inversas de diferenciação de ordem mais elevada não são convenientes devido à falta de estabilidade.

Finalmente, observamos que a suavidade da função f — ou seja, o número de derivadas que ela tem — é um fator a ser considerado na escolha do método a ser usado. Métodos de ordem mais alta perdem alguma precisão se a função f não tem derivadas até uma ordem correspondente.

PROBLEMAS

1. Para obter alguma ideia dos perigos possíveis de pequenos erros nas condições iniciais, tais como os devidos a arredondamentos, considere o problema de valor inicial

$$y' = t + y - 3, \qquad y(0) = 2.$$

   (a) Mostre que a solução é $y = \phi_1(t) = 2 - t$.

   (b) Suponha que há um erro na condição inicial e é utilizado o valor 2,001 em vez de 2. Determine a solução $y = \phi_2(t)$ nesse caso e compare a diferença $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ em $t = 1$ e quando $t \to \infty$.

2. Considere o problema de valor inicial

$$y' = t^2 + e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{i}$$

Usando o método de Runge-Kutta com tamanho de passo h, obtemos os resultados na Tabela 8.5.5. Esses resultados sugerem que a solução tem uma assíntota vertical entre $t = 0{,}9$ e $t = 1{,}0$.

TABELA 8.5.5 Aproximações da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = t^2 + e^y$, $y(0) = 0$ Usando o Método de Runge-Kutta

h	$t = 0{,}90$	$t = 1{,}0$
0,02	3,42985	$> 10^{38}$
0,01	3,42982	$> 10^{38}$

(a) Seja $y = \phi(t)$ a solução do problema (i). Além disso, seja $y = \phi_1(t)$ a solução do problema

$$y' = 1 + e^y, \qquad y(0) = 0, \tag{ii}$$

e seja $y = \phi_2(t)$ a solução de

$$y' = e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{iii}$$

Mostre que

$$\phi_2(t) \le \phi(t) \le \phi_1(t) \tag{iv}$$

em algum intervalo contido em $0 \le t \le 1$ onde existem todas as três soluções.

(b) Determine $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$. Depois, mostre que $\phi(t) \to \infty$ para algum t entre $t = \ln 2 \cong 0{,}69315$ e $t = 1$.

(c) Resolva as equações diferenciais $y' = e^y$ e $y' = 1 + e^y$, respectivamente, com a condição inicial $y(0{,}9) = 3{,}4298$. Use os resultados para mostrar que $\phi(t) \to \infty$ quando $t \cong 0{,}932$.

3. Considere novamente o problema de valor inicial (16) do Exemplo 2. Investigue o quão pequeno tem que ser o tamanho do passo h para garantir que o erro em $t = 0{,}05$ e em $t = 0{,}1$ seja menor do que 0,0005.

(a) Use o método de Euler.

(b) Use o método de Euler inverso.

(c) Use o método de Runge-Kutta.

4. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -10y + 2.5t^2 + 0.5t, \qquad y(0) = 4.$$

(a) Encontre a solução $y = \phi(t)$ e desenhe seu gráfico para $0 \le t \le 5$.

(b) A análise de estabilidade no texto sugere que para este problema o método de Euler só é estável para $h < 0{,}2$. Confirme que isso é verdade aplicando o método de Euler a esse problema para $0 \le t \le 5$ com tamanhos de passos próximos de 0,2.

(c) Aplique o método de Runge-Kutta a este problema para $0 \le t \le 5$ com diversos tamanhos de passos. O que você pode concluir sobre a estabilidade desse método?

(d) Aplique o método de Euler inverso a este problema para $0 \le t \le 5$ com diversos tamanhos de passos. Qual o tamanho de passo necessário para que o erro em $t = 5$ seja menor do que 0,01?

Em cada um dos Problemas 5 e 6

(a) Encontre uma fórmula para a solução do problema de valor inicial e observe que ela é independente de λ.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}01$ para calcular valores aproximados da solução em $0 \le t \le 1$ para diversos valores de λ, como $\lambda = 1, 10, 20$ e 50.

(c) Explique as diferenças, se existirem, entre a solução exata e as aproximações numéricas.

5. $y' - \lambda y = 1 - \lambda t, \qquad y(0) = 0$

6. $y' - \lambda y = 2t - \lambda t^2, \qquad y(0) = 0$

8.6 Sistemas de Equações de Primeira Ordem

Nas seções anteriores discutimos métodos numéricos para aproximar a solução de problemas de valor inicial associados a uma equação de primeira ordem. Esses métodos também podem ser aplicados a sistemas de equações de primeira ordem. Como equações de ordem mais alta sempre podem ser reduzidas a um sistema de primeira ordem, basta tratar de sistemas de primeira ordem. Por simplicidade, vamos considerar um sistema com duas equações de primeira ordem

$$x' = f(t, x, y), \qquad y' = g(t, x, y), \tag{1}$$

com as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Vamos supor que as funções f e g satisfazem as condições do Teorema 7.1.1, de modo que o problema de valor inicial (1), (2) tem uma única solução em algum intervalo do eixo dos t contendo o ponto t_0. Queremos determinar valores aproximados $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ da solução $x = \phi(t), y = \psi(t)$ nos pontos $t_n = t_0 + nh$ com $n = 1, 2, \ldots$.

Em notação vetorial, o problema de valor inicial (1), (2) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor com coordenadas x e y, $\mathbf{f}$ é a função vetorial com coordenadas f e g, e $\mathbf{x}_0$ é o vetor com coordenadas x_0 e y_0. Os métodos das seções anteriores podem ser imediatamente generalizados para tratar sistemas de duas (ou mais) equações. Tudo que é necessário (formalmente) é substituir a variável escalar x pelo vetor $\mathbf{x}$ e a função escalar f pela função vetorial $\mathbf{f}$ nas equações apropriadas. Por exemplo, a fórmula de Euler torna-se

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}_n, \tag{4}$$

ou, em forma de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_n, x_n, y_n) \\ g(t_n, x_n, y_n) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

As condições iniciais são usadas para se determinar $\mathbf{f}_0$, que é o vetor tangente ao gráfico da solução $\mathbf{x} = \phi\ (t)$ no plano xy. Movemo-nos na direção desse vetor tangente por um período de tempo h para encontrar o próximo ponto $\mathbf{x}_1$. Aí calculamos um novo vetor tangente $\mathbf{f}_1$, movemo-nos ao longo dele por um período de tempo h para encontrar $\mathbf{x}_2$, e assim por diante.

De maneira análoga, o método de Runge-Kutta pode ser generalizado para sistemas. Para o passo de t_n para t_{n+1}, temos

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + (h/6)(\mathbf{k}_{n1} + 2\mathbf{k}_{n2} + 2\mathbf{k}_{n3} + \mathbf{k}_{n4}), \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{n1} &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_{n2} &= \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{x}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n1}], \\ \mathbf{k}_{n3} &= \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{x}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n2}], \\ \mathbf{k}_{n4} &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_{n3}). \end{aligned} \tag{7}$$

As fórmulas para o método de previsão e correção de Adam-Moulton aplicadas ao problema de valor inicial (1), (2) são dadas no Problema 9.

As equações vetoriais (3), (4), (6) e (7) são, de fato, válidas para qualquer número de dimensões. Basta interpretar os vetores como tendo n coordenadas em vez de duas.

EXEMPLO 1

Determine valores aproximados para a solução $x = \phi\ (t)$, $y = \psi\ (t)$ do problema de valor inicial

$$x' = x - 4y, \qquad y' = -x + y, \tag{8}$$

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \tag{9}$$

no ponto $t = 0{,}2$. Use o método de Euler com $h = 0.1$ e o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$. Compare os resultados com os valores da solução exata:

$$\phi(t) = \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2}, \qquad \psi(t) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{4}. \tag{10}$$

Vamos usar primeiro o método de Euler. Para esse problema, $f_n = x_n - 4y_n$ e $g_n = -x_n + y_n$; logo,

$$f_0 = 1 - (4)(0) = 1, \qquad g_0 = -1 + 0 = -1.$$

Então, das fórmulas de Euler (4) e (5), obtemos

$$x_1 = 1 + (0{,}1)(1) = 1{,}1, \qquad y_1 = 0 + (0{,}1)(-1) = -0{,}1.$$

No próximo passo,

$$f_1 = 1{,}1 - (4)(-0{,}1) = 1{,}5, \qquad g_1 = -1{,}1 + (-0{,}1) = -1{,}2.$$

Portanto,

$$x_2 = 1{,}1 + (0{,}1)(1{,}5) = 1{,}25, \qquad y_2 = -0{,}1 + (0{,}1)(-1{,}2) = -0{,}22.$$

Os valores da solução exata, corretos até oito dígitos, são $\phi\ (0{,}2) = 1{,}3204248$ e $\psi\ (0{,}2) = -0{,}25084701$. Logo, os valores calculados pelo método de Euler têm erros em torno de 0,0704 e 0,0308, respectivamente, correspondendo a erros percentuais próximos de 5,3% e 12,3%.

Vamos usar agora o método de Runge-Kutta para aproximar ϕ (0,2) e ψ (0,2). Com $h = 0{,}2$, obtemos os seguintes valores das Eqs. (7):

$$\mathbf{k}_{01} = \begin{pmatrix} f(1;0) \\ g(1;0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{02} = \begin{pmatrix} f(1{,}1;-0{,}1) \\ g(1{,}1;-0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{03} = \begin{pmatrix} f(1{,}15;-0{,}12) \\ g(1{,}15;-0{,}12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}63 \\ -1{,}27 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{04} = \begin{pmatrix} f(1{,}326;-0{,}254) \\ g(1{,}326;-0{,}254) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}342 \\ -1{,}580 \end{pmatrix}.$$

Então, substituindo esses valores na Eq. (6), obtemos

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0{,}2}{6}\begin{pmatrix} 9{,}602 \\ -7{,}52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3200667 \\ -0{,}25066667 \end{pmatrix}.$$

Esses valores de x_1 e y_1 têm erros em torno de 0,000358 e 0,000180, respectivamente, com erros percentuais menores do que um décimo de 1%.

Este exemplo ilustra, mais uma vez, a grande diferença de precisão obtida por métodos de aproximação mais precisos, como o de Runge-Kutta. Nos cálculos que indicamos acima o método de Runge-Kutta só precisa do dobro de cálculos do que o de Euler, mas o erro no método de Runge-Kutta é em torno de 200 vezes menor do que no método de Euler.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine valores aproximados da solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6; 0{,}8$ e $1{,}0$. Compare os resultados obtidos por métodos diferentes e tamanhos de passos diferentes.

(a) Use o método de Euler com $h = 0{,}1$.

(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$.

(c) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

1. $x' = x + y + t$, $y' = 4x - 2y$; $x(0) = 1$, $y(0) = 0$
2. $x' = 2x + ty$, $y' = xy$; $x(0) = 1$, $y(0) = 1$
3. $x' = -tx - y - 1$, $y' = x$; $x(0) = 1$, $y(0) = 1$
4. $x' = x - y + xy$, $y' = 3x - 2y - xy$; $x(0) = 0$, $y(0) = 1$
5. $x' = x(1 - 0{,}5x - 0{,}5y)$, $y' = y(-0{,}25 + 0{,}5x)$; $x(0) = 4$, $y(0) = 1$
6. $x' = \exp(-x + y) - \cos x$, $y' = \operatorname{sen}(x - 3y)$; $x(0) = 1$, $y(0) = 2$
7. Considere o problema do exemplo $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$ com condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Use o método de Runge-Kutta para aproximar a solução deste problema no intervalo $0 \le t \le 1$. Comece com $h = 0{,}2$ e depois repita os cálculos com $h = 0{,}1; 0{,}05; \ldots$, cada um com a metade do anterior. Continue o processo até os cinco primeiros dígitos da solução em $t = 1$ permanecerem constantes para tamanhos sucessivos de passos. Determine se esses dígitos são precisos comparando-os com a solução exata dada nas Eqs. (10) do texto.
8. Considere o problema de valor inicial

$$x'' + t^2x' + 3x = t, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Transforme este problema em um sistema de duas equações de primeira ordem e determine valores aproximados da solução em $t = 0{,}5$ e $t = 1{,}0$ usando o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

9. Considere o problema de valor inicial $x' = f(t,x,y)$ e $y' = g(t,x,y)$ com $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. A generalização do método de previsão e correção de Adam-Moulton da Seção 8.4 é

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}),$$

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}).$$

Determine um valor aproximado da solução em $t = 0{,}4$ para o problema de valor inicial do exemplo $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$ com $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Use $h = 0{,}1$. Corrija o valor previsto uma vez. Para os valores $x_1, \ldots, y_3$, use os valores da solução exata arredondados para seis dígitos: $x_1 = 1{,}12735$; $x_2 = 1{,}32042$; $x_3 = 1{,}60021$; $y_1 = -0{,}111255$; $y_2 = -0{,}250847$ e $y_3 = -0{,}429696$.

REFERÊNCIAS

Existem muitos livros, com níveis de sofisticação variáveis, que tratam de análise numérica em geral e da solução numérica de equações diferenciais ordinárias em particular. Entre eles estão

Ascher, Uri M., and Petzold, Linda R., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations* (Philadelphia: Society for Industrial andApplied Mathematics, 1998).

Gear, C. William, *Numerical InitialValue Problems in Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971).

Henrici, Peter, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations* (New York: Wiley, 1962).

Mattheij, Robert, and Molenaar, Jaap, *Ordinary Differential Equations in Theory and Practice* (NewYork: Wiley, 1996); (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002).

Shampine, Lawrence F., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* (NewYork: Chapman and Hall, 1994).

Uma exposição detalhada dos métodos de previsão e correção de Adam-Moulton, incluindo guias práticos para implementação, pode ser encontrada em

Shampine, L. F., and Gordon, M. K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem* (San Francisco: Freeman, 1975).

Muitos livros de análise numérica têm capítulos sobre equações diferenciais. Em um nível elementar, veja, por exemplo

Burden, R. L., and Faires, J. D., *Numerical Analysis* (7th ed.) (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2001).

CAPÍTULO

9

Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade

Existem muitas equações diferenciais, especialmente não lineares, que não são suscetíveis à solução analítica de algum modo razoavelmente conveniente. Métodos numéricos, como os discutidos no capítulo precedente, fornecem um modo de tratar essas equações. Outra abordagem, apresentada neste capítulo, tem caráter geométrico e nos leva a uma compreensão qualitativa do comportamento das soluções, em vez de informação quantitativa detalhada.

9.1 O Plano de Fase: Sistemas Lineares

Como muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas de maneira conveniente por métodos analíticos, é importante considerar que tipo de informação qualitativa[1] pode ser obtido sobre suas soluções sem resolver, de fato, as equações. As questões que vamos considerar neste capítulo estão relacionadas à ideia de estabilidade de uma solução, e os métodos que empregaremos são, basicamente, geométricos. Tanto o conceito de estabilidade quanto a utilização de análise geométrica foram introduzidos no Capítulo 1 e usados na Seção 2.5 para equações autônomas de primeira ordem

$$dy/dt = f(y). \tag{1}$$

Neste capítulo, vamos refinar essas ideias e estender a discussão a sistemas de equações.

Vamos começar com um dos sistemas mais simples, a saber, um sistema linear homogêneo de segunda ordem com coeficientes constantes. Tal sistema tem a forma

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{2}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante 2×2 e $\mathbf{x}$ é um vetor 2×1. Sistemas desse tipo foram resolvidos nas Seções 7.5 a 7.8. Lembre que, se procurarmos soluções da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, então, substituindo na Eq. (2), obtemos

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Logo, r tem que ser um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Os autovalores são as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{4}$$

e os autovetores são determinados pela Eq. (3) a menos de uma constante multiplicativa.

[1] A teoria qualitativa de equações diferenciais foi criada por Henri Poincaré (1854-1912) em diversos artigos importantes entre 1880 e 1886. Poincaré foi professor na Universidade de Paris e é considerado, geralmente, o matemático mais importante de seu tempo. Ele fez descobertas fundamentais em muitas áreas diferentes da matemática, incluindo teoria de funções complexas, equações diferenciais parciais e mecânica celeste. Iniciou o uso de métodos modernos em topologia em uma série de artigos a partir de 1894. Foi um pioneiro na utilização de séries assintóticas em equações diferenciais, uma das ferramentas mais poderosas da matemática aplicada contemporânea. Entre outras coisas, usou expansões assintóticas para obter soluções em torno de pontos singulares irregulares, estendendo o trabalho de Fuchs e Frobenius discutido no Capítulo 5.

Vimos, na Seção 2.5, que pontos onde a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (1) é nula têm importância especial. Tais pontos correspondem a soluções constantes, ou **soluções de equilíbrio**, da Eq. (1) e são chamados, muitas vezes, de **pontos críticos**. Analogamente, para o sistema (2) os pontos onde $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ correspondem a soluções de equilíbrio (constantes) e também são chamados de pontos críticos. Vamos supor que $\mathbf{A}$ é invertível, ou seja, que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Segue que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema (2).

Lembre que uma solução da Eq. (2) é uma função vetorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ que satisfaz a equação diferencial. Tal função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2. Ajuda, muitas vezes, olhar essa curva como um caminho, ou **trajetória**, percorrida por uma partícula em movimento cuja velocidade $d\mathbf{x}/dt$ é especificada pela equação diferencial. O plano x_1x_2 é chamado de **plano de fase**, e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de **retrato de fase**.

Ao analisar o sistema (2), precisamos considerar diversos casos, dependendo da natureza dos autovalores de $\mathbf{A}$. Isso também aconteceu nas Seções 7.5 a 7.8, onde estávamos interessados, basicamente, em encontrar uma fórmula conveniente para a solução geral. Nosso objetivo principal, agora, é caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico formado por suas trajetórias. Em cada caso, vamos discutir o comportamento das trajetórias em geral e ilustrá-lo com um exemplo. É importante que você se familiarize com os tipos de comportamento das trajetórias em cada caso, pois esses são os ingredientes básicos na teoria qualitativa de equações diferenciais.

CASO 1 **Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal.** A solução geral da Eq. (2) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2t}, \tag{5}$$

onde r_1 e r_2 são ambos positivos ou ambos negativos. Suponha, primeiro, que $r_1 < r_2 < 0$ e que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como ilustrado na Figura 9.1.1*a*. Segue da Eq. (5) que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$, independente dos valores de c_1 e c_2; em outras palavras, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem quando $t \to \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo t e tende à origem quando $t \to \infty$. Analogamente, se o ponto inicial pertence à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, então a solução tende à origem ao longo dessa reta. Na solução geral, é útil escrever a Eq. (5) na forma

$$\mathbf{x} = e^{r_2t}[c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{(r_1-r_2)t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}]. \tag{6}$$

Note que $r_1 - r_2 < 0$. Portanto, enquanto $c_2 \neq 0$, o termo $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}\exp[(r_1 - r_2)t]$ é desprezível comparado com $c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ para valores suficientemente grandes de t. Assim, quando $t \to \infty$, não só as trajetórias se aproximam da origem mas o fazem tendendo, também, à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Logo, todas as soluções tendem ao ponto crítico tangentes à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, exceto as que começam exatamente na reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. A Figura 9.1.1*a* mostra diversas trajetórias. Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão esboçados na Figura 9.1.1*b*, ilustrando o fato de que todas as soluções exibem decaimento exponencial no tempo. O comportamento de x_2 em função de t é semelhante. Esse tipo de ponto crítico é chamado de **nó**, ou **nó atrator**, ou **sorvedouro**.

Vamos agora olhar para trás no tempo e tentar descobrir o que acontece quando $t \to -\infty$. Ainda supondo que $r_1 < r_2 < 0$, observamos que, se $c_1 \neq 0$, então o termo dominante na Eq. (5) quando $t \to -\infty$ é o termo envolvendo e^{r_1t}. Logo, para grandes valores negativos de t, as trajetórias são quase paralelas ao autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, exceto para as trajetórias que se estendem através da reta $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Isto é indicado na Figura 9.1.1*a*.

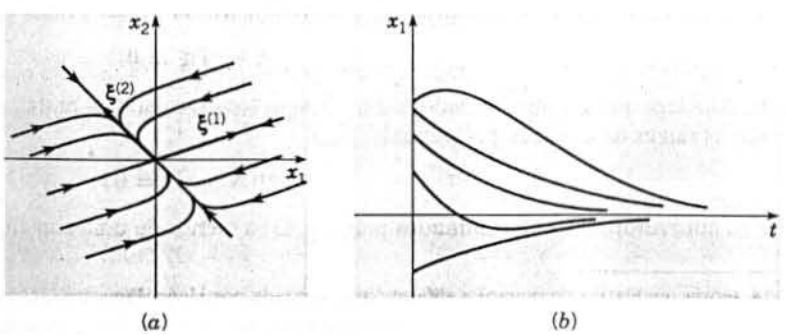


FIGURA 9.1.1 Um nó; $r_1 < r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

Se r_1 e r_2 são ambos positivos e $0 < r_2 < r_1$, então as trajetórias têm o mesmo padrão que na Figura 9.1.1*a*, exceto que o sentido do movimento é se afastando do ponto crítico na origem, em vez de se aproximando.

Nesse caso, x_1 e x_2 crescem exponencialmente como funções de t. O ponto crítico é chamado, novamente, de nó ou de **fonte**.

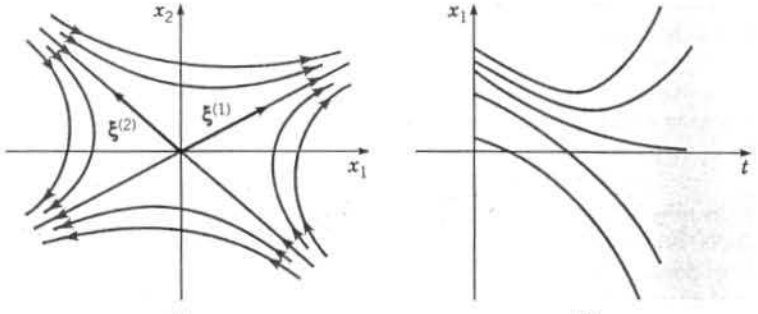
Vimos um exemplo de tal nó no Exemplo 2 da Seção 7.5, e suas trajetórias estão ilustradas na Figura 7.5.4.

CASO 2 **Autovalores Reais com Sinais Opostos.** A solução geral da Eq. (2) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}, \tag{7}$$

onde $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. Suponha que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como ilustrados na Figura 9.1.2*a*. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanece nessa reta para todo t e, como $r_1 > 0$, $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ quando $t \to \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, a situação é análoga, exceto que $\|\mathbf{x}\| \to 0$ quando $t \to \infty$, já que $r_2 < 0$. As soluções que começam em outros pontos iniciais seguem trajetórias semelhantes às da Figura 9.1.2*a*. A exponencial positiva é o termo dominante na Eq. (7) para t grande, de modo que todas essas soluções tendem a infinito assintoticamente à reta determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ correspondente ao autovalor positivo r_1. As únicas soluções que se aproximam do ponto crítico na origem são as que começam precisamente na reta determinada por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. A Figura 9.1.2*b* mostra alguns gráficos típicos de x_1 em função de t. Para determinadas condições iniciais a exponencial positiva está ausente da solução, de modo que $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$. Para todas as outras condições iniciais a exponencial positiva acaba dominando e faz com que x_1 torne-se ilimitada. O comportamento de x_2 é semelhante. Nesse caso, a origem é chamada de **ponto de sela**.

Um exemplo de um ponto de sela apareceu no Exemplo 1 da Seção 7.5, e suas trajetórias estão ilustradas na Figura 7.5.2.



(*a*) (*b*)

FIGURA 9.1.2 Um ponto de sela; $r_1 > 0, r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

CASO 3 **Autovalores Iguais.** Vamos supor agora que $r_1 = r_2 = r$. Vamos considerar o caso em que os autovalores são negativos; se forem positivos, as trajetórias são semelhantes, mas o movimento é em sentido contrário. Existem dois subcasos, dependendo se o autovalor repetido tem dois autovetores independentes ou apenas um.

(a) Dois autovetores independentes. A solução geral da Eq. (2) é

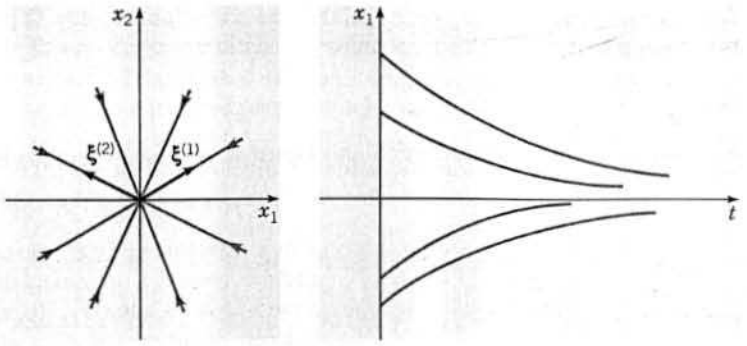
$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{rt} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{rt}, \tag{8}$$

onde $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são autovetores independentes. A razão x_1/x_2 é independente de t, mas depende das coordenadas de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2. Logo, toda trajetória está contida em uma reta contendo a origem, como ilustrado na Figura 9.1.3*a*. Gráficos típicos de x_1 ou x_2 em função de t aparecem na Figura 9.1.3*b*. O ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou, algumas vezes, de **ponto estrela**.

(b) Um autovetor independente. Como vimos na Seção 7.8, a solução geral da Eq. (2) nesse caso é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt} + c_2(\boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt}), \tag{9}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é o autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Para t grande, o termo dominante na Eq. (9) é $c_2\boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Assim, quando $t \to \infty$, todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção do autovetor. Isso é verdadeiro mesmo quando $c_2 = 0$, pois, nesse caso, a solução $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ pertence a essa reta. Analogamente, para valores negativos grandes de t o termo $c_2\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ é, novamente, dominante, de modo que, quando $t \to -\infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a $\boldsymbol{\xi}$.



(a) (b)

FIGURA 9.1.3 Um nó próprio, dois autovetores independentes; $r_1 = r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

A orientação das trajetórias depende das posições relativas de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Uma situação possível está ilustrada na Figura 9.1.4*a*. Para localizar as trajetórias, é melhor escrever a solução (9) na forma

$$\mathbf{x} = [(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t]e^{rt} = \mathbf{y}e^{rt}, \tag{10}$$

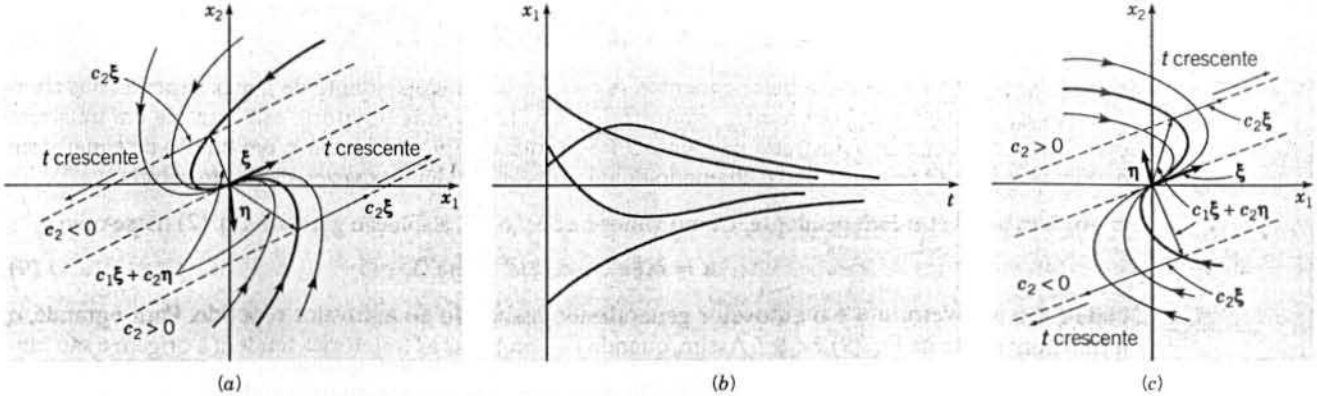
onde $\mathbf{y} = (c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$. Note que o vetor $\mathbf{y}$ determina a direção e o sentido de $\mathbf{x}$, enquanto a quantidade escalar e^{rt} afeta apenas o tamanho de $\mathbf{x}$. Observe, também, que para valores fixos de c_1 e c_2 a expressão para $\mathbf{y}$ é uma equação vetorial da reta contendo o ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ e paralela a $\boldsymbol{\xi}$.

Para esboçar a trajetória correspondente a um par dado de valores de c_1 e c_2, você pode proceder da seguinte maneira: primeiro, desenhe a reta dada por $(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$ e note o sentido do movimento quando t cresce nessa reta. A Figura 9.1.4*a* mostra duas dessas retas, uma para $c_2 > 0$ e outra para $c_2 < 0$. A seguir, observe que a trajetória dada passa pelo ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ quando $t = 0$. Além disso, quando t aumenta o vetor $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (10) tem o mesmo sentido de quando t aumenta na reta, mas o tamanho de $\mathbf{x}$ decresce rapidamente e tende a zero, devido ao fator exponencial decaindo e^{rt}. Finalmente, quando $t \to -\infty$ o sentido de $\mathbf{x}$ é determinado por pontos na parte correspondente da reta, e o tamanho de $\mathbf{x}$ tende a infinito. Dessa forma, obtemos as trajetórias mais grossas na Figura 9.1.4*a*. Algumas outras trajetórias mais finas estão esboçadas para ajudar a completar o diagrama. Gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Figura 9.1.4*b*.

Outra situação possível está ilustrada na Figura 9.1.4*c*, onde a orientação relativa de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ está invertida. Como indicado na figura, isso resulta em uma mudança de sentido na orientação das trajetórias.

Se $r_1 = r_2 > 0$, você pode esboçar as trajetórias seguindo o mesmo procedimento. Nesse caso, as trajetórias são percorridas no sentido para fora, e a orientação das trajetórias em relação a $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ também está invertida.

Quando um autovalor duplo tem um único autovetor independente, o ponto crítico é chamado de **nó impróprio** ou **degenerado**. Vimos um exemplo particular desse caso no Exemplo 2 na Seção 7.8; as trajetórias estão ilustradas na Figura 7.8.2.



(a) (b) (c)

FIGURA 9.1.4 Um nó impróprio, um autovetor independente; $r_1 = r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t. (*c*) O plano de fase.

CASO 4 **Autovalores Complexos.** Suponha que os autovalores são $\lambda \pm i\mu$, onde λ e μ são reais, $\lambda \neq 0$ e $\mu > 0$. É possível escrever a solução geral em termos dos autovalores e autovetores, como vimos na Seção 7.6. No entanto, vamos proceder de modo diferente.

Sistemas com autovalores $\lambda \pm i\mu$ são, tipicamente, da forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{11}$$

ou, em forma escalar,

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \qquad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \tag{12}$$

Vamos introduzir coordenadas polares r, θ dadas por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad \tan\theta = x_2/x_1.$$

Diferenciando essas equações, obtemos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \qquad (\sec^2\theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2. \tag{13}$$

Substituindo as Eqs. (12) na primeira das Eqs. (13), vemos que

$$r' = \lambda r, \tag{14}$$

e, portanto,

$$r = ce^{\lambda t}, \tag{15}$$

onde c é uma constante. Analogamente, substituindo as Eqs. (12) na segunda das Eqs. (13) e usando o fato de que $\sec^2\theta = r^2/x_1^2$, temos

$$\theta' = -\mu \tag{16}$$

Logo,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \tag{17}$$

onde θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$.

As Eqs. (15) e (17) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (11). Como $\mu > 0$, segue da Eq. (17) que θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Quando $t \to \infty$, vemos da Eq. (15) que $r \to 0$ se $\lambda < 0$ e que $r \to \infty$ se $\lambda > 0$. Então, as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal de λ. Ambas as possibilidades estão ilustradas na Figura 9.1.5, junto com alguns gráficos típicos de x_1 em função de

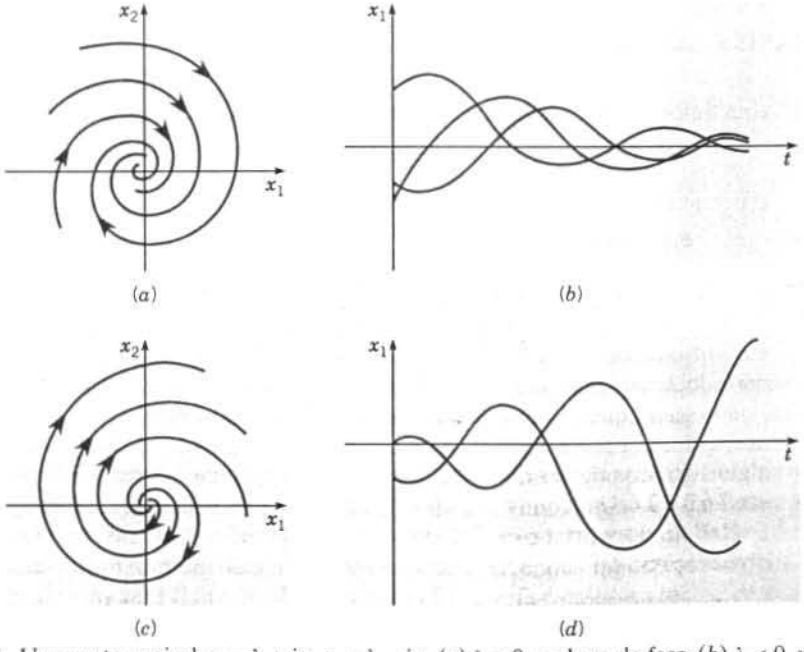


FIGURA 9.1.5 Um ponto espiral; $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$. (*a*) $\lambda < 0$, o plano de fase. (*b*) $\lambda < 0$, x_1 em função de t. (*c*) $\lambda > 0$, o plano de fase. (*d*) $\lambda > 0$, x_1 em função de t.

t. Os pontos críticos são chamados de **pontos espirais** nesse caso. Os termos **sorvedouro espiral** e **fonte espiral** são usados, frequentemente, para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se aproximam ou se afastam, respectivamente, do ponto crítico.

Mais geralmente, é possível mostrar que, para qualquer sistema com autovalores complexos $\lambda \pm i\mu$, onde $\lambda \neq 0$, as trajetórias são sempre espirais. Elas estão orientadas para dentro ou para fora, respectivamente, dependendo se o sinal de λ é negativo ou positivo. Podem ser alongadas e retorcidas em relação aos eixos coordenados, e o sentido do movimento pode ser horário ou trigonométrico. Embora uma análise detalhada seja moderadamente difícil, é fácil obter uma idéia geral da orientação das trajetórias diretamente das equações diferenciais. Suponha que o sistema

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

tem autovalores complexos $\lambda \pm i\mu$ e considere o ponto $(0, 1)$ no semieixo positivo dos y. Segue das Eqs. (18) que, nesse ponto, $dx/dt = b$ e $dy/dt = d$. Dependendo dos sinais de b e d, podemos inferir o sentido do movimento e a orientação aproximada das trajetórias. Por exemplo, se b e d forem negativos, então as trajetórias atravessarão o semieixo positivo dos y, descendo e entrando no segundo quadrante. Se, além disso, $\lambda < 0$, então as trajetórias têm que ser espirais direcionadas para o ponto crítico semelhantes às da Figura 9.1.6. Foi dado outro caso no Exemplo 1 da Seção 7.6, cujas trajetórias aparecem na Figura 7.6.2.

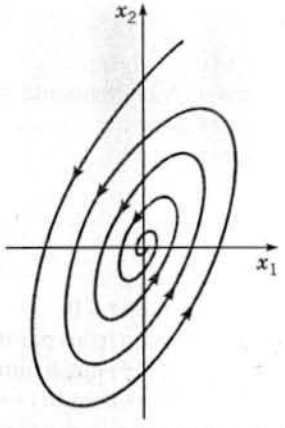


FIGURA 9.1.6 Um ponto espiral; $r = \lambda \pm i\mu$ com $\lambda < 0$.

CASO 5 **Autovalores Imaginários Puros.** Nesse caso, $\lambda = 0$ e o sistema (11) se reduz a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{19}$$

com autovalores $\pm i\mu$. Usando o mesmo argumento que no Caso 4, encontramos

$$r' = 0, \qquad \theta' = -\mu, \tag{20}$$

e, portanto,

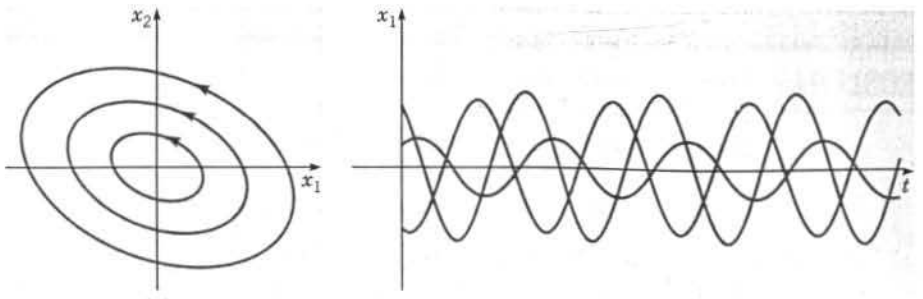
$$r = c, \qquad \theta = -\mu t + \theta_0, \tag{21}$$

onde c e θ_0 são constantes. Logo, as trajetórias são círculos centrados na origem, percorridos no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido trigonométrico se $\mu < 0$. Um circuito completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento $2\pi/\mu$, de modo que todas as soluções são periódicas com período $2\pi/\mu$. O ponto crítico é chamado de **centro**.

Em geral, quando os autovalores são imaginários puros é possível mostrar (veja o Problema 19) que as trajetórias são elipses centradas na origem. A Figura 9.1.7 mostra uma situação típica e inclui, também, alguns gráficos típicos de x_1 em função de t. Veja ainda o Exemplo 3 na Seção 7.6, especialmente as Figuras 7.6.3 e 7.6.4.

Refletindo sobre esses cinco casos e examinando as figuras correspondentes, podemos fazer diversas observações:

1. Depois de um longo período de tempo, cada trajetória individual exibe apenas um entre três tipos de comportamento. Quando $t \to \infty$, cada trajetória se aproxima do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou percorre, repetidamente, uma curva fechada (correspondente a uma solução periódica) em torno do ponto crítico, ou torna-se ilimitada.



(a) (b)

FIGURA 9.1.7 Um centro; $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

2. De um ponto de vista global, o padrão das trajetórias em cada caso é relativamente simples. Para ser mais específico, por cada ponto (x_0, y_0) no plano de fase passa uma única trajetória; assim, as trajetórias não se cruzam. Não interprete mal as figuras onde aparecem, à vezes, muitas trajetórias que parecem passar pelo ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De fato, a única solução que passa pela origem é a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Na verdade, as outras soluções que parecem passar pela origem apenas se aproximam desse ponto quando $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$.
3. Em cada caso, o conjunto de todas as trajetórias é tal que uma entre três situações ocorre.
   (a) Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Esse é o caso quando os autovalores são reais e negativos ou complexos com parte real negativa. A origem é um nó atrator ou um sorvedouro espiral.
   (b) Todas as trajetórias permanecem limitadas, mas não tendem à origem quando $t \to \infty$. Esse é o caso quando os autovalores são imaginários puros. A origem é um centro.
   (c) Algumas trajetórias e, possivelmente, todas as trajetórias exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendem a infinito quando $t \to \infty$. Esse é o caso se pelo menos um dos autovalores é positivo ou se os autovalores têm parte real positiva. A origem é um nó fonte, ou uma fonte espiral, ou um ponto de sela.

As situações descritas em 3(a), (b) e (c) ilustram os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade, respectivamente, da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (2). As definições precisas desses termos serão dadas na Seção 9.2, mas seus significados básicos devem estar claros da discussão geométrica feita nesta seção. A informação que obtivemos sobre o sistema (2) está resumida na Tabela 9.1.1. Veja, também, os Problemas 20 e 21.

TABELA 9.1.1 Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$ e $\det \mathbf{A} \neq 0$

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

A análise nesta seção se aplica apenas a sistemas de dimensão dois $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cujas soluções podem ser representadas geometricamente por curvas no plano de fase. Uma análise semelhante, porém mais complicada, pode ser feita para um sistema de dimensão n, com uma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ $n \times n$, cujas soluções são curvas em um espaço de fase de dimensão n. Os casos que podem ocorrer para sistemas de dimensão mais alta são, essencialmente, combinações do que vimos em duas dimensões. Por exemplo, em um sistema de dimensão três com um espaço de fase tridimensional uma possibilidade é que soluções em determinado plano sejam espirais se aproximando da origem, enquanto outras soluções podem tender a infinito ao longo de uma reta transversal a esse plano. Esse seria o caso se a matriz de coeficientes tivesse dois autovalores complexos com parte real negativa e um autovalor real positivo. No entanto, devido à sua complexidade, não discutiremos sistemas de dimensão maior do que dois.

PROBLEMAS

Para cada um dos Problemas de 1 a 12:

(a) Encontre os autovalores e autovetores.

(b) Classifique o ponto crítico (0, 0) em relação ao tipo e determine se é estável, assintoticamente estável ou instável.

(c) Esboce diversas trajetórias no plano de fase e esboce, também, alguns gráficos típicos de x_1 em função de t.

(d) Use um computador para fazer precisamente os gráficos pedidos no item (c).

1. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Em cada um dos Problemas de 13 a 16, determine o ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ e depois classifique seu tipo e examine sua estabilidade fazendo a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$.

13. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

17. A equação de movimento de um sistema mola-massa com amortecimento (veja a Seção 3.7) é

$$m\frac{d^2v}{dt^2} + c\frac{dv}{dt} + kv = 0,$$

onde m, c e k são positivos. Escreva essa equação de segunda ordem como um sistema de duas equações de primeira ordem para $x = u$, $y = du/dt$. Mostre que $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico e analise a estrutura e a estabilidade do ponto crítico em função dos parâmetros m, c e k. Uma análise semelhante pode ser aplicada à equação do circuito elétrico (veja a Seção 3.7)

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

18. Considere o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e suponha que $\mathbf{A}$ tem um autovalor nulo.

(a) Mostre que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico e que, além disso, todo ponto pertencente a uma determinada reta contendo a origem é, também, um ponto crítico.

(b) Sejam $r_1 = 0$ e $r_2 \neq 0$, e sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ os autovetores correspondentes. Mostre que as trajetórias são como indicadas na Figura 9.1.8. Qual o sentido do movimento nas trajetórias?

19. Neste problema, vamos indicar como mostrar que as trajetórias são elipses quando os autovalores são imaginários puros. Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{i}$$

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são imaginários puros se, e somente se,

$$a_{11} + a_{22} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{ii}$$

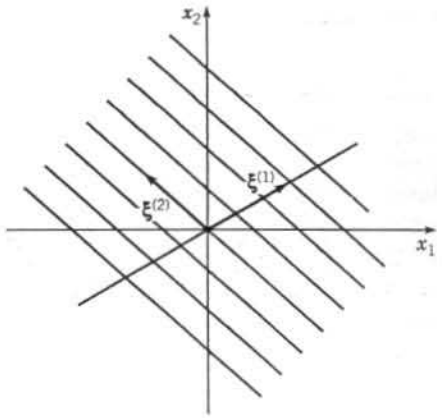


FIGURA 9.1.8 Pontos críticos não isolados; $r_1 = 0, r_2 \neq 0$. Todo ponto pertencente à reta contendo a origem e paralela a $\xi^{(1)}$ é um ponto crítico.

(b) As trajetórias do sistema (i) podem ser encontradas convertendo-se as Eqs. (i) em uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \tag{iii}$$

Use a primeira das Eqs. (ii) para mostrar que a Eq. (iii) é exata.

(c) Integrando a Eq. (iii), mostre que

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = k, \tag{iv}$$

onde k é uma constante. Use as Eqs. (ii) para concluir que o gráfico da Eq. (iv) é sempre uma elipse.

Sugestão: qual o discriminante da forma quadrática na Eq. (iv)?

20. Considere o sistema linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y,$$

onde $a_{11}, \ldots, a_{22}$ são constantes reais. Seja $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e $\Delta = p^2 - 4q$. Note que p e q são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz de coeficientes do sistema dado. Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é um

(a) nó se $q > 0$ e $\Delta \geq 0$;
(b) ponto de sela se $q < 0$;
(c) ponto espiral se $p \neq 0$ e $\Delta < 0$;
(d) centro se $p = 0$ e $q > 0$.

Sugestão: as conclusões podem ser obtidas estudando-se os autovalores r_1 e r_2; pode ajudar estabelecer, também, e depois usar, as relações $r_1r_2 = q$ e $r_1 + r_2 = p$.

21. Continuando o Problema 20, mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é

(a) assintoticamente estável se $q > 0$ e $p < 0$;
(b) estável se $q > 0$ e $p = 0$;
(c) instável se $q < 0$ ou $p > 0$.

Os resultados dos Problemas 20 e 21 estão resumidos visualmente na Figura 9.1.9.

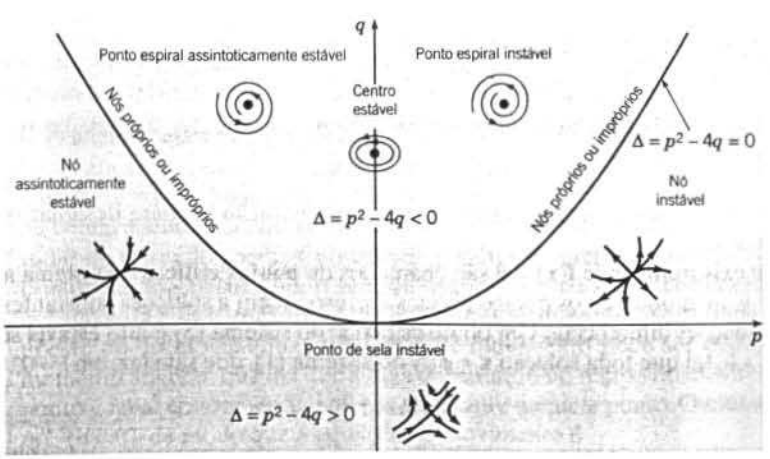


FIGURA 9.1.9 Diagrama de estabilidade.

9.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Nesta seção vamos começar a juntar e expandir as ideias geométricas introduzidas na Seção 2.5, para certas equações de primeira ordem, e na Seção 9.1, para sistemas de duas equações lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes. Essas ideias estão relacionadas ao estudo qualitativo de equações diferenciais e ao conceito de estabilidade, uma ideia que será definida precisamente mais adiante, ainda nesta seção.

Sistemas Autônomos. Vamos considerar sistemas com duas equações diferenciais simultâneas da forma

$$dx/dt = F(x,y), \qquad dy/dt = G(x,y). \tag{1}$$

Vamos supor que as funções F e G são contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano xy. Se (x_0, y_0) é um ponto nesse domínio, então, pelo Teorema 7.1.1, existe uma única solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do sistema (1) satisfazendo as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

A solução está definida em algum intervalo de tempo I que contém o ponto t_0.

Escreveremos, muitas vezes, o problema de valor inicial (1), (2) na forma vetorial

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{3}$$

onde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x,y)\mathbf{i} + G(x,y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$. Nesse caso, a solução é expressa como $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$, onde $\boldsymbol{\phi}(t) = \phi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$. Como de hábito, vamos interpretar a solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ como uma curva traçada por um ponto se movendo no plano xy, o plano de fase.

Observe que as funções F e G nas Eqs. (1) não dependem da variável independente t, mas apenas das variáveis dependentes x e y. Um sistema com essa propriedade é dito **autônomo**. O sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante 2×2, é um exemplo simples de um sistema autônomo bidimensional. Por outro lado, se um ou mais elementos da matriz de coeficientes forem uma função da variável independente t, então o sistema não é autônomo. A distinção entre sistemas autônomos e não autônomos é importante, porque a análise qualitativa geométrica desenvolvida na Seção 9.1 pode ser efetivamente estendida para sistemas autônomos em geral, mas não é tão útil para sistemas que não são autônomos.

Em particular, o sistema autônomo (1) tem um campo de direções associado que é independente do tempo. Em consequência, existe apenas uma trajetória passando por ponto (x_0, y_0) no plano de fase. Em outras palavras, todas as soluções que satisfazem uma condição inicial da forma (2) percorrem a mesma trajetória, independente do instante t_0 no qual elas estão em (x_0, y_0). Logo, como no caso do sistema linear com coeficientes constantes (4), um único retrato de fase mostra, simultaneamente, informação qualitativa importante sobre todas as soluções do sistema (1). Veremos esse fato confirmado repetidas vezes neste capítulo.

Sistemas autônomos ocorrem, com frequência, em aplicações. Fisicamente, um sistema autônomo é aqeule cuja configuração é independente do tempo, incluindo parâmetros físicos e forças ou efeitos externos. A resposta do sistema a condições iniciais dadas é independente, portanto, do instante em que as condições são impostas.

Estabilidade e Instabilidade. Os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade já foram mencionados diversas vezes neste livro. Está na hora de dar uma definição matemática precisa desses conceitos, pelo menos para sistemas autônomos da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Nas definições a seguir, e em outros lugares, usaremos a notação $\|\mathbf{x}\|$ para designar o comprimento, ou tamanho, do vetor $\mathbf{x}$.

Os pontos, se existirem, onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ são chamados de **pontos críticos** do sistema autônomo (5). Em tais pontos, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, de modo que os pontos críticos correspondem a soluções constantes, ou de equilíbrio, do sistema de equações diferenciais. Um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ do sistema (5) é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que toda solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema (1), que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta, \tag{6}$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$\|\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon \tag{7}$$

para todo $t \geq 0$. Isso está ilustrado geometricamente nas Figuras 9.2.1*a* e 9.2.1*b*. Essas proposições matemáticas dizem que todas as soluções que começam "suficientemente próximas" (ou seja, a uma distância menor do que δ) de $\mathbf{x}^0$ permanecem "próximas" (a uma distância menor do que ϵ) de $\mathbf{x}^0$. Note que, na Figura 9.2.1*a*, a trajetória está no interior do círculo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \delta$ em $t = 0$ e, embora saia logo desse círculo, permanece no interior do círculo $\|\mathbf{x} = \mathbf{x}^0\| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. No entanto, a trajetória da solução não precisa se aproximar do ponto crítico $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$, como ilustrado na Figura 9.2.1*b*. Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**.

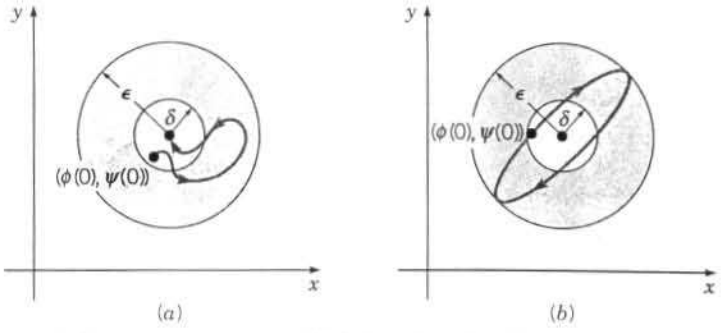


FIGURA 9.2.1 (*a*) Estabilidade assintótica. (*b*) Estabilidade.

Um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ é dito **assintoticamente estável** se é estável e se existe um δ_0, com $0 < \delta_0 < \delta$, tal que, se uma solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ satisfaz

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \tag{8}$$

então

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0. \tag{9}$$

Logo, as trajetórias que começam "suficientemente próximas" de $\mathbf{x}^0$ não apenas permanecem "próximas", mas têm que acabar tendendo a $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$. Esse é o caso para a trajetória na Figura 9.2.1*a*, mas não para a na Figura 9.2.1*b*. Note que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte do que a estabilidade, já que um ponto crítico tem que ser estável antes que possamos falar sobre se é ou não assintoticamente estável. Por outro lado, a condição limite (9), que é uma propriedade essencial para a estabilidade assintótica, sozinha não implica nem estabilidade simples. De fato, é possível construir exemplos nos quais todas as trajetórias tendem a $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$, mas para as quais $\mathbf{x}^0$ não é ponto crítico estável. Geometricamente, basta construir uma família de trajetórias com elementos que começam arbitrariamente próximos de $\mathbf{x}^0$, depois partem para uma distância arbitrariamente grande antes de, por fim, se aproximar novamente de $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$.

Neste capítulo vamos nos concentrar em sistemas de duas equações, mas as definições que acabamos de dar são independentes do tamanho do sistema. Se os vetores nas equações de (5) a (9) forem interpretados como de dimensão n, então as definições de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade também se aplicam a sistemas com n equações. Essas definições podem se tornar mais concretas ao serem interpretadas em termos de um problema físico específico.

O Pêndulo Oscilatório. Os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade podem ser facilmente visualizados em termos de um pêndulo oscilatório. Considere a configuração ilustrada na Figura 9.2.2, na qual uma massa m está presa a uma das extremidades de uma barra rígida, mas sem peso, de comprimento L. A outra extremidade da barra está pendurada na origem O, e a barra está livre para rodar no plano do papel. A posição do pêndulo é descrita pelo ângulo θ entre a barra e a direção vertical orientada para baixo, com o sentido trigonométrico sendo considerado positivo. A força gravitacional mg age para baixo, enquanto a força de amortecimento $c|d\theta/dt|$, onde c é positivo, tem sempre o sentido oposto ao do movimento. A equação de movimento pode ser deduzida, rapidamente, do princípio de momento angular, que diz que a taxa de variação no tempo do movimento angular em torno de qualquer ponto é igual ao momento da força resultante naquele ponto. O momento angular em torno da origem é $mL^2(d\theta/dt)$, de modo que a equação de movimento é

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL\frac{d\theta}{dt} - mgL\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{10}$$

Os fatores L e L sen θ à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) são os momentos relativos à força de atrito e à força gravitacional, respectivamente, enquanto os sinais de menos são devidos ao fato de que as duas forças tendem a fazer com que o pêndulo se mova no sentido horário (negativo). Você deveria verificar, como exercício, que a mesma combinação é obtida para as outras três possíveis combinações de sinais de θ e $d\theta/dt$.

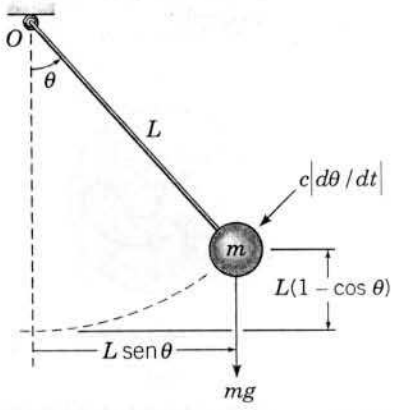


FIGURA 9.2.2 Um pêndulo oscilatório.

Efetuando algumas operações algébricas diretas, podemos escrever a Eq. (10) na forma canônica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \tag{11}$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\,\mathrm{sen}\,\theta = 0, \tag{12}$$

onde $\gamma = c/mL$ e $\omega^2 = g/L$. Para transformar a Eq. (12) em um sistema de duas equações de primeira ordem, fazemos $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$; então

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega^2\,\mathrm{sen}\,x - \gamma y. \tag{13}$$

Como γ e ω^2 são constantes, o sistema (13) é um sistema autônomo da forma (1).

Os pontos críticos da Eq. (13) são encontrados resolvendo-se as equações

$$y = 0, \qquad -\omega^2\,\mathrm{sen}\,x - \gamma y = 0.$$

Obtemos $y = 0$ e $x = \pm n\pi$, onde n é um inteiro. Esses pontos correspondem a duas posições físicas de equilíbrio, uma com a massa diretamente abaixo do suporte ($\theta = 0$) e a outra com a massa diretamente acima do suporte ($\theta = \pi$). Nossa intuição sugere que a primeira posição é estável, e a segunda, instável.

Mais precisamente, se a massa for ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio abaixo ela irá oscilar para a direita e para a esquerda com uma amplitude diminuindo gradualmente, até atingir a posição de equilíbrio quando a energia potencial inicial for dissipada pela força de amortecimento. Esse tipo de movimento ilustra a *estabilidade assintótica* e está ilustrado na Figura 9.2.3*a*.

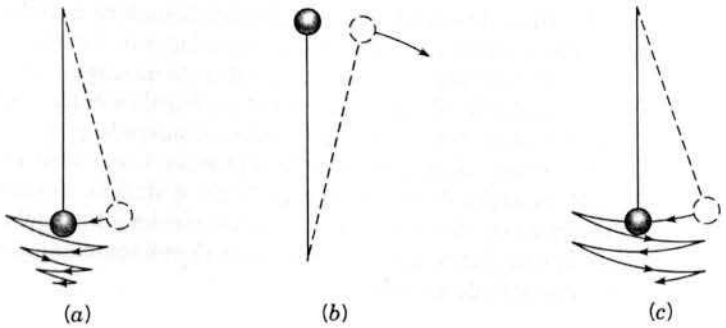


FIGURA 9.2.3 Movimento qualitativo de um pêndulo. (*a*) Com resistência do ar. (*b*) Com ou sem resistência do ar. (*c*) Sem resistência do ar.

Por outro lado, se a massa for ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio acima do suporte ela cai rapidamente, sob a influência da gravidade, e vai acabar chegando, também nesse caso, à outra posição de equilíbrio abaixo do suporte. Esse tipo de movimento ilustra a *instabilidade*. Veja a Figura 9.2.3*b*. Na prática, é impossível manter o pêndulo em sua posição de equilíbrio acima do suporte por qualquer período de tempo sem que haja um mecanismo que a segure, já que a mais leve perturbação fará com que a massa caia.

Finalmente, considere a situação ideal na qual o coeficiente de amortecimento c (ou γ) é nulo. Nesse caso, se a massa for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio abaixo do suporte, ela vai oscilar indefinidamente com amplitude constante em torno do ponto de equilíbrio. Como não há dissipação no sistema, a massa vai permanecer próxima à posição de equilíbrio, mas não vai tender a ela assintoticamente. Esse tipo de movimento é *estável*, mas não assintoticamente estável, como indicado na Figura 9.2.3*c*. Em geral, esse movimento é impossível de se obter experimentalmente, já que, por menor que seja a resistência do ar ou o atrito no ponto de suporte, isso fará com que, finalmente, o pêndulo atinja sua posição de repouso.

As soluções das equações do pêndulo serão discutidas em detalhe na próxima seção.

A Importância de Pontos Críticos. Pontos críticos correspondem a soluções de equilíbrio, ou seja, soluções para as quais $x(t)$ e $y(t)$ são constantes. Para tais soluções, o sistema descrito por x e y não varia: ele permanece em seu estado inicial para sempre. Pode parecer razoável concluir que tais pontos não são muito interessantes. Lembre-se, no entanto, de que para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ a natureza do ponto crítico na origem praticamente determina o comportamento das trajetórias no plano xy.

Para sistemas autônomos não lineares isso não é verdade por, pelo menos, duas razões. A primeira é porque podem existir muitos pontos críticos competindo para influenciar as trajetórias. A segunda é que as não linearidades do sistema também são importantes, especialmente longe dos pontos críticos. Apesar disso, pontos críticos de sistemas não lineares autônomos podem ser classificados da mesma forma que os sistemas lineares. Discutiremos os detalhes na Seção 9.3. Vamos ilustrar aqui como isso pode ser feito graficamente, supondo que você tenha um programa que possa construir campos de direção e fazer, talvez, o gráfico de aproximações numéricas boas de algumas trajetórias.

EXEMPLO 1

Considere o sistema

$$dx/dt = -(x - y)(1 - x - y), \qquad dy/dt = x(2 + y). \tag{14}$$

Encontre os pontos críticos para este sistema e desenhe campos de direção em retângulos contendo os pontos críticos. Inspecionando os campos de direção, classifique cada ponto crítico em relação ao tipo e diga se é assintoticamente estável, estável ou instável.

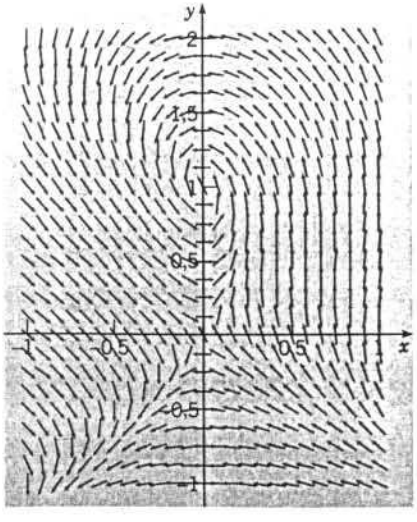


FIGURA 9.2.4 Campo de direções contendo (0, 0) e (0, 1).

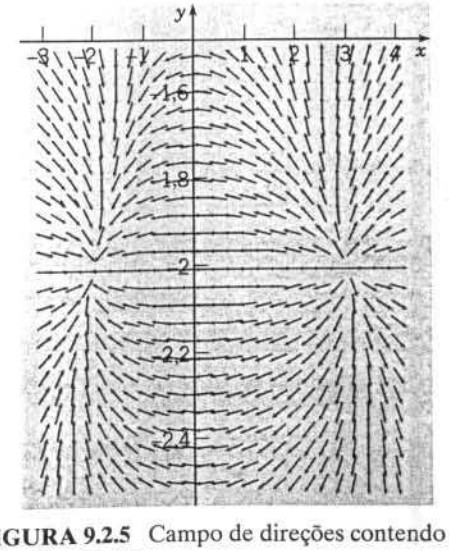


FIGURA 9.2.5 Campo de direções contendo (–2, –2) e (3, –2).

Os pontos críticos do sistema são encontrados resolvendo-se as equações algébricas

$$(x - y)(1 - x - y) = 0, \qquad x(2 + y) = 0. \tag{15}$$

Podemos satisfazer a segunda equação escolhendo $x = 0$. Então a primeira equação fica $y(1 - y) = 0$, de modo que $y = 0$ ou $y = 1$. Outras soluções podem ser encontradas escolhendo $y = -2$ na segunda equação. Então a primeira equação fica $(x + 2)(3 - x) = 0$, logo $x = -2$ ou $x = 3$. Obtemos assim os quatro pontos críticos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, -2)$ e $(3, -2)$.

A Figura 9.2.4 mostra um campo de direções contendo os dois primeiros pontos críticos. Comparando-a com as figuras na Seção 9.1 e no Capítulo 7, deve ficar claro que a origem é um ponto de sela e $(0, 1)$ é um ponto espiral. É claro que o ponto de sela é instável. As trajetórias próximas ao ponto espiral parecem estar se aproximando do ponto, de modo que concluímos que ele é assintoticamente estável. Um campo de direções para os outros dois pontos críticos aparece na Figura 9.2.5. Cada um deles é um nó. As setas apontam na direção do ponto $(-2, -2)$ e em direção oposta ao ponto $(3, -2)$; concluímos que o primeiro é assintoticamente estável e o segundo é instável.

Para um sistema autônomo de dimensão dois com pelo menos um ponto crítico assintoticamente estável é de interesse, muitas vezes, determinar onde estão as trajetórias que se aproximam do ponto crítico no plano de fase. Seja P um ponto no plano xy tal que uma trajetória passando por P acaba tendendo ao ponto crítico quando $t \to \infty$. Então dizemos que essa trajetória é atraída pelo ponto crítico. Além disso, o conjunto de todos os pontos P com essa propriedade é chamado de **bacia de atração** ou **região de estabilidade assintótica** do ponto crítico. Uma trajetória que limita uma bacia de atração é chamada de **separatriz**, já que separa as trajetórias que tendem a um ponto crítico particular de outras trajetórias que não têm essa propriedade. A determinação das bacias de atração é importante para a compreensão do comportamento em escala grande das soluções de um sistema autônomo.

EXEMPLO 2 Considere, novamente, o sistema (14) do Exemplo 1. Descreva a bacia de atração de cada um dos pontos críticos assintoticamente estáveis.

A Figura 9.2.6 mostra um retrato de fase para esse sistema com um campo de direções no fundo. Note que estão desenhadas duas trajetórias tendendo ao ponto de sela na origem quando $t \to \infty$. Uma delas está no quarto quadrante e é quase uma reta saindo do nó instável em $(3, -2)$. A outra também começa em um nó instável, vai para o primeiro quadrante, dá uma volta em torno do ponto espiral e acaba se aproximando do ponto de sela pelo segundo quadrante. Essas duas trajetórias são separatrizes; a região entre elas (sem incluir as separatrizes) é a bacia de atração para o ponto espiral em $(0, 1)$. Essa região está sombreada na Figura 9.2.6.

A bacia de atração para o nó assintoticamente estável em $(-2, -2)$ consiste no resto do plano xy com poucas exceções. As separatrizes tendem ao ponto de sela, como já observamos, em vez do nó. O ponto de sela e o nó estável são soluções de equilíbrio, logo permanecem fixos por todo o tempo. Finalmente, existe uma trajetória contida na reta $y = -2$ para $x > 3$ na qual o sentido do movimento é sempre para a direita; essa trajetória também não se aproxima do ponto $(-2, -2)$.

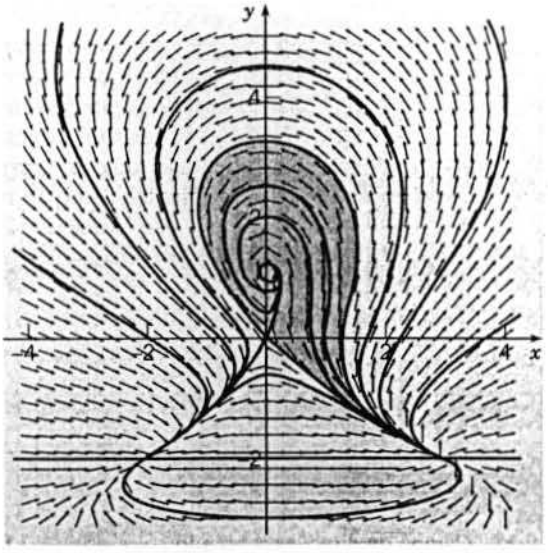


FIGURA 9.2.6 Trajetórias do sistema (14).

As Figuras 9.2.4, 9.2.5 e 9.2.6 mostram que na vizinhança imediata de um ponto crítico o campo de direções e o padrão das trajetórias parecem com os de um sistema linear com coeficientes constantes. Isso fica até mais claro se você usar um programa de computador para ampliar cada vez mais a região em torno de um ponto crítico. Assim, temos evidência visual de que um sistema não linear se comporta de maneira muito semelhante a um linear, pelo menos na vizinhança de um ponto crítico. Vamos seguir essa ideia na próxima seção.

Determinação de Trajetórias. As trajetórias de um sistema autônomo bidimensional

$$dx/dt = F(x,y), \qquad dy/dt = G(x,y) \tag{16}$$

podem ser encontradas, algumas vezes, resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem relacionada. Das Eqs. (16), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}, \tag{17}$$

que é uma equação de primeira ordem nas variáveis x e y. Observe que tal redução não é possível, em geral, se F e G também dependerem de t. Se a Eq. (17) puder ser resolvida por algum dos métodos do Capítulo 2 e se escrevermos a solução (implicitamente) na forma

$$H(x,y) = c, \tag{18}$$

então a Eq. (18) é uma equação para as trajetórias do sistema (16). Em outras palavras, as trajetórias estão contidas nas curvas de nível de $H(x,y)$. Tenha em mente que não existe maneira geral de se resolver a Eq. (17) para se obter a função H, de modo que essa abordagem só é possível em casos especiais.

EXEMPLO 3

Encontre as trajetórias do sistema

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = x. \tag{19}$$

Nesse caso, a Eq. (17) fica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \tag{20}$$

Essa equação é separável, já que pode ser escrita na forma

$$y\,dy = x\,dx,$$

e suas soluções são dadas por

$$H(x,y) = y^2 - x^2 = c, \tag{21}$$

onde c é arbitrário. Logo, as trajetórias do sistema (19) são as hipérboles ilustradas na Figura 9.2.7. A direção do movimento das trajetórias pode ser inferida do fato de que as derivadas dx/dt e dy/dt são positivas no primeiro quadrante. O único ponto crítico é o ponto de sela na origem.

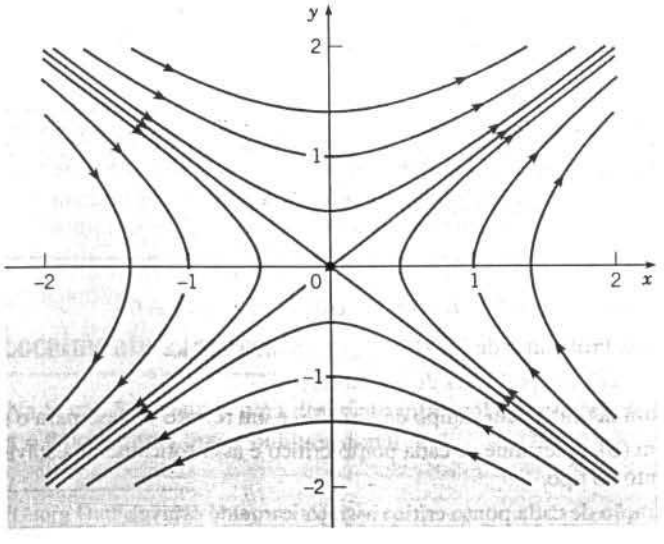


FIGURA 9.2.7 Trajetórias do sistema (19).

Outro modo de se obter as trajetórias é resolver o sistema (19) pelos métodos da Seção 7.5. Omitimos os detalhes, mas o resultado é

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t}, \qquad y = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

Eliminando t dessas duas equações nos leva, novamente, à Eq. (21).

EXEMPLO 4

Encontre as trajetórias do sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y, \qquad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2. \tag{22}$$

Das equações

$$4 - 2y = 0, \qquad 12 - 3x^2 = 0$$

vemos que os pontos críticos do sistema (22) são os pontos $(-2, 2)$ e $(2, 2)$. Para determinar as trajetórias, note que, para esse sistema, a Eq. (17) fica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}. \tag{23}$$

Separando as variáveis na Eq. (23) e integrando, vemos que a solução satisfaz

$$H(x, y) = 4y - y^2 - 12x + x^3 = c, \tag{24}$$

onde c é uma constante arbitrária. Uma rotina computacional para fazer gráficos ajuda a mostrar as curvas de nível de $H(x, y)$, algumas das quais estão ilustradas na Figura 9.2.8. O sentido do movimento nas trajetórias pode ser determinado desenhando-se um campo de direções para o sistema (22) ou calculando-se dx/dt e dy/dt em um ou dois pontos selecionados. Pode-se ver, da Figura 9.2.8, que o ponto crítico $(2, 2)$ é um ponto de sela, enquanto o ponto $(-2, 2)$ é um centro. Observe que uma trajetória sai do ponto de sela (quando $t \to -\infty$), dá uma volta em torno do centro e volta ao ponto de sela (quando $t \to +\infty$).

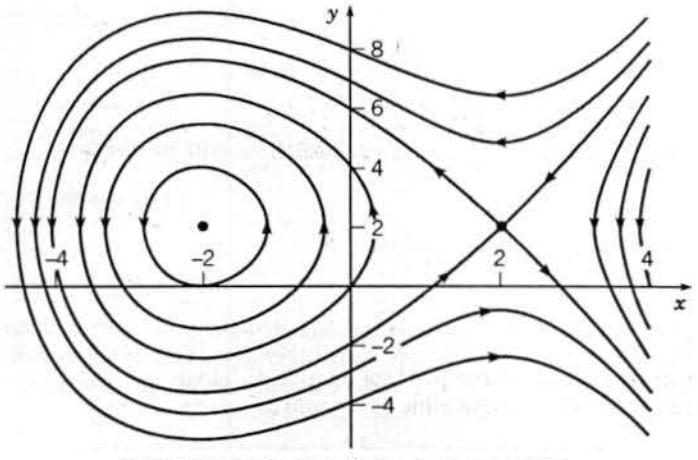


FIGURA 9.2.8 Trajetórias do sistema (22).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, esboce a trajetória correspondente à solução que satisfaz as condições iniciais dadas e indique o sentido do movimento quando t cresce.

1. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = -2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2$
2. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = 2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2 \quad$ e $\quad x(0) = 4, \quad y(0) = 0$
3. $dx/dt = -y, \quad dy/dt = x; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 0 \quad$ e $\quad x(0) = 0, \quad y(0) = 4$
4. $dx/dt = ay, \quad dy/dt = -bx, \quad a > 0, \quad b > 0; \quad x(0) = \sqrt{a}, \quad y(0) = 0$

Para cada um dos sistemas nos Problemas de 5 a 16:

(a) Encontre todos os pontos críticos (soluções de equilíbrio).

(b) Use um computador para desenhar um campo de direções e um retrato de fase para o sistema.

(c) Do(s) gráfico(s) no item (b), determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, estável ou instável, e classifique-o quanto ao tipo.

(d) Descreva a bacia de atração de cada ponto crítico assintoticamente estável.

5. $dx/dt = x - xy, \quad dy/dt = y + 2xy$
6. $dx/dt = 1 + 2y, \quad dy/dt = 1 - 3x^2$
7. $dx/dt = 2x - x^2 - xy, \quad dy/dt = 3y - 2y^2 - 3xy$
8. $dx/dt = -(2 + y)(x + y), \quad dy/dt = -y(1 - x)$
9. $dx/dt = y(2 - x - y), \quad dy/dt = -x - y - 2xy$
10. $dx/dt = (2 + x)(y - x), \quad dy/dt = y(2 + x - x^2)$
11. $dx/dt = -x + 2xy, \quad dy/dt = y - x^2 - y^2$
12. $dx/dt = y, \quad dy/dt = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}y$
13. $dx/dt = (2 + x)(y - x), \quad dy/dt = (4 - x)(y + x)$
14. $dx/dt = (2 - x)(y - x), \quad dy/dt = y(2 - x - x^2)$
15. $dx/dt = x(2 - x - y), \quad dy/dt = -x + 3y - 2xy$
16. $dx/dt = x(2 - x - y), \quad dy/dt = (1 - y)(2 + x)$

Em cada um dos Problemas de 17 a 24:

(a) Encontre uma equação da forma $H(x, y) = c$ para as trajetórias.

(b) Desenhe diversas curvas de nível para a função H. Essas são as trajetórias do sistema dado. Indique o sentido do movimento em cada trajetória.

17. $dx/dt = 2y, \quad dy/dt = 8x$
18. $dx/dt = 2y, \quad dy/dt = -8x$
19. $dx/dt = y, \quad dy/dt = 2x + y$
20. $dx/dt = -x + y, \quad dy/dt = -x - y$
21. $dx/dt = -x + y + x^2, \quad dy/dt = y - 2xy$
22. $dx/dt = 2x^2y - 3x^2 - 4y, \quad dy/dt = -2xy^2 + 6xy$
23. Pêndulo não amortecido: $dx/dt = y, \quad dy/dt = -\operatorname{sen} x$
24. Equações de Duffing[2]: $dx/dt = y, \quad dy/dt = -x + (x^3/6)$
25. Dado que $x = \phi(t), y = \psi(t)$ é uma solução do sistema autônomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y)$$

para $\alpha < t < \beta$, mostre que $x = \Phi(t) = \phi(t - s), y = \Psi(t) = \psi(t - s)$ é uma solução para $\alpha + s < t < \beta + s$, para qualquer número s.

26. Prove que, para o sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y)$$

existe no máximo uma trajetória passando por um ponto dado (x_0, y_0).
Sugestão: seja C_0 a trajetória gerada pela solução $x = \phi_0(t), y = \psi_0(t)$ com $\phi_0(t_0) = x_0, \psi_0(t_0) = y_0$, e seja C_1 a trajetória gerada pela solução $x = \phi_1(t), y = \psi_1(t)$ com $\phi_1(t_1) = x_0, \psi_1(t_1) = y_0$. Use o fato de que o sistema é autônomo e use, também, o teorema de existência e unicidade para mostrar que C_0 e C_1 são iguais.

27. Prove que, se uma trajetória começa em um ponto não crítico do sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y),$$

então não pode atingir um ponto crítico (x_0, y_0) em um intervalo de tempo finito.
Sugestão: suponha o contrário, ou seja, suponha que a solução $x = \phi(t), y = \psi(t)$ satisfaz $\phi(a) = x_0, \psi(a) = y_0$. Depois use o fato de que $x = x_0, y = y_0$ é uma solução do sistema dado que satisfaz a condição inicial $x = x_0, y = y_0$ em $t = a$.

28. Supondo que a trajetória correspondente a uma solução $x = \phi(t), y = \psi(t), -\infty < t < \infty$ de um sistema autônomo é fechada, mostre que a solução é periódica.
Sugestão: como a trajetória é fechada, existe pelo menos um ponto (x_0, y_0) tal que $\phi(t_0) = x_0, \psi(t_0) = y_0$ e um número $T > 0$ tal que $\phi(t_0 + T) = x_0, \psi(t_0 + T) = y_0$. Mostre que $x = \Phi(t) = \phi(t + T), y = \Psi(t) = \psi(t + T)$ é uma solução e use o teorema de existência e unicidade para mostrar que $\Phi(t) = \phi(t), \Psi(t) = \psi(t)$ para todo t.

9.3 Sistemas Localmente Lineares

Na Seção 9.1 fizemos uma descrição informal das propriedades de estabilidade da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema linear bidimensional

[2]Georg Duffing (1861-1944), um alemão experimentalista, foi pioneiro no estudo das oscilações de sistemas mecânicos não lineares. Seu trabalho mais importante foi uma monografia influente publicada em 1918.

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Os resultados estão resumidos na Tabela 9.1.1. Lembre-se de que supusemos que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema (1). Agora que já definimos os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade mais precisamente, podemos enunciar esses resultados no teorema a seguir.

Teorema 9.3.1 O ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema linear (1) é: assintoticamente estável se os autovalores r_1 e r_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se r_1 e r_2 são imaginários puros; instável se r_1 e r_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.

Efeito de Pequenas Perturbações. Fica claro, desse teorema ou da Tabela 9.1.1, que os autovalores r_1, r_2 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ determinam o tipo de ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e suas características de estabilidade. Por sua vez, os valores de r_1 e r_2 dependem dos coeficientes no sistema (1). Quando um sistema desses aparece em algum campo aplicado, os coeficientes resultam, em geral, de medidas de determinadas quantidades físicas. Tais medidas estão sujeitas, muitas vezes, a pequenos erros, de modo que é de interesse investigar se pequenas mudanças (perturbações) nos coeficientes podem afetar a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico e/ou alterar de maneira significativa o padrão de trajetórias.

Lembre que os autovalores r_1, r_2 são as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{2}$$

É possível mostrar que perturbações *pequenas* em alguns ou em todos os coeficientes são refletidas em perturbações *pequenas* nos autovalores. A situação mais sensível acontece quando $r_1 = i\mu$ e $r_2 = -i\mu$, ou seja, quando o ponto crítico é um centro e as trajetórias são curvas fechadas (elipses) em volta dele. Se for feita uma ligeira mudança nos coeficientes, então os autovalores r_1 e r_2 terão novos valores $r_1' = \lambda' + i\mu'$ e $r_2' = \lambda' - i\mu'$, onde λ' é pequeno em valor absoluto e $\mu' \cong \mu$ (veja a Figura 9.3.1). Se $\lambda' \neq 0$, o que acontece quase sempre, então as trajetórias do sistema perturbado serão espirais, em vez de elipses. O sistema é assintoticamente estável se $\lambda' < 0$, mas é instável se $\lambda' > 0$. Assim, no caso de um centro, pequenas perturbações nos coeficientes podem transformar um sistema estável em um instável e, em qualquer caso, pode-se esperar uma mudança nas trajetórias de elipses para espirais (veja o Problema 27).

Outro caso, ligeiramente menos sensível, acontece se os autovalores r_1 e r_2 são iguais; nesse caso o ponto crítico é um nó. Pequenas perturbações nos coeficientes, normalmente, fazem com que as raízes iguais se separem (bifurquem). Se as raízes separadas forem reais, então o ponto crítico do sistema perturbado permanecerá um nó, mas se as raízes separadas forem complexas conjugadas então o ponto crítico se transformará em um ponto espiral. A Figura 9.3.2 mostra essas duas possibilidades de modo esquemático. Nesse caso, a estabilidade ou instabilidade do sistema não é afetada por pequenas perturbações nos coeficientes, mas o tipo de ponto crítico pode mudar (veja o Problema 28).

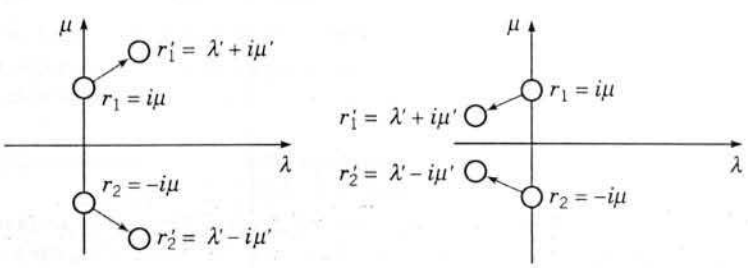


FIGURA 9.3.1 Perturbação esquemática de $r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$.

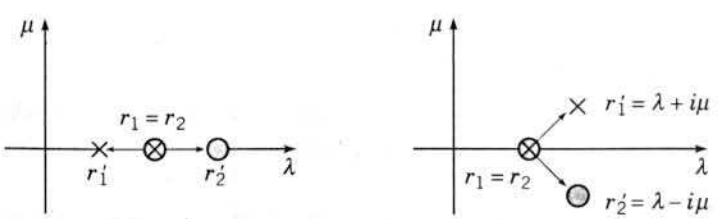


FIGURA 9.3.2 Perturbação esquemática de $r_1 = r_2$.

Em todos os outros casos, perturbações suficientemente pequenas dos coeficientes não alteram a estabilidade ou instabilidade do sistema, nem o tipo de ponto crítico. Por exemplo, se r_1 e r_2 são reais, negativos e distintos, então uma mudança *pequena* nos coeficientes não vai alterar os sinais de r_1 e r_2, nem vai permitir que eles se tornem iguais. Assim, o ponto crítico permanecerá um nó assintoticamente estável.

Aproximações Lineares de Sistemas Não Lineares. Vamos considerar, agora, um sistema autônomo bidimensional não linear

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Nosso objetivo principal é investigar o comportamento das trajetórias do sistema (3) perto de um ponto crítico $\mathbf{x}^0$. Lembre-se de que observamos, no Exemplo 1 da Seção 9.2, que perto de cada ponto crítico de um sistema não linear o padrão das trajetórias é parecido com o das trajetórias de um determinado sistema linear. Isso sugere que perto de um ponto crítico podemos ser capazes de aproximar o sistema não linear (3) por um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam fáceis de descrever. A pergunta crucial é se, e como, podemos encontrar um sistema linear cujas trajetórias estejam muito próximas das trajetórias do sistema não linear perto do ponto crítico.

É conveniente escolher o ponto crítico como a origem. Isso não envolve perda de generalidade, já que se $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, é sempre possível fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ na Eq. (3). Então $\mathbf{u}$ satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem.

Vamos considerar, primeiro, o que significa, para o sistema não linear (3), estar "próximo" de um sistema linear (1). Suponha, então, que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \tag{4}$$

e que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico **isolado** do sistema (4). Isso significa que existe algum círculo em torno da origem no interior do qual não existem outros pontos críticos. Além disso, vamos supor que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Para que o sistema não linear (4) esteja próximo do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, temos que supor que $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é pequeno. Mais precisamente, vamos supor que as componentes de $\mathbf{g}$ têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas e que $\mathbf{g}$ satisfaz a condição

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\| \to 0 \text{ quando } \mathbf{x} \to \mathbf{0}; \tag{5}$$

ou seja, $\|\mathbf{g}\|$ é pequeno em comparação com a própria $\|\mathbf{x}\|$ perto da origem. Tal sistema é chamado de **sistema localmente linear** na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pode ser útil escrever a condição (5) em forma escalar. Se $\mathbf{x}^T = (x, y)$, então $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$. Analogamente, se $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, então $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{1/2}$. Segue, então, que a condição (5) é satisfeita se, e somente se,

$$g_1(x, y)/r \to 0, \qquad g_2(x, y)/r \to 0 \text{ quando } r \to 0. \tag{6}$$

EXEMPLO 1

Determine se o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0{,}75xy - 0{,}25y^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

é localmente linear em uma vizinhança da origem.

Observe que o sistema (7) é da forma (4), de modo que (0, 0) é um ponto crítico, e que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Não é difícil mostrar que os outros pontos críticos da Eq. (7) são (0, 2), (1, 0) e (0,5; 0,5); em consequência, a origem é um ponto crítico isolado. Para verificar as condições (6), é conveniente introduzir coordenadas polares, fazendo $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\frac{g_1(x, y)}{r} = \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r}$$

$$= -r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) \to 0$$

quando $r \to 0$. De maneira análoga, pode-se mostrar que $g_2(x, y)/r \to 0$ quando $r \to 0$. Portanto, o sistema (7) é localmente linear perto da origem.

EXEMPLO 2

O movimento de um pêndulo é descrito pelo sistema [veja a Eq. (13) da Seção 9.2]

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega^2\operatorname{sen}x - \gamma y. \tag{8}$$

Os pontos críticos são $(0,0), (\pm\pi,0), (\pm 2\pi,0), \ldots$, de modo que a origem é um ponto crítico isolado desse sistema. Mostre que o sistema é localmente linear próximo à origem.

Para comparar as Eqs. (8) com a Eq. (4), precisamos escrevê-las de modo a identificar claramente os termos lineares e os não lineares. Escrevendo $\operatorname{sen} x = x + (\operatorname{sen} x - x)$ e substituindo esta expressão na segunda das Eqs. (8), obtemos o sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} x - x \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Comparando a Eq. (9) com a Eq. (4), vemos que $g_1(x, y) = 0$ e $g_2(x, y) = -\omega^2(\operatorname{sen} x - x)$. Da série de Taylor para sen x, sabemos que sen $x - x$ se comporta como $-x^3/3! = -(r^3 \cos^3\theta)/3!$ quando x é pequeno. Em consequência, $(\operatorname{sen} x - x)/r \to 0$ quando $r \to 0$. Portanto, as condições (6) são satisfeitas e o sistema (9) é localmente linear perto da origem.

Vamos voltar, agora, para o sistema não linear geral (3) que, em forma escalar, fica

$$x' = F(x,y), \qquad y' = G(x,y). \tag{10}$$

O sistema (10) vai ser localmente linear em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Para mostrar isso, usamos a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) para escrever $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_1(x,y),$$

$$G(x,y) = G(x_0,y_0) + G_x(x_0,y_0)(x - x_0) + G_y(x_0,y_0)(y - y_0) + \eta_2(x,y),$$

onde $\eta_1(x,y)/[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2} \to 0$ quando $(x,y) \to (x_0,y_0)$ e analogamente para η_2. Note que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ e $dy/dt = d(y - y_0)/dt$. Então, o sistema (10) se reduz a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x,y) \\ \eta_2(x,y) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

onde $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Esse resultado tem duas consequências. A primeira é que se as funções F e G forem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (10) será localmente linear e não é necessário usar o processo limite utilizado nos Exemplos 1 e 2. A segunda é que o sistema linear que aproxima o sistema não linear (10) perto de (x_0, y_0) é dado pela parte linear da Eq. (11) ou da (12):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0,y_0) & F_y(x_0,y_0) \\ G_x(x_0,y_0) & G_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

onde $u_1 = x - x_0$ e $u_2 = y - y_0$. A Eq. (13) fornece um método simples e geral para se encontrar o sistema linear correspondente a um sistema localmente linear perto de um ponto crítico.

A matriz

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}, \tag{14}$$

que aparece como matriz de coeficientes na Eq. (13) é chamada de **matriz jacobiana**[3] das funções F e G em relação a x e y. Precisamos supor que $\det(\mathbf{J})$ não se anula em (x_0, y_0), de modo que este ponto seja também um ponto crítico isolado do sistema linear (13).

EXEMPLO 3

Use a Eq. (13) para encontrar o sistema linear correspondente às equações do pêndulo (8) perto da origem; perto do ponto crítico $(\pi, 0)$.

Nesse caso, da Eq. (8), temos

$$F(x,y) = y, \qquad G(x,y) = -\omega^2 \operatorname{sen} x - \gamma y; \tag{15}$$

[3]Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), um analista alemão que foi professor e lecionou nas Universidades de Königsberg e de Berlim, fez contribuições importantes à teoria de funções elípticas. O determinante de **J** e sua extensão a n funções de n variáveis é chamado de jacobiano devido ao seu artigo notável publicado em 1841 sobre as propriedades desse determinante. A matriz correspondente também leva o nome de Jacobi, embora matrizes não tenham sido desenvolvidas até depois de sua morte.

como essas funções são tão diferenciáveis quanto necessário, o sistema (8) é localmente linear perto de cada ponto crítico. As derivadas de F e G são

$$F_x = 0, \qquad F_y = 1, \qquad G_x = -\omega^2 \cos x, \qquad G_y = -\gamma. \tag{16}$$

Então, na origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{17}$$

o que está de acordo com a Eq. (9).

Analogamente, calculando as derivadas parciais dada pela Eq. (16) em $(\pi, 0)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{18}$$

onde $u = x - \pi$, $v = y$. Esse é o sistema linear correspondente às Eqs. (8) perto do ponto $(\pi, 0)$.

Vamos voltar, agora, ao sistema localmente linear (4). Como o termo não linear $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é pequeno comparado ao termo linear $\mathbf{Ax}$ quando $\mathbf{x}$ é pequeno, é razoável esperar que as trajetórias do sistema linear (1) sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não linear (4), pelo menos perto da origem. Isso ocorre na maioria dos casos (mas não em todos), como diz o próximo teorema.

Teorema 9.3.2 Sejam r_1 e r_2 os autovalores do sistema linear (1) correspondente ao sistema localmente linear (4). Então o tipo e a estabilidade do ponto crítico $(0, 0)$ do sistema linear (1) e do sistema localmente linear (4) são como descritos na Tabela 9.3.1.

Nesse estágio, a demonstração do Teorema 9.3.2 é difícil demais para colocar aqui, de modo que aceitaremos esse resultado sem demonstração. As afirmações para a estabilidade assintótica e para a instabilidade seguem como consequência de um resultado discutido na Seção 9.6, e os Problemas 10 a 12 daquela seção esboçam uma demonstração. Essencialmente, o Teorema 9.3.2 diz que para $\mathbf{x}$ (ou $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$) pequeno os termos não lineares também são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto crítico determinados pelo sistema linear, exceto em dois casos sensíveis: quando r_1 e r_2 forem imaginários puros e quando r_1 e r_2 forem reais e iguais. Lembre-se de que antes, nesta seção, afirmamos que pequenas perturbações nos coeficientes do sistema linear (1), e, portanto, nos autovalores r_1 e r_2, só podem alterar o tipo e a estabilidade nesses dois casos. É razoável esperar que o pequeno termo não linear na Eq. (4) possa ter um efeito substancial semelhante, pelo menos nesses dois casos. Isso ocorre, mas o resultado mais importante do Teorema 9.3.2 é que em *todos os outros casos* o termo pequeno não linear não altera o tipo ou a estabilidade do ponto crítico. Assim, exceto nos dois casos sensíveis o tipo e a estabilidade do ponto crítico do sistema não linear (4) podem ser determinados por um estudo do sistema linear (1) muito mais simples.

TABELA 9.3.1 Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Localmente Lineares

	Sistema Linear		Sistema Localmente Linear	
r_1, r_2	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	N	Assintoticamente estável	N	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instável	PS	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Assintoticamente estável	N ou PE	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda < 0$	PE	Assintoticamente estável	PE	Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Nota: N, nó; NI, nó impróprio; NP, nó próprio; PS, ponto de sela; PE, ponto espiral; C, centro

Mesmo que o ponto crítico seja do mesmo tipo que o do sistema linear, as trajetórias do sistema localmente linear podem ter aparência bem diferente das do sistema linear correspondente, exceto muito próximo do ponto crítico. No entanto, pode-se mostrar que os coeficientes angulares das retas tangentes às trajetórias que "entram" ou "saem" do ponto crítico são dados corretamente pela equação linear.

Pêndulo Amortecido. Vamos continuar nossa discussão sobre o pêndulo amortecido iniciada nos Exemplos 2 e 3. Perto da origem, as equações não lineares (8) são aproximadas pelo sistema linear (17), cujos autovalores são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}. \tag{19}$$

A natureza das soluções das Eqs. (8) e (17) depende do sinal de $\gamma^2 - 4\omega^2$ da seguinte maneira:

1. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, então os autovalores são reais, distintos e negativos. O ponto crítico $(0, 0)$ é um nó assintoticamente estável do sistema linear (17) e do sistema localmente linear (8).
2. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, então os autovalores são reais, iguais e negativos. O ponto crítico $(0, 0)$ é um nó (próprio ou impróprio) assintoticamente estável do sistema linear (17). Pode ser um nó assintoticamente estável ou um ponto espiral do sistema localmente linear (8).
3. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, então os autovalores são complexos com parte real negativa. O ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto espiral assintoticamente estável do sistema linear (17) e do sistema localmente linear (8).

Então, o ponto crítico $(0, 0)$ será um ponto espiral do sistema (8) se o amortecimento for pequeno e será um nó se o amortecimento for suficientemente grande. Em qualquer dos casos, a origem é assintoticamente estável.

Vamos considerar, agora, o caso $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, correspondente a um amortecimento pequeno, com mais detalhes. O sentido de movimento das espirais próximas de $(0, 0)$ pode ser obtido diretamente das Eqs. (8). Considere o ponto no qual a espiral intersecta o semieixo positivo dos y ($x = 0, y > 0$). Em tal ponto, segue das Eqs. (8) que $dx/dt > 0$. Logo, o ponto (x, y) na trajetória está se movendo para a direita, de modo que o sentido do movimento nas espirais é horário.

O comportamento do pêndulo perto dos pontos críticos da forma $(\pm n\pi, 0)$, com n par, é o mesmo que ocorre perto da origem. Esperamos que isso seja verdade por considerações físicas, já que todos esses pontos críticos correspondem à posição de equilíbrio mais baixa do pêndulo. Essa conclusão pode ser confirmada repetindo-se a análise feita antes para a origem. A Figura 9.3.3 mostra as espirais no sentido horário em alguns desses pontos críticos.

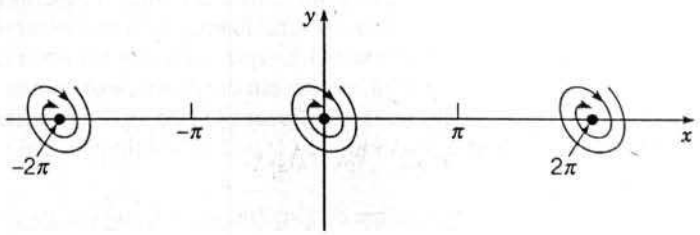


FIGURA 9.3.3 Pontos espirais assintoticamente estáveis para o pêndulo amortecido.

Vamos considerar agora o ponto crítico $(\pi, 0)$. Aqui as equações não lineares (8) são aproximadas pelo sistema linear (18), cujos autovalores são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2}}{2}. \tag{20}$$

Um autovalor (r_1) é positivo e o outro (r_2) é negativo. Portanto, independentemente de quão forte é o amortecimento, o ponto crítico $x = \pi, y = 0$ é um ponto de sela instável tanto do sistema linear (18) quanto do sistema localmente linear (8).

Para examinar o comportamento das trajetórias perto do ponto de sela $(\pi, 0)$ mais detalhadamente, escrevemos a solução geral da Eq. (18), a saber,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t}, \tag{21}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Como $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$, segue que a solução que tende a zero quando $t \to \infty$ corresponde a $C_1 = 0$. Para essa solução, $v/u = r_2$, de modo que o coeficiente angular da reta tan-

gente às trajetórias que "entram" é negativo; uma está no segundo quadrante ($C_2 < 0$) e a outra no quarto quadrante ($C_2 > 0$). Para $C_2 = 0$, obtemos o par de trajetórias "saindo" do ponto de sela. Essas trajetórias têm como coeficiente angular da reta tangente na origem $r_1 > 0$; uma está no primeiro quadrante ($C_1 > 0$) e a outra no terceiro quadrante ($C_1 < 0$).

A situação é a mesma nos outros pontos críticos da forma $(n\pi, 0)$, com n ímpar. Todos eles correspondem à posição de equilíbrio mais alta do pêndulo, de modo que esperamos que sejam instáveis. A análise em $(\pi, 0)$ pode ser repetida para mostrar que são pontos de sela orientados da mesma maneira que o ponto em $(\pi, 0)$. A Figura 9.3.4 mostra diagramas das trajetórias em vizinhanças de dois pontos de sela.

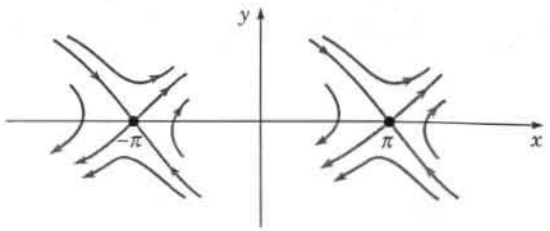


FIGURA 9.3.4 Pontos de sela instáveis para o pêndulo amortecido.

EXEMPLO 4

As equações de movimento de um determinado pêndulo são

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -9 \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{5}y, \tag{22}$$

onde $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$. Desenhe um retrato de fase para esse sistema e explique como ele mostra os movimentos possíveis do pêndulo.

Fazendo o gráfico de trajetórias começando em diversos pontos iniciais no plano de fase, obtemos o retrato de fase ilustrado na Figura 9.3.5. Como vimos, os pontos críticos (soluções de equilíbrio) são os pontos da forma $(n\pi, 0)$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Valores pares de n, incluindo o zero, correspondem à posição mais baixa do pêndulo, enquanto valores ímpares de n correspondem à posição mais alta. Perto de cada ponto crítico assintoticamente estável as trajetórias são espirais no sentido horário que representam uma oscilação que vai diminuindo, tendendo à posição de equilíbrio. As partes horizontais com forma de ondas das trajetórias que ocorrem para valores grandes de $|y|$ representam movimentos do pêndulo que vão além da posição de equilíbrio mais alta. Note que tal movimento não pode continuar indefinidamente, independente de quão grande é $|y|$; alguma hora a velocidade angular vai ser suficientemente reduzida pelo termo de amortecimento, de modo que o pêndulo não pode ir mais alto do que o ponto de equilíbrio mais alto e, em vez disso, começa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio mais baixo.

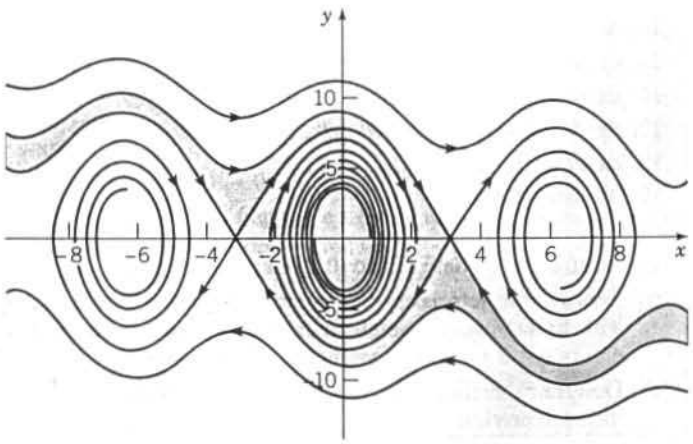


FIGURA 9.3.5 Retratos de fase para o pêndulo amortecido do Exemplo 4.

A bacia de atração da origem aparece sombreada na Figura 9.3.5. Ela é limitada pelas trajetórias que entram nos dois pontos de sela adjacentes em $(\pi, 0)$ e $(-\pi, 0)$. As trajetórias que limitam a região são separatrizes. Cada ponto crítico assintoticamente estável tem sua própria bacia de atração, limitada pelas separatrizes entrando nos dois pontos de sela vizinhos. Todas as bacias de atração são congruentes à bacia sombreada; a única diferença é que estão transladadas horizontalmente por distâncias apropriadas. Note que é matematicamente possível (embora fisicamente irrealizável) escolher condições iniciais exatamente sobre a separatriz, de modo que o movimento resultante levaria a um pêndulo oscilando em uma posição acima do equilíbrio instável.

Uma diferença importante entre sistemas autônomos não lineares e o sistema linear discutido na Seção 9.1 é ilustrado pelas equações do pêndulo. Lembre que o sistema linear (1) só tem um ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se $\det \mathbf{A} \neq 0$. Assim, se a origem for assintoticamente estável, então não só as trajetórias que começam perto da origem tendem a ela, mas, de fato, todas as trajetórias tendem à origem. Nesse caso o ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é dito **globalmente assintoticamente estável**. Essa propriedade de sistemas lineares não é válida, em geral, para sistemas não lineares, mesmo se o sistema não linear tiver apenas um ponto crítico assintoticamente estável. Portanto, para sistemas não lineares o problema importante é determinar (ou estimar) a bacia de atração para cada ponto crítico assintoticamente estável.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, verifique que $(0, 0)$ é um ponto crítico, mostre que o sistema é localmente linear e discuta o tipo e a estabilidade do ponto crítico $(0, 0)$ examinando o sistema linear correspondente.

1. $dx/dt = x - y^2, \quad dy/dt = x - 2y + x^2$
2. $dx/dt = -x + y + 2xy, \quad dy/dt = -4x - y + x^2 - y^2$
3. $dx/dt = (1 + x)\operatorname{sen} y, \quad dy/dt = 1 - x - \cos y$
4. $dx/dt = x + y^2, \quad dy/dt = x + y$

Em cada um dos Problemas de 5 a 18:

(a) Determine todos os pontos críticos do sistema de equações dado.

(b) Encontre o sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.

(c) Encontre os autovalores de cada sistema linear. O que você pode concluir sobre o sistema não linear?

(d) Desenhe um retrato de fase do sistema não linear para confirmar suas conclusões ou para estendê-las nos casos em que o sistema linear não fornece informações definidas sobre o sistema não linear.

5. $dx/dt = (2 + x)(y - x), \quad dy/dt = (4 - x)(y + x)$
6. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = 3y - xy - 2y^2$
7. $dx/dt = 1 - y, \quad dy/dt = x^2 - y^2$
8. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$
9. $dx/dt = (2 + y)(y - 0{,}5x), \quad dy/dt = (2 - x)(y + 0{,}5x)$
10. $dx/dt = x + x^2 + y^2, \quad dy/dt = y - xy$
11. $dx/dt = 2x + y + xy^3, \quad dy/dt = x - 2y - xy$
12. $dx/dt = (1 + x)\operatorname{sen} y, \quad dy/dt = 1 - x - \cos y$
13. $dx/dt = x - y^2, \quad dy/dt = y - x^2$
14. $dx/dt = 1 - xy, \quad dy/dt = x - y^3$
15. $dx/dt = -2x - y - x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = x - y + y(x^2 + y^2)$
16. $dx/dt = y + x(1 - x^2 - y^2), \quad dy/dt = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
17. $dx/dt = 4 - y^2, \quad dy/dt = (1{,}5 + x)(y - x)$
18. $dx/dt = (1 - y)(2x - y), \quad dy/dt = (2 + x)(x - 2y)$
19. Considere o sistema autônomo

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = x + 2x^3.$$

(a) Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de sela.

(b) Esboce as trajetórias para o sistema linear correspondente integrando a equação para dy/dx. Mostre, a partir da forma paramétrica da solução, que a única trajetória na qual $x \to 0, y \to 0$ quando $t \to \infty$ é $y = -x$.

(c) Determine as trajetórias para o sistema não linear integrando a equação para dy/dx. Esboce as trajetórias para o sistema não linear que correspondem a $y = -x$ e a $y = x$ para o sistema linear.

20. Considere o sistema autônomo

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = -2y + x^3.$$

(a) Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é um ponto de sela.

(b) Esboce as trajetórias para o sistema linear correspondente e mostre que a trajetória na qual $x \to 0$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$ é $x = 0$.

(c) Determine as trajetórias para o sistema não linear para $x \neq 0$ integrando a equação para dy/dx. Mostre que a trajetória correspondente a $x = 0$ para o sistema não linear não se altera, mas que a correspondente a $y = 0$ é $y = x^3/5$. Esboce diversas trajetórias para o sistema não linear.

21. A equação de movimento de um pêndulo não amortecido é $d^2\theta/dt + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0$, onde $\omega^2 = g/L$. Faça $x = \theta$, $y = d\theta/dt$ para obter o sistema de equações

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -\omega^2 \operatorname{sen} x.$$

(a) Mostre que os pontos críticos são $(\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e que o sistema é localmente linear na vizinhança de cada ponto crítico.

(b) Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ é um centro (estável) do sistema linear correspondente. Usando o Teorema 9.3.2, o que se pode dizer sobre o sistema não linear? A situação é semelhante nos pontos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Qual a interpretação física desses pontos críticos?

(c) Mostre que o ponto crítico $(\pi, 0)$ é um ponto de sela (instável) do sistema linear correspondente. O que você pode concluir sobre o sistema não linear? A situação é semelhante nos pontos críticos $(\pm(2n - 1)\pi, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Qual a interpretação física desses pontos críticos?

(d) Escolha um valor para ω^2 e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema não linear na vizinhança da origem. Você pode concluir mais alguma coisa sobre a natureza do ponto crítico $(0, 0)$ para o sistema não linear?

(e) Usando o valor de ω^2 do item (d), desenhe um retrato de fase para o pêndulo. Compare seu gráfico com o da Figura 9.3.5 para o pêndulo amortecido.

22. (a) Resolvendo a equação para dy/dx, mostre que as equações das trajetórias do pêndulo não amortecido do Problema 21 podem ser escritas na forma

$$\tfrac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = c, \tag{i}$$

onde c é uma constante de integração.

(b) Multiplique a Eq. (i) por mL^2. Depois expresse o resultado em termos de θ para obter

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = E, \tag{ii}$$

onde $E = mL^2c$.

(c) Mostre que o primeiro termo na Eq. (ii) é a energia cinética do pêndulo e que o segundo termo é a energia potencial devida à gravidade. Logo, a energia total E do pêndulo é constante ao longo de qualquer trajetória; seu valor é determinado pelas condições iniciais.

23. O movimento de determinado pêndulo não amortecido é descrito pelas equações

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x.$$

Se o pêndulo for colocado em movimento com um deslocamento angular A e sem velocidade inicial, então as condições iniciais serão $x(0) = A$, $y(0) = 0$.

(a) Considere $A = 0{,}25$ e faça o gráfico de x em função de t. Do gráfico, estime a amplitude R e o período T do movimento resultante do pêndulo.

(b) Repita o item (a) para $A = 0{,}5$; 1,0; 1,5 e 2,0.

(c) De que modo a amplitude e o período do movimento do pêndulo dependem da posição inicial A? Desenhe um gráfico para mostrar cada uma dessas relações. Você pode dizer alguma coisa sobre o valor limite do período quando $A \to 0$?

(d) Seja $A = 4$ e faça o gráfico de x em função de t. Explique por que esse gráfico difere dos gráficos nos itens (a) e (b). Para que valor de A ocorre a mudança?

24. Considere, mais uma vez, as equações do pêndulo (veja o Problema 23)

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x.$$

Se o pêndulo for colocado em movimento a partir de sua posição mais baixa de equilíbrio com velocidade angular v, então as condições iniciais serão $x(0) = 0$, $y(0) = v$.

(a) Faça os gráficos de x em função de t para $v = 2$ e, também, para $v = 5$. Explique os movimentos diferentes do pêndulo representados por esses dois gráficos.

(b) Existe um valor crítico de v, que denotaremos por v_c, tal que um tipo de movimento ocorre para $v < v_c$ e o outro tipo ocorre para $v > v_c$. Estime o valor de v_c.

25. Este problema estende o Problema 24 para o caso de um pêndulo amortecido. As equações de movimento são

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x - \gamma y,$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento, com condições iniciais $x(0) = 0$, $y(0) = v$.

(a) Para $\gamma = 1/4$, faça o gráfico de x em função de t para $v = 2$ e $v = 5$. Explique esses gráficos em termos dos movimentos do pêndulo que representam. Explique, também, qual a relação entre eles e os gráficos correspondentes no Problema 24(a).

(b) Estime o valor crítico v_c da velocidade inicial onde ocorre a transição de um tipo de movimento para outro.

(c) Repita o item (b) para outros valores de γ e determine como v_c depende de γ.

26. O Teorema 9.3.2 não dá informação sobre a estabilidade de um ponto crítico de um sistema localmente linear se esse ponto for um centro do sistema linear correspondente. Que isso tem que acontecer é ilustrado pelos sistemas

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \tag{i}$$

e

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \tag{ii}$$

(a) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto crítico de cada sistema e que, além disso, é um centro do sistema linear correspondente.

(b) Mostre que cada sistema é localmente linear.

(c) Seja $r^2 = x^2 + y^2$ e note que $x\,dx/dt + y\,dy/dt = r\,dr/dt$. Para o sistema (ii), mostre que $dr/dt < 0$ e que $r \to 0$ quando $t \to \infty$; portanto, o ponto crítico é assintoticamente estável. Para o sistema (i), mostre que a solução do problema de valor inicial para r com $r = r_0$ em $t = 0$ torna-se ilimitada quando $t \to 1/2r_0^2$ e, portanto, o ponto crítico é instável.

27. Neste problema, vamos mostrar como pequenas mudanças nos coeficientes de um sistema de equações lineares podem afetar um ponto crítico que é um centro. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Mostre que os autovalores são $\pm i$, de modo que $(0, 0)$ é um centro. Considere, agora o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

onde $|\epsilon|$ é arbitrariamente pequeno. Mostre que os autovalores são $\epsilon \pm i$. Assim, independentemente do quão pequeno for $|\epsilon| \neq 0$, o centro torna-se um ponto espiral. Se $\epsilon < 0$, o ponto espiral vai ser assintoticamente estável; se $\epsilon > 0$, o ponto espiral vai ser instável.

28. Neste problema, vamos mostrar como pequenas mudanças nos coeficientes de um sistema de equações lineares podem afetar um ponto crítico quando os autovalores são iguais. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Mostre que os autovalores são $r_1 = -1, r_2 = -1$, de modo que o ponto crítico $(0, 0)$ é um nó assintoticamente estável. Considere, agora, o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

onde $|\epsilon|$ é arbitrariamente pequeno. Mostre que se $\epsilon > 0$, então os autovalores são $-1 \pm i\sqrt{\epsilon}$, de modo que o nó assintoticamente estável se transformou em um ponto espiral assintoticamente estável. Se $\epsilon < 0$, então as raízes são $-1 \pm \sqrt{|\epsilon|}$, e o ponto crítico permanece sendo um nó assintoticamente estável.

29. Neste problema, vamos deduzir uma fórmula para o período natural de um pêndulo não linear não amortecido [$c = 0$ na Eq. (10) da Seção 9.2]. Suponha que a massa é puxada por um ângulo positivo α e, depois, solta com velocidade zero.

(a) Pensamos, em geral, em θ e $d\theta/dt$ como funções de t. No entanto, invertendo os papéis de t e θ, podemos considerar t como função de θ e, portanto, pensar, também, em $d\theta/dt$ como função de θ. Deduzimos, então, a seguinte sequência de equações:

$$\frac{1}{2}mL^2 \frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -mgL \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgL(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Por que foi escolhida a raiz quadrada negativa na última equação?

(b) Se T é o período natural de oscilação, deduza a fórmula

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

(c) Usando as identidades $\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ e $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2(\alpha/2)$, seguidas pela mudança de variável $\text{sen}(\theta/2) = k\,\text{sen}\,\phi$, com $k = \text{sen}(\alpha/2)$, mostre que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_{0}^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\phi}}.$$

Essa é uma **integral elíptica** de primeira espécie. Note que o período depende da razão L/g e, também, do deslocamento inicial, através de $k = \text{sen}(\alpha/2)$.

(d) Calculando a integral na expressão para T, obtenha valores de T que você possa comparar com as estimativas gráficas obtidas no Problema 23.

30. Uma generalização da equação do pêndulo amortecido discutida no texto, ou de um sistema mola-massa, é a equação de Liénard[4]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

Se $c(x)$ for constante e $g(x) = kx$, então esta equação terá a forma da equação linear do pêndulo [substitua sen θ por θ na Eq. (12) da Seção 9.2]; caso contrário, o amortecimento $c(x)dx/dt$ e a força restauradora $g(x)$ são não lineares. Suponha que c é continuamente diferenciável, que g é duas vezes continuamente diferenciável e que $g(0) = 0$.

(a) Escreva a equação de Liénard como um sistema de duas equações de primeira ordem, introduzindo a variável $y = dx/dt$.

(b) Mostre que $(0, 0)$ é um ponto crítico e que o sistema é localmente linear em uma vizinhança de $(0, 0)$.

(c) Mostre que, se $c(0) > 0$ e $g'(0) > 0$, então o ponto crítico é assintoticamente estável, e, se $c(0) < 0$ ou se $g'(0) < 0$, então o ponto crítico é instável.

Sugestão: use a série de Taylor para aproximar c e g em uma vizinhança de $x = 0$.

9.4 Espécies em Competição

Nesta seção e na próxima vamos explorar a aplicação da análise do plano de fase em alguns problemas em dinâmica populacional. Esses problemas envolvem duas populações interagindo e são extensões dos discutidos na Seção 2.5, que trataram de uma única população. Embora as equações discutidas aqui sejam extremamente simples, se comparadas às relações bastante complexas que existem na natureza, ainda é possível compreender algumas coisas sobre princípios ecológicos pelo estudo desses modelos. Modelos iguais ou semelhantes também foram usados para estudar outros tipos de situações competitivas, como, por exemplo, negócios competindo pelo mesmo mercado.

Suponha que, em algum ambiente fechado, existem duas espécies semelhantes competindo por um suprimento limitado de comida — por exemplo, duas espécies de peixe em um lago, nenhuma sendo presa da outra, mas ambas competindo pela comida disponível. Vamos denotar por x e y as populações das duas espécies em um instante t. Como discutido na Seção 2.5, vamos supor que a população de cada espécie, na ausência da outra, seja governada por uma equação logística. Então

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x), \tag{1a}$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y), \tag{1b}$$

respectivamente, onde ϵ_1 e ϵ_2 são as taxas de crescimento das duas populações e ϵ_1/σ_1 e ϵ_2/σ_2 são seus níveis de saturação. No entanto, quando ambas as espécies estão presentes cada uma vai afetar o suprimento

[4]Alfred-Marie Liénard (1869-1958), professor na École des Mines em Paris, trabalhou em eletricidade, mecânica e matemática aplicada. Os resultados de sua investigação sobre essa equação diferencial foram publicados em 1928.

de comida disponível para a outra. De fato, elas reduzem as taxas de crescimento e os níveis de saturação uma da outra. A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido à presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ na Eq. (1a) por $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$, onde α_1 é uma medida do grau de interferência da espécie y sobre a espécie x. Analogamente, substituímos $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ na Eq. (1b) por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$. Obtemos, então, o sistema de equações

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ dy/dt &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x). \end{aligned} \tag{2}$$

Os valores das constantes positivas ϵ_1, σ_1, α_1, ϵ_2, σ_2 e α_2 dependem das espécies particulares em consideração e têm que ser determinados, em geral, através de observações. Estamos interessados nas soluções das Eqs. (2) para as quais x e y não são negativos. Nos dois exemplos a seguir, discutimos dois problemas típicos em detalhe. Voltaremos às equações gerais (2) no final desta seção.

EXEMPLO 1

Discuta o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0{,}75 - y - 0{,}5x). \end{aligned} \tag{3}$$

Encontramos os pontos críticos resolvendo o sistema de equações algébricas

$$x(1 - x - y) = 0, \qquad y(0{,}75 - y - 0{,}5x) = 0. \tag{4}$$

A primeira equação pode ser satisfeita escolhendo-se $x = 0$; então, a segunda nos fornece $y = 0$ ou $y = 0{,}75$. Analogamente, a segunda equação pode ser satisfeita escolhendo-se $y = 0$ e, então, a primeira equação nos dá $x = 0$ ou $x = 1$. Encontramos três pontos críticos, a saber $(0; 0)$, $(0; 0{,}75)$ e $(1; 0)$. Se nem x nem y são nulos, as Eqs. (4) também são satisfeitas pelas soluções do sistema

$$1 - x - y = 0, \qquad 0{,}75 - y - 0{,}5x = 0, \tag{5}$$

o que nos leva ao quarto ponto crítico $(0{,}5; 0{,}5)$. Esses quatro pontos críticos correspondem às soluções de equilíbrio do sistema (3). Os três primeiros desses pontos envolvem a extinção de uma das espécies ou de ambas; apenas o último corresponde à sobrevivência, a longo prazo, de ambas as espécies. Outras soluções são representadas por curvas ou trajetórias no plano xy que descrevem a evolução das populações ao longo do tempo. Para começar a descobrir seu comportamento qualitativo, vamos proceder da seguinte maneira.

Primeiro note que os eixos coordenados são trajetórias. Isso segue diretamente das Eqs. (3), já que $dx/dt = 0$ no eixo dos y (onde $x = 0$) e, analogamente, $dy/dt = 0$ no eixo dos x (onde $y = 0$). Assim, nenhuma outra trajetória pode cruzar os eixos coordenados. Para um problema populacional, só fazem sentido valores não negativos de x e y, logo podemos concluir que qualquer trajetória que comece no primeiro quadrante permanece aí para todo o sempre.

A Figura 9.4.1 mostra um campo de direções para o sistema (3) no quadrante positivo; os pontos pretos nessa figura são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio. Baseados no campo de direção, parece que o ponto $(0{,}5; 0{,}5)$ atrai outras soluções e é, portanto, assintoticamente estável, enquanto os outros três pontos críticos são instáveis. Para confirmar essas conclusões, podemos olhar as aproximações lineares perto de cada ponto crítico.

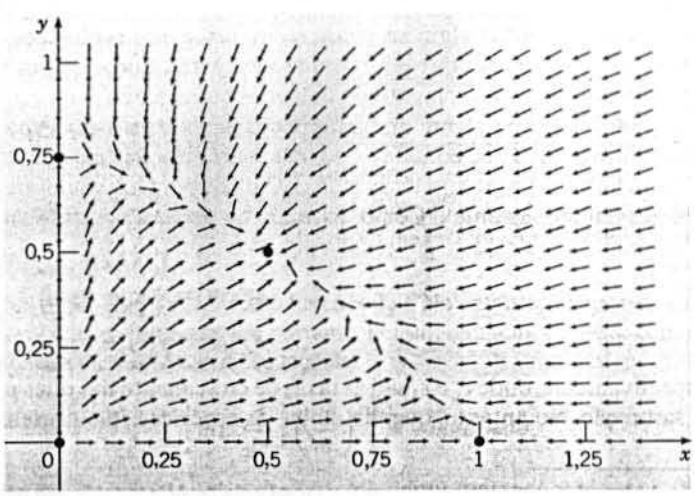


FIGURA 9.4.1 Pontos críticos e campo de direções para o sistema (3).

O sistema (3) é localmente linear em vizinhanças de cada ponto crítico. Existem duas maneiras de se obter o sistema linear perto de um ponto crítico (X, Y). Primeiro, podemos usar a substituição $x = X + u$, $y = Y + v$ nas Eqs. (3), retendo, apenas, os termos lineares em u e v. De modo alternativo, podemos calcular a matriz jacobiana **J** em cada ponto crítico para obter a matriz de coeficientes no sistema linear; veja a Eq. (13) da Seção 9.3. Quando tivermos que investigar diversos pontos críticos será melhor usar, em geral, a matriz jacobiana. Para o sistema (3), temos

$$F(x,y) = x(1-x-y), \qquad G(x,y) = y(0{,}75 - y - 0{,}5x), \tag{6}$$

de modo que

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -0{,}5y & 0{,}75-2y-0{,}5x \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Examinaremos cada ponto crítico por vez.

$x = 0, y = 0$. Este ponto crítico corresponde ao estado em que ambas as espécies morrem como resultado da competição. Fazendo $x = y = 0$ na Eq. (7), vemos que, perto da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Os autovalores e autovetores do sistema (8) são

$$r_1 = 1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 0{,}75, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

de modo que a solução geral do sistema é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0{,}75t}. \tag{10}$$

Assim, a origem é um nó instável de ambos os sistemas, do linear (8) e do não linear (3). Em uma vizinhança da origem todas as trajetórias são tangentes ao eixo dos y, exceto por uma trajetória que está contida no eixo dos x.

$x = 1, y = 0$. Este ponto corresponde a um estado em que a espécie x sobrevive à competição, mas a espécie y, não. Calculando **J** da Eq. (7) em (1,0), vemos que o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$r_1 = -1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 0{,}25, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{12}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}e^{0{,}25t}. \tag{13}$$

Como os autovalores têm sinais opostos, o ponto (1,0) é um ponto de sela e, portanto, é um ponto de equilíbrio instável do sistema linear (11) e do sistema não linear (3). O comportamento das trajetórias perto de (1,0) pode ser visto da Eq. (13). Se $c_2 = 0$, então existe um par de trajetórias que se aproxima do ponto crítico ao longo do eixo dos x. Todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança de (1,0). Quando $t \to -\infty$, uma trajetória tende ao ponto de sela tangente ao autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, ou seja, com coeficiente angular –1,25.

$x = 0, y = 0{,}75$. Nesse caso, a espécie y sobrevive, mas x não. A análise é semelhante à análise para o ponto (1,0). O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}375 & -0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = 0{,}25, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}75, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

de modo que a solução geral da Eq. (14) é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0,25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,75t}. \tag{16}$$

Logo, o ponto (0; 0,75) também é um ponto de sela. Todas as trajetórias deixam uma vizinhança desse ponto, exceto um par que se aproxima ao longo do eixo dos y. A trajetória que tende ao ponto de sela quando $t \to -\infty$ é tangente à reta com coeficiente angular −0,375 determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

$x = 0,5, y = 0,5$. Esse ponto crítico corresponde a um estado de equilíbrio misto, ou de coexistência, na competição entre as duas espécies. Os autovalores e autovetores do sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,25 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{17}$$

são

$$\begin{aligned} r_1 &= (-2 + \sqrt{2})/4 \cong -0,146, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= (-2 - \sqrt{2})/4 \cong -0,854, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Portanto, a solução geral da Eq. (17) é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0,146t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,854t}. \tag{19}$$

Como ambos os autovalores são negativos, o ponto crítico (0,5; 0,5) é um nó assintoticamente estável do sistema (17) e do sistema não linear (3). Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico quando $t \to \infty$. Um par de trajetórias tende ao ponto crítico ao longo da reta com coeficiente angular $\sqrt{2}/2$, determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Todas as outras trajetórias tendem ao ponto crítico tangencialmente à reta com coeficiente angular $-\sqrt{2}/2$, determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

A Figura 9.4.2 mostra um retrato de fase do sistema (3). Olhando bem de perto as trajetórias próximas de cada ponto crítico você pode ver que elas se comportam da maneira prevista pelo sistema linear perto daquele ponto. Além disso, note que os termos quadráticos à direita do sinal de igualdade na Eq. (3) são todos negativos. Como estes são os termos dominantes para x e y positivos e grandes, segue que, longe da origem no primeiro quadrante, x' e y' são negativos, ou seja, as trajetórias estão orientadas para dentro. Logo, todas as trajetórias que começam em um ponto (x_0, y_0) com $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ vão acabar tendendo ao ponto (0,5; 0,5).

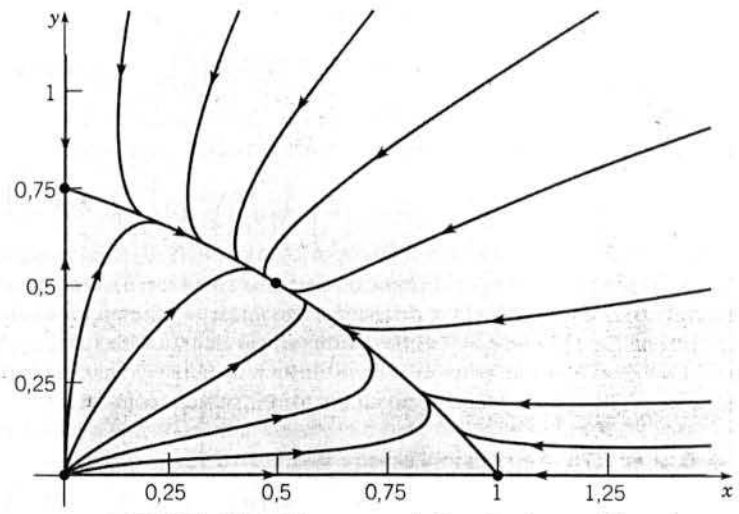


FIGURA 9.4.2 Um retrato de fase do sistema (3).

EXEMPLO 2

Discuta o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0,5 - 0,25y - 0,75x), \end{aligned} \tag{20}$$

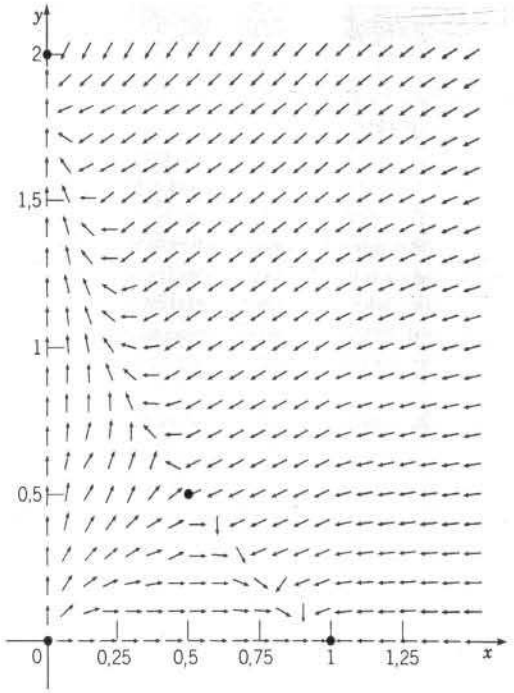


FIGURA 9.4.3 Pontos críticos e campo de direções para o sistema (20).

onde x e y não são negativos. Observe que este sistema é, também, um caso particular do sistema (2) para duas espécies em competição.

Mais uma vez, existem quatro pontos críticos, a saber, (0, 0), (1, 0), (0, 2) e (0,5; 0,5), correspondendo às posições de equilíbrio do sistema (20). A Figura 9.4.3 mostra um campo de direções para o sistema (20), junto com os quatro pontos críticos. Do campo de direções, parece que a solução de equilíbrio misto (0,5; 0,5) é um ponto de sela e, portanto, instável, enquanto os pontos (1, 0) e (0, 2) são assintoticamente estáveis. Assim, para a competição descrita pelas Eqs. (20) uma espécie vai acabar sobrepujando a outra, levando-a à extinção. A espécie sobrevivente é determinada pelo estado inicial do sistema. Para confirmar essas conclusões, vamos olhar as aproximações lineares perto de cada ponto crítico. Vamos registrar a matriz jacobiana **J** para usar mais tarde:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -0{,}75y & 0{,}5-0{,}5y-0{,}75x \end{pmatrix}. \tag{21}$$

$x = 0, y = 0$. Usando a matriz jacobiana **J** da Eq. (21) calculada em (0, 0), obtemos o sistema linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

que é válido perto da origem. Os autovalores e autovetores do sistema (22) são

$$r_1 = 1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 0{,}5, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0{,}5t}. \tag{24}$$

Portanto, a origem é um nó estável do sistema linear (22) e, também, do sistema não linear (20). Todas as trajetórias deixam a origem tangencialmente ao eixo dos y, exceto por uma trajetória que está contida no eixo dos x.

$x = 1, y = 0$. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$r_1 = -1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}25, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-0{,}25t}. \tag{27}$$

O ponto $(1, 0)$ é um nó assintoticamente estável do sistema linear (25) e do sistema não linear (20). Se os valores iniciais de x e y estão suficientemente próximos de $(1, 0)$, então o processo de interação vai chegar, finalmente, a esse estado, ou seja, à sobrevivência da espécie x e à extinção da espécie y. Existe um par de trajetórias que tende ao ponto crítico ao longo do eixo dos x. Todas as outras trajetórias tendem a $(1, 0)$ tangencialmente à reta com coeficiente angular –3/4 determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

$x = 0, y = 2$. A análise neste caso é semelhante à análise para o ponto $(1, 0)$. O sistema linear apropriado é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$r_1 = -1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}5, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0{,}5t}. \tag{30}$$

Logo, o ponto crítico $(0, 2)$ é um nó assintoticamente estável do sistema linear (28) e do sistema não linear (20). Todas as trajetórias tendem ao ponto crítico tangente ao eixo dos y, exceto por uma trajetória que se aproxima ao longo da reta com coeficiente angular 3.

$x = 0{,}5, y = 0{,}5$. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}375 & -0{,}125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-5 + \sqrt{57}}{16} \cong 0{,}1594, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 - \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}3187 \end{pmatrix}, \\ r_2 &= \frac{-5 - \sqrt{57}}{16} \cong -0{,}7844, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-3 + \sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5687 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{32}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}3187 \end{pmatrix} e^{0{,}1594t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5687 \end{pmatrix} e^{-0{,}7844t}. \tag{33}$$

Como os autovalores têm sinais opostos, o ponto crítico $(0{,}5; 0{,}5)$ é um ponto de sela e, portanto, instável, como tínhamos deduzido anteriormente. Todas as trajetórias se afastam da vizinhança do ponto crítico, exceto por um par que tende ao ponto de sela quando $t \to \infty$. Ao se aproximar do ponto crítico, as trajetórias entram tangencialmente à reta com coeficiente angular $(\sqrt{57} - 3)/8 \cong 0{,}5687$, determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Existe também um par de trajetórias que tende ao ponto de sela quando $t \to -\infty$. Essas trajetórias são tangentes à reta com coeficiente angular –1,3187 correspondente a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

A Figura 9.4.4 mostra um retrato de fase do sistema (20). Perto de cada ponto crítico as trajetórias do sistema não linear se comportam como previsto pela aproximação linear correspondente. De interesse especial é o par de trajetórias que entra no ponto de sela. Essas trajetórias formam uma separatriz que divide o primeiro quadrante em duas bacias de atração. As trajetórias começando acima da separatriz acabam se aproximando do nó em $(0, 2)$, enquanto as trajetórias começando abaixo da separatriz tendem ao nó em $(1, 0)$. Se o ponto inicial pertence à separatriz, então a solução (x, y) tende ao ponto de sela quando $t \to \infty$. No entanto, a menor perturbação ao se seguir essa trajetória vai deslocar o ponto (x, y) da separatriz e fazer com que ele se aproxime de um dos dois nós. Logo, na prática uma espécie vai sobreviver à competição e a outra não.

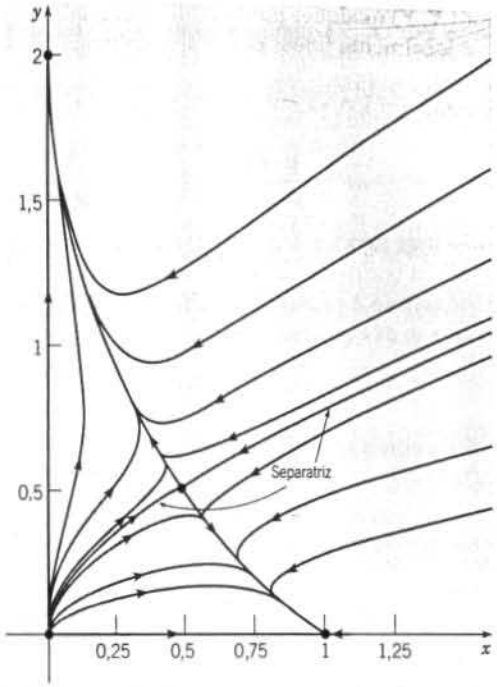


FIGURA 9.4.4 Um retrato de fase do sistema (20).

Os Exemplos 1 e 2 mostram que, em alguns casos, a competição entre duas espécies leva a um estado de equilíbrio de coexistência, enquanto em outros casos a competição resulta, finalmente, na extinção de uma das espécies. Para compreender mais claramente como e por que isso acontece, e para aprender como prever qual situação vai ocorrer, vamos olhar, mais uma vez, para o sistema geral (2). Existem quatro casos a serem considerados, dependendo da orientação relativa das retas

$$\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0, \tag{34}$$

como mostra a Figura 9.4.5. Essas retas são chamadas, respectivamente, de **retas de crescimento nulo** de x e y, já que x' se anula na primeira e y' na segunda. Em cada parte da Figura 9.4.5 a reta de crescimento nulo de x é a reta sólida e a de y é a reta tracejada.

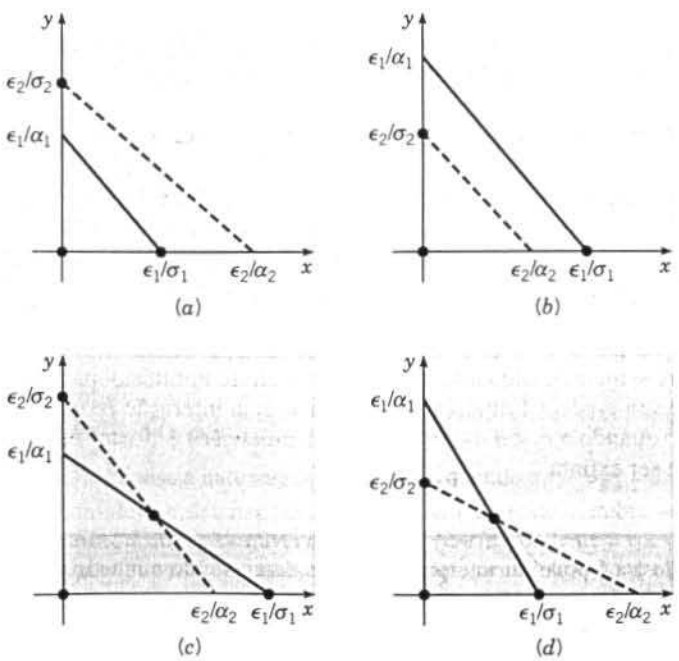


FIGURA 9.4.5 Os diversos casos para o sistema de espécies em competição (2). A reta de crescimento nulo de x é a reta sólida e a de y é a reta tracejada.

Denote por (X, Y) qualquer ponto crítico em qualquer um dos quatro casos. Como nos Exemplos 1 e 2, o sistema (2) é localmente linear em uma vizinhança desse ponto, já que a expressão à direita do sinal de igualdade em cada equação diferencial é um polinômio de grau 2. Para estudar o sistema (2) em uma vizinhança desse ponto crítico, vamos olhar o sistema linear correspondente obtido da Eq. (13) da Seção 9.3,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Vamos usar agora a Eq. (35) para determinar as condições sob as quais o modelo descrito pelas Eqs. (2) permite a coexistência das duas espécies x e y. Dos quatro casos possíveis ilustrados na Figura 9.4.5, a coexistência só é possível nos casos (c) e (d). Nesses casos os valores não nulos de X e Y são obtidos resolvendo-se as equações algébricas (34); o resultado é

$$X = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}, \qquad Y = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}. \tag{36}$$

Além disso, como $\epsilon_1 - \sigma_1 X - \alpha_1 Y = 0$ e $\epsilon_2 - \sigma_2 Y - \alpha_2 X = 0$, a Eq. (35) se reduz imediatamente a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 X & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & -\sigma_2 Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Os autovalores do sistema (37) são encontrados a partir da equação

$$r^2 + (\sigma_1 X + \sigma_2 Y)r + (\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY = 0. \tag{38}$$

Logo,

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) \pm \sqrt{(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY}}{2}. \tag{39}$$

Se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 < 0$, então o radicando na Eq. (39) é positivo e maior do que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Logo, os autovalores são reais e de sinais opostos. Em consequência, o ponto crítico (X, Y) é um ponto de sela (instável) e a coexistência não é possível. Esse é o caso no Exemplo 2, onde $\sigma_1 = 1, \alpha_1 = 1, \sigma_2 = 0{,}25, \alpha_2 = 0{,}75$ e $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = -0{,}5$.

Por outro lado, se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$, então o radicando na Eq. (39) é menor do que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Então, os autovalores são reais negativos e distintos, ou complexos conjugados com parte real negativa. Uma análise direta do radicando na Eq. (39) mostra que os autovalores não podem ser complexos (veja o Problema 7). Portanto, o ponto crítico é um nó assintoticamente estável e uma coexistência sustentável é possível. Isso está ilustrado no Exemplo 1, onde $\sigma_1 = 1, \alpha_1 = 1, \sigma_2 = 1, \alpha_2 = 0{,}5$ e $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0{,}5$.

Vamos relacionar esse resultado com as Figuras 9.4.5*c* e 9.4.5*d*. Na Figura 9.4.5*c*, temos

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad \epsilon_1\alpha_2 > \epsilon_2\sigma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} > \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \epsilon_2\alpha_1 > \epsilon_1\sigma_2. \tag{40}$$

Essas desigualdades, acopladas com a condição de que X e Y dados pela Eq. (36) são positivos, nos leva à desigualdade $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$. Logo, nesse caso o ponto crítico é um ponto de sela. Por outro lado, na Figura 9.4.5*d* temos

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad \epsilon_1\alpha_2 < \epsilon_2\sigma_1 \quad \text{e} \quad \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} < \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \epsilon_2\alpha_1 < \epsilon_1\sigma_2. \tag{41}$$

A condição de que X e Y são positivos nos leva, agora, a $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$. Portanto, o ponto crítico é assintoticamente estável. Para esse caso podemos mostrar, também, que os outros pontos críticos $(0, 0)$, $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ e $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ são instáveis. Assim, para quaisquer valores iniciais positivos de x e y as duas populações vão tender ao estado de equilíbrio de coexistência dado pelas Eqs. (36).

As Eqs. (2) fornecem a interpretação biológica do resultado de que a coexistência ocorre ou não dependendo de $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$ ser positivo ou negativo. Os σ medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre si mesma, enquanto os α medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre a outra espécie. Então, quando $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$, a interação (competição) é "fraca" e as espécies podem coexistir; quando $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$, a interação (competição) é "forte" e as espécies não podem coexistir — uma tem que ser extinta.

PROBLEMAS

Cada um dos Problemas de 1 a 6 pode ser interpretado como descrevendo a interação de duas espécies com populações x e y. Em cada um desses problemas, faça o seguinte:

(a) Desenhe um campo de direções e descreva como as soluções parecem se comportar.

(b) Encontre os pontos críticos.

(c) Para cada ponto crítico, encontre o sistema linear correspondente. Encontre os autovalores e autovetores do sistema linear; classifique cada ponto crítico em relação ao tipo e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável.

(d) Esboce as trajetórias em uma vizinhança de cada ponto crítico.

(e) Calcule e faça o gráfico de um número suficiente de trajetórias do sistema dado de modo a mostrar, claramente, o comportamento das soluções.

(f) Determine o comportamento limite de x e y quando $t \to \infty$ e interprete os resultados em termos das populações das duas espécies.

1. $dx/dt = x(1{,}5 - x - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(2 - y - 0{,}75x)$

2. $dx/dt = x(1{,}5 - x - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(2 - 0{,}5y - 1{,}5x)$

3. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5x - y)$
   $dy/dt = y(2 - y - 1{,}125x)$

4. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5x - y)$
   $dy/dt = y(0{,}75 - y - 0{,}125x)$

5. $dx/dt = x(1 - x - y)$
   $dy/dt = y(1{,}5 - y - x)$

6. $dx/dt = x(1 - x + 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(2{,}5 - 1{,}5y + 0{,}25x)$

7. Considere os autovalores dados pela Eq. (39) no texto. Mostre que

$$(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY = (\sigma_1 X - \sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 XY.$$

Portanto, conclua que os autovalores nunca podem ser complexos.

8. Duas espécies de peixe que competem por comida, mas não caçam um ao outro, são o *lepomis macrochirus*, um peixe de água fresca e cor azulada que habita águas norte-americanas, que chamaremos de peixe azulado, e *lepomis microlofus*, um peixe do sudeste e centro dos EUA, com guelra vermelha brilhante que chamaremos de vermelhão. Suponha que um lago está cheio desses dois tipos de peixes e denote por x e y, respectivamente, as populações de peixe azulado e vermelhão no instante t. Suponha, ainda, que a competição é modelada pelas equações

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y),$$
$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).$$

   (a) Se $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ e $\epsilon_2/\sigma_2 > \epsilon_1/\alpha_1$, mostre que as únicas populações de equilíbrio no lago são sem as duas espécies, sem o peixe azulado ou sem o vermelhão. O que vai acontecer para valores grandes de t?

   (b) Se $\epsilon_1/\sigma_1 > \epsilon_2/\alpha_2$ e $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, mostre que as únicas populações de equilíbrio no lago são sem as duas espécies, sem o vermelhão ou sem o peixe azulado. O que vai acontecer para valores grandes de t?

9. Considere a competição entre o peixe azulado e o vermelhão mencionada no Problema 8. Suponha que $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ e $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, de modo que, como mostrado no texto, existe um ponto de equilíbrio estável no qual ambas as espécies podem coexistir. É conveniente reescrever as equações do Problema 8 em termos das capacidades de saturação do lago para o peixe azulado ($B = \epsilon_1/\sigma_1$) na ausência de vermelhão e para o vermelhão ($R = \epsilon_2/\sigma_2$) na ausência do peixe azulado.

   (a) Mostre que as equações do Problema 8 tomam a forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x\left(1 - \frac{1}{B}x - \frac{\gamma_1}{B}y\right), \qquad \frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y\left(1 - \frac{1}{R}y - \frac{\gamma_2}{R}x\right),$$

   onde $\gamma_1 = \alpha_1/\sigma_1$ e $\gamma_2 = \alpha_2/\sigma_2$. Determine o ponto de equilíbrio de coexistência (X, Y) em função de B, R, γ_1 e γ_2.

   (b) Suponha, agora, que um pescador só pesca o peixe azulado, o que reduz B. Qual o efeito disso nas populações de equilíbrio? É possível, pescando, reduzir a população do peixe azulado a um tal nível que ele será extinto?

10. Considere o sistema (2) no texto e suponha que $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$.

   (a) Encontre todos os pontos críticos do sistema. Observe que o resultado depende se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1$ é nulo ou não.

   (b) Se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$, classifique cada ponto crítico e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável. Note que o Problema 5 é desse tipo. Depois, faça o mesmo se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$.

   (c) Analise a natureza das trajetórias quando $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$.

11. Considere o sistema (13) no Exemplo 1 do texto. Lembre-se de que esse sistema tem um ponto crítico assintoticamente estável em (0,5; 0,5), correspondente à coexistência estável das populações das duas espécies. Suponha, agora, que a imigração ou emigração ocorre com taxas constantes δa e δb para as espécies x e y, respectivamente. Nesse caso, as Eqs. (3) são substituídas por

$$dx/dt = x(1 - x - y) + \delta a,$$
$$dy/dt = y(0{,}75 - y - 0{,}5x) + \delta b. \tag{i}$$

A pergunta é que efeito isso tem na localização do ponto de equilíbrio estável.

(a) Para encontrar o novo ponto crítico, precisamos resolver as equações

$$x(1 - x - y) + \delta a = 0,$$
$$y(0{,}75 - y - 0{,}5x) + \delta b = 0. \tag{ii}$$

Um modo de fazer isso é supor que x e y são dados por séries de potências no parâmetro δ; então,

$$x = x_0 + x_1\delta + \cdots, \qquad y = y_0 + y_1\delta + \cdots. \tag{iii}$$

Substitua as Eqs. (iii) nas Eqs. (ii) e junte os termos de acordo com as potências de δ.

(b) Dos termos constantes (os termos que não envolvem δ). mostre que $x_0 = 0.5$ e $y_0 = 0{,}5$, confirmando, assim, que na falta de imigração ou emigração o ponto crítico é (0,5; 0,5).

(c) Dos termos lineares em δ, mostre que

$$x_1 = 4a - 4b, \qquad y_1 = -2a + 4b. \tag{iv}$$

(d) Suponha que $a > 0$ e $b > 0$, de modo que a imigração ocorre em ambas as espécies. Mostre que a solução de equilíbrio resultante pode representar um aumento nas duas populações ou um acréscimo em uma e um decréscimo em outra. Explique, intuitivamente, por que esse é um resultado razoável.

12. O sistema

$$x' = -y, \qquad y' = -\gamma y - x(x - 0{,}15)(x - 2)$$

resulta de uma aproximação das equações de Hodgkin-Huxley,[5] que moderam a transmissão de impulsos neurais ao longo de um axônio.[†]

(a) Encontre os pontos críticos e classifique-os, investigando o sistema linear aproximado perto de cada um.

(b) Desenhe os retratos de fase para $\gamma = 0{,}8$ e $\gamma = 1{,}5$.

(c) Considere a trajetória que sai do ponto crítico (2, 0). Encontre o valor de γ para o qual essa trajetória se aproxima da origem quando $t \to \infty$. Desenhe um retrato de fase para esse valor de γ.

Pontos de Bifurcação. Considere o sistema

$$x' = F(x, y, \alpha), \qquad y' = G(x, y, \alpha), \tag{i}$$

onde α é um parâmetro. As equações

$$F(x, y, \alpha) = 0, \qquad G(x, y, \alpha) = 0 \tag{ii}$$

determinam as retas de crescimento nulo de x e de y, respectivamente; qualquer ponto onde as retas de crescimento nulo de x e de y se intersectam é um ponto crítico. Quando α varia e as configurações das retas de crescimento nulo mudam, pode acontecer que para determinado valor de α dois pontos críticos se juntem, formando um só. Quando α continuar variando, esse ponto crítico pode se separar novamente em dois ou pode desaparecer completamente. Ou o processo pode acontecer ao contrário: para determinado valor de α, duas retas de crescimento nulo que não se encontravam podem se intersectar criando um ponto crítico e, quando α continua a variar, esse ponto pode se dividir em dois. Um valor de α para o qual esse fenômeno ocorre é um ponto de bifurcação. Também é usual para um ponto crítico mudar seu tipo e suas propriedades de estabilidade em um ponto de bifurcação. Assim, tanto o número quanto o tipo dos pontos críticos podem variar abruptamente quando α passa por um ponto de bifurcação. Como o retrato de fase de um sistema depende muito da localização e natureza dos pontos críticos, é essencial se ter uma boa compreensão de bifurcações para se entender o comportamento global das soluções do sistema.

Em cada um dos Problemas de 13 a 16:

(a) Esboce as retas de crescimento nulo e descreva como os pontos críticos se movem quando α aumenta.

(b) Encontre os pontos críticos.

---

[5]Alan L. Hodgkin (1914-1998) e Andrew F. Huxley (1917-) ganharam o Prêmio Nobel em Fisiologia e Medicina em 1963 por seu trabalho sobre a excitação e a transmissão de impulsos neurais. Esse trabalho foi realizado na Universidade de Cambridge; seus resultados foram publicados pela primeira vez em 1952.

[†]Prolongamento da célula nervosa; cilindro-eixo. (N.T.)

(c) Seja $\alpha = 2$. Classifique cada ponto crítico investigando o sistema linear correspondente. Desenhe um retrato de fase em um retângulo contendo os pontos críticos.

(d) Encontre o ponto de bifurcação α_0 no qual os pontos críticos coincidem. Localize esse ponto crítico e encontre os autovalores do sistema linear aproximado. Desenhe um retrato de fase.

(e) Para $\alpha > \alpha_0$ não existem pontos críticos. Escolha um valor de α e desenhe um retrato de fase.

13. $x' = -4x + y + x^2, \quad y' = \frac{3}{2}\alpha - y$

14. $x' = \frac{3}{2}\alpha - y, \quad y' = -4x + y + x^2$

15. $x' = -4x + y + x^2, \quad y' = -\alpha - x + y$

16. $x' = -\alpha - x + y, \quad y' = -4x + y + x^2$

Os Problemas de 17 a 19 tratam de sistemas competitivos, bem semelhantes aos dos Exemplos 1 e 2, exceto que alguns coeficientes dependem do parâmetro α. Em cada um desses problemas suponha que x, y e α são sempre não negativos. Em cada um dos Problemas de 17 a 19:

(a) Esboce as retas de crescimento nulo no primeiro quadrante, como na Figura 9.4.5. Para intervalos diferentes de α, seu esboço pode se assemelhar a partes diferentes da Figura 9.4.5.

(b) Encontre os pontos críticos.

(c) Determine os pontos de bifurcação.

(d) Encontre a matriz jacobiana $\mathbf{J}$ e calcule-a em cada um dos pontos críticos.

(e) Determine o tipo e as propriedades de estabilidade de cada ponto crítico. Dê atenção especial ao que acontece quando α passa por um ponto de bifurcação.

(f) Desenhe retratos de fase para o sistema para valores selecionados de α para confirmar suas conclusões.

17. $dx/dt = x(1 - x - y), \quad dy/dt = y(\alpha - y - 0{,}5x)$

18. $dx/dt = x(1 - x - y), \quad dy/dt = y(0{,}75 - \alpha y - 0{,}5x)$

19. $dx/dt = x(1 - x - y), \quad dy/dt = y[\alpha - y - (2\alpha - 1)x]$

9.5 Equações Predador-Presa

Na seção precedente, discutimos um modelo de duas espécies que interagem competindo por um suprimento comum de comida ou outro recurso natural. Nesta seção, vamos investigar a situação em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Considere, por exemplo, raposas e coelhos em uma floresta fechada: as raposas caçam os coelhos, que vivem da vegetação na floresta. Outros exemplos são peixes que se alimentam dos vermelhões, que encontramos anteriormente, em um mesmo lago, ou a joaninha como predador e o pulgão como presa. Enfatizamos, mais uma vez, que um modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem, de fato, na natureza. Apesar disso, o estudo de modelos simples é o primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complicados.

Vamos denotar por x e y as populações, respectivamente, da presa e do predador em um instante t. Ao construir a interação de duas espécies, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual; assim, $dx/dt = ax$, $a > 0$, quando $y = 0$.
2. Na ausência da presa, o predador é extinto; assim, $dy/dt = -cy$, $c > 0$, quando $x = 0$.
3. O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy, enquanto a taxa de crescimento para a população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$, onde γ e α são constantes positivas.

Em consequência dessas hipóteses, somos levados às equações

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{aligned} \tag{1}$$

As constantes a, c, α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as

duas espécies. As equações (1) são chamadas de equações de Lotka-Volterra. Foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka[6] em 1925 e por Volterra[7] em 1926. Embora essas equações sejam bem simples, elas caracterizam uma classe ampla de problemas. Ao final desta seção e nos problemas discutiremos maneiras de torná-las mais realistas. Nosso objetivo aqui é determinar o comportamento qualitativo das soluções (trajetórias) do sistema (1) para valores iniciais positivos arbitrários de x e de y. Vamos fazer isso primeiro para um exemplo específico e voltaremos, depois, no final desta seção, às equações gerais (1).

EXEMPLO 1

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1-0{,}5y) = x - 0{,}5xy = F(x,y), \\ dy/dt &= y(-0{,}75+0{,}25x) = -0{,}75y + 0{,}25xy = G(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

para x e y positivos.

Os pontos críticos deste sistema são as soluções das equações algébricas

$$x(1-0{,}5y) = 0, \qquad y(-0{,}75+0{,}25x) = 0, \tag{3}$$

a saber, os pontos $(0,0)$ e $(3,2)$. A Figura 9.5.1 mostra os pontos críticos e um campo de direções para o sistema (2). Dessa figura, parece que as trajetórias no primeiro quadrante circulam em torno do ponto crítico $(3, 2)$. Não é possível determinar definitivamente do campo de direções se as trajetórias são de fato curvas fechadas ou se elas espiralam para dentro ou para fora. A origem parece ser um ponto de sela. Da mesma forma que nas equações competitivas na Seção 9.4, os eixos coordenados são trajetórias da Eqs. (1) ou (2). Em consequência, nenhuma outra trajetória pode cruzar um eixo coordenado, o que significa que toda solução que começa no primeiro quadrante permanece aí para todo o sempre.

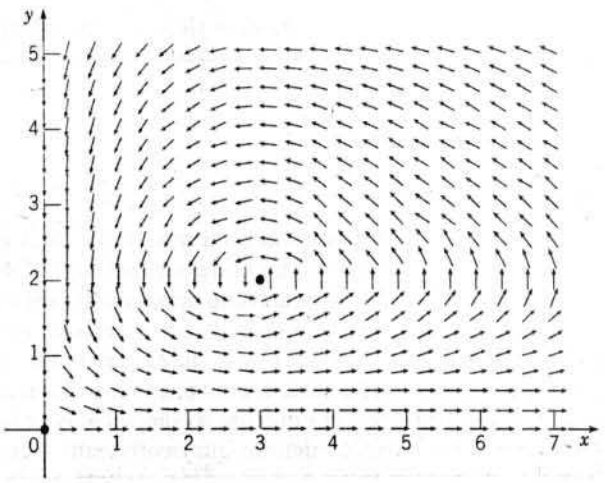


FIGURA 9.5.1 Pontos críticos e campo de direções para o sistema predador-presa (2).

Vamos examinar, a seguir, o comportamento local das soluções perto de cada ponto crítico. Perto da origem podemos desprezar os termos não lineares nas Eqs. (2) para obter o sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

[6]Alfred J. Lotka (1880-1949), um biofísico americano, nasceu onde é hoje a Ucrânia, e a maior parte de sua educação foi adquirida na Europa. É lembrado principalmente por sua formulação das equações de Lotka-Volterra. Foi também o autor, em 1924, do primeiro livro sobre biologia matemática, disponível, atualmente, com o título de *Elements of Mathematical Biology* (Nova York: Dover, 1956).

[7]Vito Volterra (1860-1940), um importante matemático italiano, foi catedrático em Pisa, Turim e Roma. É particularmente famoso por seu trabalho em equações integrais e análise funcional. De fato, uma das maiores classes de equações integrais leva seu nome; veja o Problema 21 da Seção 6.6. Sua teoria de espécies interagindo foi motivada por dados obtidos por um amigo, D'Ancona, relativos à pesca no Mar Adriático. Uma tradução (para o inglês) de seu artigo de 1926 pode ser encontrada em um apêndice do livro de R. N. Chapman, *Animal Ecology with Special Reference to Insects* (Nova York: McGraw-Hill, 1931).

Os autovalores e autovetores da Eq. (4) são

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}75, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0{,}75t}. \tag{6}$$

Assim, a origem é um ponto de sela para ambos os sistemas, o linear (4) e o não linear (2), e, portanto, instável. Um par de trajetórias entra na origem ao longo do eixo dos y; todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem.

Para examinar o ponto crítico (3, 2), podemos usar a matriz jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}5y & -0{,}5x \\ 0{,}25y & -0{,}75 + 0{,}25x \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Calculando $\mathbf{J}$ no ponto (3, 2), obtemos o sistema linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{8}$$

onde $u = x - 3$ e $v = y - 2$. Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -\frac{\sqrt{3}\,i}{2}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Como os autovalores são imaginários, o ponto crítico (3, 2) é um centro do sistema linear (8) e é, portanto, um ponto crítico estável para esse sistema. Lembre-se, da Seção 9.3, de que esse é um dos casos em que o comportamento do sistema linear pode ser o mesmo, ou não, do sistema não linear, de modo que a natureza do ponto (3, 2) para o sistema não linear (2) não pode ser determinada por essa informação.

A maneira mais simples de encontrar as trajetórias do sistema linear (8) é dividir a segunda das Eqs. (8) pela primeira, de modo a obter a equação diferencial

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0{,}5u}{-1{,}5v} = -\frac{u}{3v},$$

ou

$$u\,du + 3v\,dv = 0. \tag{10}$$

Em consequência,

$$u^2 + 3v^2 = k, \tag{11}$$

onde k é uma constante de integração não negativa arbitrária. Logo, as trajetórias do sistema linear (8) são elipses centradas no ponto crítico e um tanto alongadas na direção horizontal.

Vamos voltar para o sistema não linear (2). Dividindo a segunda das Eqs. (2) pela primeira, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0{,}75 + 0{,}25x)}{x(1 - 0{,}5y)}. \tag{12}$$

A Eq. (12) é uma equação separável e pode ser colocada na forma

$$\frac{1 - 0{,}5y}{y}\,dy = \frac{-0{,}75 + 0{,}25x}{x}\,dx,$$

donde segue que

$$0{,}75 \ln x + \ln y - 0{,}5y - 0{,}25x = c, \tag{13}$$

onde c é uma constante de integração. Embora não possamos resolver a Eq. (13), explicitamente, usando apenas funções elementares, para qualquer uma das variáveis em função da outra é possível mostrar que o gráfico da equação, para um valor fixo de c, é uma curva fechada em torno do ponto (3, 2). Logo, o ponto crítico também é um centro para o sistema não linear (2), e as populações de predadores e presas exibem uma variação cíclica.

A Figura 9.5.2 mostra um retrato de fase para o sistema (2). Para algumas condições iniciais a trajetória representa pequenas variações em x e y em torno do ponto crítico e tem uma forma quase elíptica, como sugere o sistema linear. Para outras condições iniciais as oscilações em x e y são mais pronunciadas e a forma da trajetória é bem diferente de uma elipse. Observe que as trajetórias são percorridas no sentido trigonométrico. A Figura 9.5.3 mostra a dependência de x e y em t para um conjunto típico de condições iniciais. Note que x e y são funções periódicas de t, como têm que ser, já que as trajetórias são curvas fechadas. Além disso, a oscila-

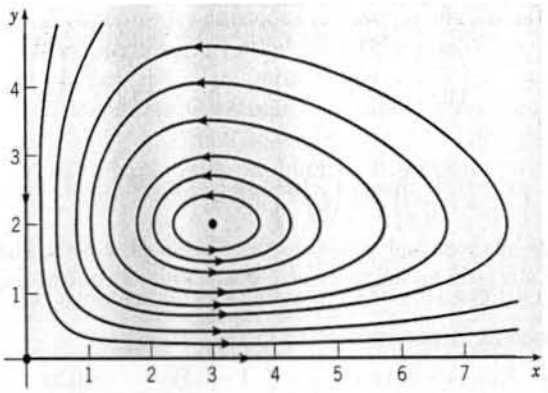


FIGURA 9.5.2 Um retrato de fase para o sistema (2).

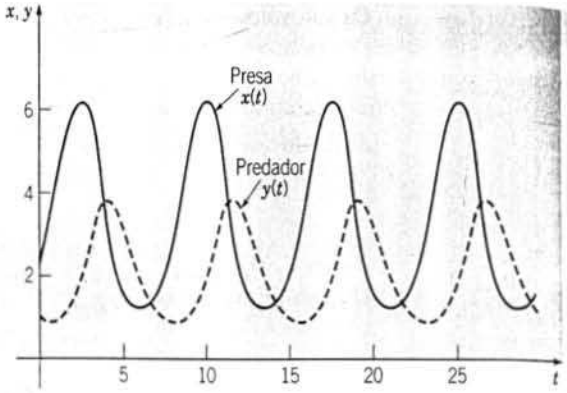


FIGURA 9.5.3 Variações nas populações de presas e de predadores em relação ao tempo para o sistema (2).

ção da população predadora vem depois da oscilação de presas. Começando em um estado no qual ambas as populações, de predadores e de presas, são relativamente pequenas, há primeiro um aumento no número de presas, já que há poucos predadores. Então a população de predadores, com comida abundante, também cresce. Isso aumenta a caça e a população de presas tende a diminuir. Finalmente, com uma disponibilidade menor de comida, a população de predadores também diminui, e o sistema volta ao seu estado original.

O sistema geral (1) pode ser analisado exatamente do mesmo modo que no exemplo. Os pontos críticos do sistema (1) são as soluções de

$$x(a - \alpha y) = 0, \qquad y(-c + \gamma x) = 0,$$

ou seja, os pontos $(0, 0)$ e $(c/\gamma, a/\alpha)$. Vamos examinar primeiro as soluções do sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = a, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -c, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{at} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-ct}. \tag{16}$$

Logo, a origem é um ponto de sela e, portanto, instável. A entrada no ponto de sela é através do eixo dos y; todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança do ponto crítico.

A seguir, considere o ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. A matriz jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{pmatrix}.$$

Calculando $\mathbf{J}$ em $(c/\gamma, a/\alpha)$, obtemos o sistema linear aproximado

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{17}$$

onde $u = x - (c/\gamma)$ e $v = y - (a/\alpha)$. Os autovalores do sistema (17) são $r = \pm i\sqrt{ac}$, de modo que o ponto crítico é um centro (estável) para o sistema linear. Para encontrar as trajetórias do sistema (17), podemos dividir a segunda equação pela primeira para obter

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}, \tag{18}$$

ou

$$\gamma^2 au\,du + \alpha^2 cv\,dv = 0. \tag{19}$$

Em consequência,

$$\gamma^2 au^2 + \alpha^2 cv^2 = k, \tag{20}$$

onde k é uma constante de integração não negativa. Logo, as trajetórias do sistema linear (17) são elipses, como no exemplo.

Voltando, rapidamente, ao sistema não linear (1), note que ele pode ser reduzido a uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c+\gamma x)}{x(a-\alpha y)}. \tag{21}$$

A Eq. (21) é separável e tem solução

$$a\ln y - \alpha y + c\ln x - \gamma x = C, \tag{22}$$

onde C é uma constante de integração. Mais uma vez, é possível mostrar que o gráfico da Eq. (22) é uma curva fechada em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$ para C fixo. Logo, este ponto crítico também é um centro para o sistema geral não linear (1).

A variação cíclica das populações de predadores e de presas pode ser analisada em mais detalhe quando os desvios em relação ao ponto $(c/\gamma, a/\alpha)$ são pequenos e pode-se usar o sistema linear (17). A solução do sistema (17) pode ser escrita na forma

$$u = \frac{c}{\gamma} K\cos(\sqrt{ac}\,t + \phi), \qquad v = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K\,\mathrm{sen}(\sqrt{ac}\,t + \phi), \tag{23}$$

onde as constantes K e ϕ são determinadas pelas condições iniciais. Assim,

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K\cos(\sqrt{ac}\,t + \phi), \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K\,\mathrm{sen}(\sqrt{ac}\,t + \phi). \end{aligned} \tag{24}$$

Essas equações são boas aproximações para as trajetórias quase elípticas perto do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Podemos usá-las para tirar diversas conclusões sobre a variação cíclica das populações de predadores e de presas em tais trajetórias.

1. Os tamanhos das populações de predadores e de presas variam de forma senoidal com período $2\pi/\sqrt{ac}$. Esse período de oscilação é independente das condições iniciais.
2. As populações de predadores e presas estão defasadas por um quarto de ciclo. O número de presas varia primeiro e o número de predadores varia depois, como explicado no exemplo.
3. As amplitudes das oscilações são Kc/γ para a população de presas e $a\sqrt{c}K/\alpha\sqrt{a}$ para a de predadores, e portanto dependem tanto das condições iniciais quanto dos parâmetros do problema.
4. As populações médias de predadores e de presas em um ciclo completo são c/γ e a/α, respectivamente. Elas são iguais às populações de equilíbrio; veja o Problema 10.

Variações cíclicas nas populações de predadores e de presas, como previsto pelas Eqs. (1), foram observadas na natureza. Um exemplo impressionante foi descrito por Odum (pp. 191-192); com base nos registros da Companhia Hudson Bay, do Canadá, a abundância de linces e de lebres, como indicado pelo número de peles compradas no período 1845-1935, mostra uma clara variação periódica com período de 9 a 10 anos. Os picos de abundância são seguidos por declínios muito rápidos, e os picos de abundância de linces e de lebres estão defasados, com os das lebres antecedendo os dos linces por um ano ou mais.

Como o ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$ é um centro, esperamos que pequenas perturbações das equações de Lotka-Volterra possam levar a soluções que não são periódicas. Em outras palavras, a menos que as equações de Lotka-Volterra descrevam exatamente uma relação predador-presa, as flutuações das populações de fato podem ser muito diferentes das previstas pelas equações de Lotka-Volterra devido a pequenas imprecisões nas equações do modelo. Isso levou a muitas tentativas[8] de substituir as equações de Lotka-Volterra por outros sistemas menos suscetíveis a pequenas perturbações. O Problema 13 introduz um desses modelos alternativos.

[8]Veja o livro de Brauer e Castillo-Chávez listado nas referências para uma longa discussão sobre modelos alternativos para as relações predador-presa.

Outra crítica das equações de Lotka-Volterra é que, na ausência de predadores, a população de presas aumenta sem limites. Isso pode ser corrigido permitindo-se o efeito natural inibidor que uma população crescente tem sobre a taxa de crescimento populacional. Por exemplo, a primeira das Eqs. (1) pode ser modificada de modo que quando $y = 0$ ela se reduza a uma equação logística para x. Os efeitos dessa modificação são explorados nos Problemas 11 e 12. Os Problemas de 14 a 16 tratam do controle de uma relação predador-presa. Os resultados podem parecer bem pouco intuitivos.

Finalmente, repetimos um aviso dado antes: as relações entre as espécies na vida real são muitas vezes complexas e sutis. Você não deve esperar demais de um sistema simples de duas equações diferenciais para descrever tais relações. Mesmo se você estiver convencido de que a forma geral das equações é sólida, a determinação de valores numéricos para os coeficientes pode apresentar sérias dificuldades.

PROBLEMAS

Cada um dos Problemas de 1 a 5 pode ser interpretado como descrevendo a interação entre duas espécies com densidades populacionais x e y. Em cada um desses problemas, faça o seguinte:

(a) Desenhe um campo de direções e descreva como as soluções parecem se comportar.

(b) Encontre os pontos críticos.

(c) Para cada ponto crítico, ache o sistema linear correspondente. Encontre os autovalores e autovetores do sistema linear; classifique cada ponto crítico em relação ao tipo e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável.

(d) Esboce as trajetórias em uma vizinhança de cada ponto crítico.

(e) Desenhe um retrato de fase para o sistema.

(f) Determine o comportamento limite de x e y quando $t \to \infty$ e interprete os resultados em termos das populações das duas espécies.

1. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}5 + x)$

2. $dx/dt = x(1 - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}25 + 0{,}5x)$

3. $dx/dt = x(1 - 0{,}5x - 0.5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}25 + 0{,}5x)$

4. $dx/dt = x(1{,}125 - x - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-1 + x)$

5. $dx/dt = x(-1 + 2{,}5x - 0{,}3y - x^2)$
   $dy/dt = y(-1{,}5 + x)$

6. Neste problema, vamos examinar a diferença de fase entre as variações cíclicas das populações de predadores e presas dadas pelas Eqs. (24) desta seção. Vamos supor que $K > 0$ e que o tempo t é medido a partir de um instante onde a população de presas é máxima; então $\phi = 0$.
   (a) Mostre que a população y de predadores tem um máximo em $t = \pi/2\sqrt{ac} = T/4$, onde T é o período da oscilação.
   (b) Quando a população de presas está crescendo o mais rapidamente possível? Quando está diminuindo o mais rapidamente possível? Quando atinge um mínimo?
   (c) Responda às perguntas no item (b) para a população de predadores.
   (d) Desenhe uma trajetória elíptica típica em torno do ponto $(c/\gamma, a/\alpha)$ e marque os pontos encontrados nos itens (a), (b) e (c) nela.

7. (a) Encontre a razão entre as amplitudes das oscilações das populações de presas e de predadores em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$ usando a aproximação (24), válida para oscilações pequenas. Observe que a razão é independente das condições iniciais.
   (b) Calcule a razão encontrada no item (a) para o sistema (2).
   (c) Estime a razão entre as amplitudes para a solução do sistema não linear (2) ilustrada na Figura 9.5.3. Esse resultado está de acordo com o obtido da aproximação linear?
   (d) Determine a razão entre as amplitudes presa-predador para outras soluções do sistema (2), ou seja, para soluções satisfazendo outras condições iniciais. A razão é independente das condições iniciais?

8. (a) Encontre o período de oscilação das populações de presas e de predadores usando a aproximação (24), válida para pequenas oscilações. Note que o período independe da amplitude das oscilações.
   (b) Para a solução do sistema (2) ilustrada na Figura 9.5.3, estime o período o melhor possível. O resultado é o mesmo que da aproximação linear?
   (c) Calcule outras soluções do sistema (2), ou seja, soluções satisfazendo outras condições iniciais, e determine seus períodos. O período é o mesmo para todas as condições iniciais?

9. Considere o sistema

$$dx/dt = ax[1 - (y/2)], \qquad dy/dt = by[-1 + (x/3)],$$

onde a e b são constantes positivas. Observe que esse sistema é igual ao do exemplo no texto se $a = 1$ e $b = 0{,}75$. Suponha que as condições iniciais são $x(0) = 5$ e $y(0) = 2$.

(a) Sejam $a = 1$ e $b = 1$. Desenhe a trajetória no plano de fase e determine (ou estime) o período da oscilação.

(b) Repita o item (a) para $a = 3$ e $a = 1/3$, com $b = 1$.

(c) Repita o item (a) para $b = 3$ e $b = 1/3$, com $a = 1$.

(d) Descreva a dependência do período e da forma da trajetória em a e b.

10. As populações médias de presas e predadores são definidas por

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} x(t)\,dt, \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} y(t)\,dt,$$

respectivamente, onde T é o período de um ciclo completo e A é uma constante não negativa arbitrária.

(a) Usando a aproximação (24), válida perto do ponto crítico, mostre que $\bar{x} = c/\gamma$ e $\bar{y} = a/\alpha$.

(b) Para a solução do sistema não linear (2), ilustrada na Figura 9.5.3, estime $\bar{x}$ e $\bar{y}$ o melhor que puder. Tente determinar se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são dados por c/γ e a/α, respectivamente, nesse caso.

Sugestão: considere como você pode estimar o valor de uma integral mesmo sem ter uma fórmula para o integrando.

(c) Calcule outras soluções do sistema (2), ou seja, soluções satisfazendo outras condições iniciais, e determine $\bar{x}$ e $\bar{y}$ para essas soluções. Os valores de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os mesmos para todas as soluções?

Nos Problemas 11 e 12 vamos considerar o efeito de se modificar a equação para a presa x incluindo-se um termo $-\sigma x^2$, de modo que essa equação se reduza à equação logística na ausência do predador y. O Problema 11 trata de um sistema específico desse tipo e o Problema 12 leva essa modificação para o sistema de Lotka-Volterra geral. Os sistemas nos Problemas 3 e 4 são outros exemplos desse tipo.

11. Considere o sistema

$$x' = x(1 - \sigma x - 0{,}5y), \qquad y' = y(-0{,}75 + 0{,}25x), \tag{25}$$

onde $\sigma > 0$. Observe que este sistema é uma modificação do sistema (2) no Exemplo 1.

(a) Encontre todos os pontos críticos. Como variam suas localizações quando σ aumenta a partir de zero? Note que só existe um ponto crítico no interior do primeiro quadrante se $\sigma < 1/3$.

(b) Determine o tipo e as propriedades de estabilidade de cada ponto crítico. Encontre o valor $\sigma_1 < 1/3$ onde a natureza do ponto crítico no interior do primeiro quadrante muda. Descreva a mudança que ocorre quando σ passa por σ_1.

(c) Desenhe um campo de direções e um retrato de fase para um valor de σ entre zero e σ_1; para um valor de σ entre σ_1 e 1/3.

(d) Descreva o efeito nas duas populações quando σ varia de zero a 1/3.

12. Considere o sistema

$$dx/dt = x(a - \sigma x - \alpha y), \qquad dy/dt = y(-c + \gamma x),$$

onde a, σ, α, c e γ são constantes positivas.

(a) Encontre todos os pontos críticos do sistema dado. Como variam suas localizações quando σ aumenta a partir de zero? Suponha que $a/\sigma > c/\gamma$, ou seja, $\sigma < a\gamma/c$. Por que essa hipótese é necessária?

(b) Determine a natureza e as propriedades de estabilidade de cada ponto crítico.

(c) Mostre que existe um valor de σ entre zero e $a\gamma/c$ onde o ponto crítico no interior do primeiro quadrante muda de um ponto espiral para um nó.

(d) Descreva o efeito nas duas populações quando σ varia de zero a $a\gamma/c$.

13. Nas equações de Lotka-Volterra, a interação entre as duas espécies é modelada por termos proporcionais ao produto xy das duas populações. Se a população de presas é muito maior do que a de predadores, esse valor pode ser muito maior do que as interações; por exemplo, um predador pode caçar só quando está com fome, ignorando a presa em todos os outros momentos. Neste problema, vamos considerar um modelo alternativo de um tipo proposto por Rosenzweig e MacArthur.[9]

(a) Considere o sistema

$$x' = x\left(1 - 0{,}2x - \frac{2y}{x+6}\right), \quad y' = y\left(-0{,}25 + \frac{x}{x+6}\right).$$

[9]Veja o livro de Brauer e Castillo-Chávez para mais detalhes.

Determine todos os pontos críticos deste sistema.

(b) Determine o tipo e as características de estabilidade de cada ponto crítico.

(c) Desenhe um campo de direções e um retrato de fase para este sistema.

Administrando uma Relação Predador-Presa. Em uma situação predador-presa, pode ocorrer que uma ou talvez as duas espécies sejam fontes valiosas de comida (por exemplo). Ou a presa pode ser considerada uma peste, levando a esforços para que seu número seja reduzido. Em um modelo de administração com esforço constante, introduzimos um termo $-E_1x$ na equação da presa e um termo $-E_2y$ na equação do predador, em que E_1 e E_2 são medidas do esforço investido na administração das respectivas espécies. Um modelo de administração com produção constante é obtido incluindo-se um termo $-H_1$ na equação da presa e um termo $-H_2$ na equação do predador. As constantes E_1, E_2, H_1 e H_2 são sempre maiores ou iguais a zero. Os Problemas 14 e 15 tratam de modelos de administração com esforço constante, enquanto o Problema 16 trata de modelos de administração com produção constante.

14. Aplicando um modelo de administração com esforço constante às equações de Lotka-Volterra (1), obtemos o sistema

$$x' = x(a - \alpha y - E_1), \quad y' = y(-c + \gamma x - E_2).$$

Quando não há administração, a solução de equilíbrio é $(c/\gamma, a/\alpha)$.

(a) Antes de fazer qualquer análise matemática, pense sobre a situação intuitivamente. Como você acha que as populações irão variar se apenas as presas forem administradas? E se só os predadores forem administrados? E se ambos forem administrados?

(b) Como varia a solução de equilíbrio se as presas forem administradas, mas os predadores não ($E_1 > 0$, $E_2 = 0$)?

(c) Como varia a solução de equilíbrio se os predadores forem administrados, mas as presas não ($E_1 = 0$, $E_2 > 0$)?

(d) Como varia a solução de equilíbrio se ambos forem administrados ($E_1 > 0$, $E_2 > 0$)?

15. Se modificarmos as equações de Lotka-Volterra incluindo um termo autolimitador $-\sigma x^2$ na equação da presa e depois supusermos uma administração com esforço constante, obteremos as equações

$$x' = x(a - \sigma x - \alpha y - E_1), \quad y' = y(-c + \gamma x - E_2).$$

Na ausência de administração, a solução de equilíbrio de interesse é $x = c/\gamma$, $y = (a/\alpha) - (\sigma c)/(\alpha\gamma)$.

(a) Como varia a solução de equilíbrio se as presas forem administradas, mas os predadores não ($E_1 > 0$, $E_2 = 0$)?

(b) Como varia a solução de equilíbrio se os predadores forem administrados, mas as presas não ($E_1 = 0$, $E_2 > 0$)?

(c) Como varia a solução de equilíbrio se ambos forem administrados ($E_1 > 0$, $E_2 > 0$)?

16. Neste problema aplicamos um modelo de administração com produção constante na situação no Exemplo 1. Considere o sistema

$$x' = x(1 - 0{,}5y) - H_1, \quad y' = y(-0{,}75 + 0{,}25x) - H_2,$$

onde H_1 e H_2 são constantes não negativas. Lembre-se de que se $H_1 = H_2 = 0$, então $(3, 2)$ é uma solução de equilíbrio para esse sistema.

(a) Antes de fazer qualquer análise matemática, pense sobre a situação intuitivamente. Como você acha que as populações irão variar se apenas as presas forem administradas? E se só os predadores forem administrados? E se ambos forem administrados?

(b) Como varia a solução de equilíbrio se as presas forem administradas, mas os predadores não ($H_1 > 0$, $H_2 = 0$)?

(c) Como varia a solução de equilíbrio se os predadores forem administrados, mas as presas não ($H_1 = 0$, $H_2 > 0$)?

(d) Como varia a solução de equilíbrio se ambos forem administrados ($H_1 > 0$, $H_2 > 0$)?

9.6 O Segundo Método de Liapunov

Na Seção 9.3 mostramos como a estabilidade de um ponto crítico de um sistema localmente linear pode ser estabelecida, em geral, através de um estudo do sistema linear correspondente. No entanto, nada se

pode concluir quando o ponto crítico é um centro do sistema linear correspondente. Exemplos dessa situação são o pêndulo não amortecido, as Eqs. (1) e (2) a seguir e o problema predador-presa discutido na Seção 9.5. Para um ponto crítico assintoticamente estável pode ser importante, também, investigar a bacia de atração — ou seja, o domínio tal que todas as soluções que começam nele tendem ao ponto crítico. A teoria de sistemas localmente lineares não fornece informações sobre esse problema.

Nesta seção vamos discutir outra abordagem, conhecida como o **segundo método de Liapunov**[10] ou **método direto**. O método também é conhecido como método direto porque não há necessidade de se conhecer algo sobre a solução do sistema de equações diferenciais. Em vez disso, chega-se a conclusões sobre a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico através da construção de uma função auxiliar apropriada. Essa é uma técnica muito poderosa que fornece um tipo de informação mais global, por exemplo, uma estimativa da extensão da bacia de atração de um ponto crítico. Além disso, o segundo método de Liapunov pode ser usado para estudar sistemas de equações que não são localmente lineares; no entanto, não discutiremos tais problemas.

Basicamente, o segundo método de Liapunov é uma generalização de dois princípios físicos para sistemas conservativos, a saber, (i) uma posição de repouso é estável se a energia potencial é um mínimo local, caso contrário é instável, e (ii) a energia total é constante durante todo o movimento. Para ilustrar esses conceitos, considere, novamente, o pêndulo não amortecido (um sistema mecânico conservativo), que é governado pela equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{1}$$

O sistema de primeira ordem correspondente é

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen} x, \tag{2}$$

onde $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$. Se omitirmos uma constante arbitrária, a energia potencial U é o trabalho feito ao se levantar o pêndulo para uma posição acima da sua posição mais baixa, a saber,

$$U(x, y) = mgL(1 - \cos x); \tag{3}$$

veja a Figura 9.2.2. Os pontos críticos do sistema (2) são $x = \pm n\pi, y = 0, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, correspondendo a $\theta = \pm n\pi, d\theta/dt = 0$. Fisicamente, esperamos que os pontos $x = 0, y = 0; x = \pm 2\pi, y = 0; \ldots$, correspondendo a $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$, sejam estáveis, já que, para eles, o eixo do pêndulo está na posição vertical com o peso para baixo; além disso, esperamos que os pontos $x = \pm\pi, y = 0; x = \pm 3\pi, y = 0; \ldots$, correspondendo a $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$, sejam instáveis, já que, para eles, o eixo do pêndulo está na posição vertical com o peso para cima. Isso está de acordo com (i), já que nos pontos anteriores U é um mínimo igual a zero e nos pontos posteriores é um máximo igual a $2mgL$.

Considere, agora, a energia total V, que é a soma da energia potencial U com a energia cinética $\frac{1}{2}mL^2(d\theta/dt)^2$. Em termos de x e y,

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2. \tag{4}$$

Em uma trajetória correspondente à solução $x = \phi(t), y = \psi(t)$ das Eqs. (2), V pode ser considerada como uma função de t. A derivada de $V[\phi(t), \psi(t)]$ em relação a t é chamada de taxa de variação de V ao longo da trajetória. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= (mgL\operatorname{sen} x)\frac{dx}{dt} + mL^2y\frac{dy}{dt},\end{aligned} \tag{5}$$

onde está subentendido que $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$. Finalmente, substituindo dx/dt e dy/dt na Eq. (5) pelas Eqs. (2), vemos que $dV/dt = 0$. Logo, V é constante ao longo de qualquer trajetória do sistema (2), o que é a afirmação (ii).

É importante observar que em qualquer ponto (x, y) a taxa de variação de V ao longo da trajetória que passa por aquele ponto foi calculada sem se resolver o sistema (2). É precisamente esse fato que nos

[10] Alexandr M. Liapunov (1857-1918), um aluno de Chebyshev em São Petersburgo, ensinou na Universidade de Kharkov de 1885 a 1901, quando se tornou acadêmico em matemática aplicada na Academia de Ciências de São Petersburgo. Em 1917 mudou-se para Odessa, devido à saúde frágil de sua esposa. Sua pesquisa em estabilidade incluiu tanto a análise teórica quanto aplicações a diversos problemas físicos. Seu segundo método está em seu trabalho mais influente, *General Problem of Stability of Motion* (Problema Geral de Estabilidade do Movimento), publicado em 1892.

permite usar o segundo método de Liapunov para sistemas cujas soluções não conhecemos, e essa é a razão principal de sua importância.

Nos pontos críticos estáveis, $x = \pm 2\pi$, $y = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a energia V é nula. Se o estado inicial, digamos (x_1, y_1), do pêndulo está suficientemente próximo de um ponto crítico estável, então a energia $V(x_1, y_1)$ é pequena e o movimento (trajetória) associado a essa energia permanece próximo do ponto crítico. Pode-se mostrar que se $V(x_1, y_1)$ é suficientemente pequena, então a trajetória é fechada e contém o ponto crítico. Por exemplo, suponha que (x_1, y_1) está perto de $(0, 0)$ e que $V(x_1, y_1)$ é muito pequena. A equação da trajetória com energia $V(x_1, y_1)$ é

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2 = V(x_1, y_1).$$

Para x pequeno, temos $1 - \cos x = 1 - (1 - x^2/2! + \ldots) \approx x^2/2$. Logo, a equação da trajetória é, aproximadamente,

$$\tfrac{1}{2}mgLx^2 + \tfrac{1}{2}mL^2y^2 = V(x_1, y_1),$$

ou

$$\frac{x^2}{2V(x_1, y_1)/mgL} + \frac{y^2}{2V(x_1, y_1)/mL^2} = 1.$$

Isso é uma elipse em torno do ponto crítico $(0, 0)$; quanto menor $V(x_1, y_1)$, menores são os eixos da elipse. Fisicamente, a trajetória fechada corresponde a uma solução periódica no tempo — o movimento é uma pequena oscilação em torno do ponto de equilíbrio.

Se existe amortecimento, no entanto, é natural esperar que a amplitude do movimento diminua com o tempo e que o ponto crítico estável (centro) se torne um ponto crítico assintoticamente estável (ponto espiral). Veja o retrato de fase para o pêndulo amortecido na Figura 9.3.5. Isso quase que pode ser argumentado a partir de dV/dt. Para o pêndulo amortecido, a energia total ainda é dada pela Eq. (4), mas agora, pelas Eqs. (13) da Seção 9.2, $dx/dt = y$ e $dy/dt = -(g/L)\text{sen}x - (c/mL)y$. Substituindo dx/dt e dy/dt na Eq. (5), obtemos $dV/dt = -cLy^2 \leq 0$. Portanto, a energia é não decrescente ao longo de qualquer trajetória e, exceto pela reta $y = 0$, o movimento é tal que a energia diminui. Logo, cada trajetória tem que se aproximar de um ponto de energia mínima — um ponto de equilíbrio estável. Se $dV/dt < 0$, em vez de $dV/dt \leq 0$, é razoável esperar que isso continue válido para todas as trajetórias que comecem suficientemente próximas da origem.

Para continuar aprofundando essas ideias, considere o sistema autônomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y), \tag{6}$$

e suponha que o ponto $x = 0, y = 0$ é um ponto crítico assintoticamente estável. Então existe algum domínio D contendo $(0, 0)$ tal que toda trajetória que começa em D tende à origem quando $t \to \infty$. Suponha que existe uma função "energia" V tal que $V \geq 0$ para (x, y) em D, com $V = 0$ apenas na origem. Como cada trajetória em D tende à origem quando $t \to \infty$, então, seguindo qualquer trajetória particular, V tende a zero quando t tende a infinito. O tipo de resultado que queremos provar é, essencialmente, a recíproca: se em todas as trajetórias V tende a zero quando t tende a infinito, então as trajetórias têm que se aproximar da origem quando $t \to \infty$ e, portanto, a origem é assintoticamente estável. Primeiro, no entanto, precisamos de várias definições.

Suponha que V está definida em um domínio D contendo a origem. A função V é dita **positiva definida** em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ em todos os outros pontos de D. Analogamente, V é **negativa definida** em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) < 0$ para todos os outros pontos de D. Se as desigualdades $>$ e $<$ são substituídas por $\geq$ e $\leq$, então V é dita **positiva semidefinida** e **negativa semidefinida**, respectivamente. Enfatizamos que ao se falar de uma função positiva definida (negativa definida, ...) em um domínio D contendo a origem, a função tem que se anular na origem, além de satisfazer a desigualdade apropriada em todos os outros pontos de D.

EXEMPLO 1

A função

$$V(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$$

é positiva definida em $x^2 + y^2 < \pi/2$, já que $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$. No entanto, a função

$$V(x, y) = (x + y)^2$$

só é positiva semidefinida, já que $V(x, y) = 0$ na reta $y = -x$.

Queremos considerar, também, a função

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y), \tag{7}$$

onde F e G são as funções da Eq. (6). Escolhemos essa notação porque $\dot{V}(x, y)$ pode ser identificada com a taxa de variação de V ao longo da trajetória do sistema (6) que passa pelo ponto (x, y). Em outras palavras, se $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema (6), então

$$\begin{aligned} \frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\ &= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\ &= \dot{V}(x, y). \end{aligned} \tag{8}$$

Vamos nos referir à função $\dot{V}$ muitas vezes como a derivada de V em relação ao sistema (6).

Vamos enunciar dois teoremas de Liapunov, o primeiro sobre estabilidade e o segundo sobre instabilidade.

Teorema 9.6.1 Suponha que o sistema autônomo (6) tenha um ponto crítico isolado na origem. Se existir uma função V, contínua com derivadas parciais contínuas, que seja positiva definida e para a qual a função $\dot{V}$, dada pela Eq. (7), seja negativa definida em algum domínio D no plano xy contendo $(0, 0)$, então a origem é um ponto crítico assintoticamente estável. Se $\dot{V}$ for negativa semidefinida, então a origem é um ponto crítico estável.

Teorema 9.6.2 Suponha que a origem é um ponto crítico isolado do sistema autônomo (6). Seja V uma função contínua com derivadas parciais contínuas. Suponha que $V(0, 0) = 0$ e que, em toda vizinhança da origem, existe pelo menos um ponto onde V é positiva (negativa). Se existir um domínio D contendo a origem tal que a função $\dot{V}$, dada pela Eq. (7), seja positiva definida (negativa definida) em D, então a origem é um ponto crítico instável.

A função V é chamada de uma **função de Liapunov**. Antes de esboçarmos argumentos geométricos para os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2, observamos que a dificuldade na utilização desses teoremas é que eles não nos dizem como construir uma função de Liapunov, supondo que exista uma. Nos casos em que o sistema autônomo (6) representa um problema físico é natural considerar, primeiro, a energia total do sistema como uma função de Liapunov possível. Entretanto, os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2 podem ser aplicados em casos onde o conceito de energia física não é pertinente. Em tais casos, pode ser necessária uma abordagem envolvendo tentativa e erro.

Vamos considerar a segunda parte do Teorema 9.6.1, ou seja, o caso em que $\dot{V} \le 0$. Seja $c \ge 0$ uma constante e considere a curva no plano xy dada por $V(x, y) = c$. Para $c = 0$, a curva se reduz a um único ponto $x = 0$, $y = 0$. Vamos supor que se $0 < c_1 < c_2$, então a curva $V(x, y) = c_1$ contém a origem e está contida no interior da curva $V(x, y) = c_2$, como ilustrado na Figura 9.6.1*a*. Vamos mostrar que uma trajetória começando no interior de uma curva fechada $V(x, y) = c$ não pode cruzar a curva para sair. Logo, dado um círculo de raio ϵ em torno da origem, escolhendo c suficientemente pequeno, podemos garantir que toda

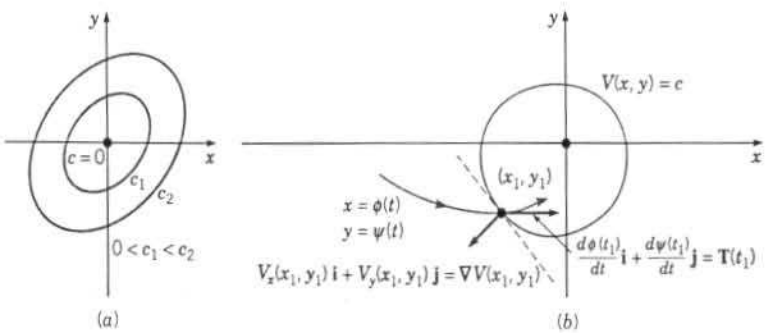


FIGURA 9.6.1 Interpretação geométrica do método de Liapunov.

trajetória começando no interior da curva fechada $V(x, y) = c$ permanece no interior do círculo de raio ϵ; de fato, ela permanece no interior da própria curva $V(x, y) = c$. Portanto, a origem é um ponto crítico estável.

Para mostrar isso, lembre-se do cálculo que o vetor

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y)\mathbf{i} + V_y(x, y)\mathbf{j}, \tag{9}$$

conhecido como o gradiente de V, é normal à curva $V(x, y) = c$ e aponta na direção do crescimento de V. No caso atual, V aumenta quando se afasta da origem, logo ∇V aponta para longe da origem, como indicado na Figura 9.6.1*b*. Considere, agora, uma trajetória $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do sistema (6) e lembre que o vetor $\mathbf{T}(t) = \phi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j}$ é tangente à trajetória em cada ponto; veja a Figura 9.6.1*b*. Sejam $x_1 = \phi(t_1)$, $y_1 = \psi(t_1)$ um ponto de interseção da trajetória com uma curva fechada $V(x, y) = c$. Nesse ponto, $\phi'(t_1) = F(x_1, y_1)$ e $\psi'(t_1) = G(x_1, y_1)$. logo, da Eq. (7), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, y_1) &= V_x(x_1, y_1)\phi'(t_1) + V_y(x_1, y_1)\psi'(t_1)\\ &= [V_x(x_1, y_1)\mathbf{i} + V_y(x_1, y_1)\mathbf{j}] \cdot [\phi'(t_1)\mathbf{i} + \psi'(t_1)\mathbf{j}]\\ &= \nabla V(x_1, y_1) \cdot \mathbf{T}(t_1).\end{aligned} \tag{10}$$

Portanto, $\dot{V}(x_1, y_1)$ é o produto escalar do vetor $\nabla V(x_1, y_1)$ com o vetor $\mathbf{T}(t_1)$. Como $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$, segue que o cosseno do ângulo entre $\nabla V(x_1, y_1)$ e $\mathbf{T}(t_1)$ também é menor ou igual a zero; portanto, o ângulo está no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Logo, o movimento da trajetória, em relação a $V(x, y) = c$, é para dentro ou, no pior caso, é tangente a essa curva. As trajetórias que começam dentro de uma curva fechada $V(x_1, y_1) = c$ (não importa o quão pequeno seja c) não podem escapar, de modo que a origem é um ponto estável. Se $\dot{V}(x_1, y_1) < 0$, então as trajetórias passando por pontos na curva dirigem-se, de fato, para dentro. Em consequência, pode-se mostrar que as trajetórias começando suficientemente próximas da origem têm que se aproximar da origem; portanto, a origem é assintoticamente estável.

Um argumento geométrico para o Teorema 9.6.2 segue de maneira análoga. De fato, suponha que $\dot{V}$ é positiva definida e suponha que, dado qualquer círculo em torno da origem, existe um ponto interior (x_1, y_1) no qual $V(x_1, y_1) > 0$. Considere uma trajetória que comece em (x_1, y_1). Ao longo dessa trajetória V tem que crescer, pela Eq. (8), já que $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$; além disso, como $V(x_1, y_1) > 0$, a trajetória não pode se aproximar da origem, pois $V(0, 0) = 0$. Isso mostra que a origem não pode ser assintoticamente estável. Explorando mais o fato de que $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$, é possível mostrar que a origem é um ponto instável; no entanto, não faremos esse argumento.

EXEMPLO 2 Use o Teorema 9.6.1 para mostrar que $(0, 0)$ é um ponto crítico estável para as equações do pêndulo sem amortecimento (2). Use, também, o Teorema 9.6.2 para mostrar que $(\pi, 0)$ é um ponto crítico instável.

Seja V a energia total dada pela Eq. (4):

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2. \tag{4}$$

Se escolhermos D como o domínio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, então V é positiva aí exceto na origem, onde é zero. Logo, V é positiva definida em D. Além disso, como já vimos,

$$\dot{V} = (mgL \operatorname{sen} x)(y) + (mL^2y)(-g \operatorname{sen} x)/L = 0$$

para todo x e y. Logo $\dot{V}$ é negativa semidefinida em D. Em consequência, pela última parte no Teorema 9.6.1, a origem é um ponto crítico estável para o pêndulo não amortecido. Observe que essa conclusão não pode ser obtida pelo Teorema 9.3.2, já que $(0, 0)$ é um centro para o sistema linear correspondente.

Considere, agora, o ponto crítico $(\pi, 0)$. A função de Liapunov dada pela Eq. (4) não é mais apropriada, já que o Teorema 9.6.2 pede uma função V para a qual $\dot{V}$ é positiva ou negativa definida. Para analisar o ponto $(\pi, 0)$, é conveniente mover esse ponto para a origem através da mudança de variáveis $x = \pi + u$, $y = v$. Então, as equações diferenciais (2) ficam

$$du/dt = v, \quad dv/dt = \frac{g}{L} \operatorname{sen} u, \tag{11}$$

e o ponto crítico no plano uv é $(0, 0)$. Considere a função

$$V(u, v) = v \operatorname{sen} u \tag{12}$$

e seja D o domínio $-\pi/4 < u < \pi/4$, $-\infty < v < \infty$. Então,

$$\dot{V} = (v \cos u)(v) + (\operatorname{sen} u)[(g/L) \operatorname{sen} u] = v^2 \cos u + (g/L) \operatorname{sen}^2 u \tag{13}$$

é positiva definida em D. A única coisa que falta verificar é se existem pontos em todas as vizinhanças da origem onde o próprio V é positivo. Da Eq. (12) vemos que $V(u, v) > 0$ no primeiro quadrante (onde sen u e v

são positivos) e no terceiro quadrante (onde ambos são negativos). Logo, as condições do Teorema 9.6.2 são satisfeitas e o ponto $(0, 0)$ no plano uv, correspondente ao ponto $(\pi, 0)$ no plano xy, é instável.

As equações para o pêndulo amortecido são discutidas no Problema 7.

De um ponto de vista prático, estamos mais interessados, muitas vezes, na bacia de atração. O teorema a seguir fornece alguma informação sobre o assunto.

Teorema 9.6.3 Suponha que a origem é um ponto isolado do sistema autônomo (6). Seja V uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se existe um domínio limitado D_K contendo a origem, onde $V(x, y) < K$ para algum K positivo, V é positiva definida e $\dot{V}$ é negativa definida, então toda solução das Eqs. (6) que começa em um ponto em D_K tende à origem quando t tende a infinito.

Em outras palavras, o Teorema 9.6.3 diz que se $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é a solução das Eqs. (6) com dados iniciais em D_K, então (x, y) tende ao ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \to \infty$. Logo, D_K é uma região de estabilidade assintótica; é claro que pode não ser toda a bacia de atração. Esse teorema é demonstrado mostrando-se que (i) não existe solução periódica do sistema (6) em D_K, e (ii) não existem outros pontos críticos em D_K. Segue, então, que as trajetórias começando em D_K não podem escapar e, portanto, têm que tender à origem quando t tende a infinito.

Os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2 fornecem condições suficientes para a estabilidade e a instabilidade, respectivamente, mas essas condições não são necessárias. A nossa falha em determinar uma função de Liapunov adequada também não significa que não existe uma. Infelizmente, não existe método geral para a construção de funções de Liapunov; entretanto, já foi feito um extenso trabalho de construção de funções de Liapunov para classes especiais de equações. O próximo teorema, enunciado sem demonstração, fornece um resultado algébrico elementar que é útil, muitas vezes, na construção de funções positivas definidas ou negativas definidas.

Teorema 9.6.4 A função

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{14}$$

é positiva definida se, e somente se,

$$a > 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0, \tag{15}$$

e é negativa definida se, e somente se,

$$a < 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0. \tag{16}$$

O uso do Teorema 9.6.4 é ilustrado no próximo exemplo.

EXEMPLO 3 Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema autônomo

$$dx/dt = -x - xy^2, \qquad dy/dt = -y - x^2y \tag{17}$$

é assintoticamente estável.

Vamos tentar construir uma função de Liapunov da forma (14). Então, $V_x(x, y) = 2ax + by$, $V_y(x, y) = bx + 2cy$, de modo que

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y) \\ &= -\left[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)\right].\end{aligned}$$

Se escolhermos $b = 0$ e a e c como dois números positivos quaisquer, então $\dot{V}$ é negativa definida e V é positiva definida pelo Teorema 9.6.4. Logo, pelo Teorema 9.6.1 a origem é um ponto crítico assintoticamente estável.

EXEMPLO 4 Considere o sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0{,}75 - y - 0{,}5x). \end{aligned} \tag{18}$$

Vimos, no Exemplo 1 da Seção 9.4, que esse sistema modela um determinado par de espécies em competição e que o ponto crítico (0,5; 0,5) é assintoticamente estável. Confirme essa conclusão encontrando uma função de Liapunov adequada.

Simplifica se colocarmos o ponto (0,5; 0,5) na origem. Para isso, sejam

$$x = 0{,}5 + u, \qquad y = 0{,}5 + v. \tag{19}$$

Então, substituindo x e y nas Eqs. (18), obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} du/dt &= -0{,}5u - 0{,}5v - u^2 - uv, \\ dv/dt &= -0{,}25u - 0{,}5v - 0{,}5uv - v^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Para manter os cálculos relativamente simples, considere a função $V(u, v) = u^2 + v^2$ como uma função de Liapunov possível. Essa função é claramente positiva definida, de modo que só precisamos determinar se existe uma região contendo a origem no plano uv onde a derivada $\dot{V}$ em relação ao sistema (20) é negativa definida. Calculamos $\dot{V}(u, v)$ e encontramos

$$\begin{aligned} \dot{V}(u, v) &= V_u \frac{du}{dt} + V_v \frac{dv}{dt} \\ &= 2u(-0{,}5u - 0{,}5v - u^2 - uv) + 2v(-0{,}25u - 0{,}5v - 0{,}5uv - v^2), \end{aligned}$$

ou

$$\dot{V}(u, v) = -\left[(u^2 + 1{,}5uv + v^2) + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3)\right], \tag{21}$$

onde juntamos os termos quadráticos e os cúbicos. Queremos mostrar que a expressão entre colchetes na Eq. (21) é positiva definida, pelo menos para u e v suficientemente pequenos. Observe que os termos quadráticos podem ser escritos na forma

$$u^2 + 1{,}5uv + v^2 = 0{,}25(u^2 + v^2) + 0{,}75(u + v)^2, \tag{22}$$

de modo que esses termos são positivos definidos. Por outro lado, os termos cúbicos na Eq. (21) podem ter qualquer sinal. Precisamos mostrar, então, que em alguma vizinhança de $u = 0$, $v = 0$, os termos cúbicos são menores, em módulo, do que os termos quadráticos, ou seja,

$$|2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| < 0{,}25(u^2 + v^2) + 0{,}75(u + v)^2. \tag{23}$$

Para estimar a expressão à esquerda do sinal de desigualdade na Eq. (23), vamos introduzir coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r\,\text{sen}\,\theta$. Então,

$$\begin{aligned} |2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| &= r^3\,|2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta\,\text{sen}^2\theta + 2\,\text{sen}^3\theta\,| \\ &\le r^3\left[2|\cos^3\theta| + 2\cos^2\theta|\,\text{sen}\,\theta| + |\cos\theta|\text{sen}^2\theta + 2|\,\text{sen}^3\theta|\right] \\ &\le 7r^3, \end{aligned}$$

já que $|\text{sen}\,\theta|, |\cos\theta| \le 1$. Para satisfazer a Eq. (23) é certamente suficiente satisfazer a condição mais forte

$$7r^3 < 0{,}25(u^2 + v^2) = 0{,}25r^2,$$

que fornece $r < 1/28$. Logo, pelo menos nesse disco as hipóteses do Teorema 9.6.1 são satisfeitas, de modo que a origem é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema (20). O mesmo é verdade, então, para o ponto crítico (0,5; 0,5) do sistema original (18).

Referindo-nos ao Teorema 9.6.3, o argumento precedente mostra também que o disco com centro em (0,5; 0,5) e raio 1/28 é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (18). Essa região é bem menor do que a bacia de atração inteira, como mostra a discussão na Seção 9.4. Para obter uma estimativa melhor da bacia de atração do Teorema 9.6.3, os termos na Eq. (23) teriam que ser estimados de modo mais preciso, teria que ser usada uma função de Liapunov melhor (e, possivelmente, mais complicada), ou ambos.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 4, construa uma função de Liapunov adequada da forma $ax^2 + cy^2$, onde a e c devem ser determinados. Depois, mostre que o ponto crítico na origem é do tipo indicado.

1. $dx/dt = -x^3 + xy^2$, $\quad dy/dt = -2x^2y - y^3$; assintoticamente estável
2. $dx/dt = -\frac{1}{2}x^3 + 2xy^2$, $\quad dy/dt = -y^3$; assintoticamente estável
3. $dx/dt = -x^3 + 2y^3$, $\quad dy/dt = -2xy^2$; estável (pelo menos)
4. $dx/dt = x^3 - y^3$, $\quad dy/dt = 2xy^2 + 4x^2y + 2y^3$; instável

5. Considere o sistema de equações

$$dx/dt = y - xf(x, y), \qquad dy/dt = -x - yf(x, y),$$

onde f é contínua e tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Mostre que se $f(x, y) > 0$ em alguma vizinhança da origem, então a origem é um ponto crítico assintoticamente estável, e se $f(x, y) < 0$ em alguma vizinhança da origem, então a origem é um ponto crítico instável.

Sugestão: construa uma função de Liapunov da forma $c(x^2 + y^2)$.

6. Uma generalização da equação do pêndulo não amortecido é

$$d^2u/dt^2 + g(u) = 0, \tag{i}$$

onde $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ para $0 < u < k$ e $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$, ou seja, $ug(u) > 0$ para $u \neq 0$, $-k < u < k$. Note que $g(u) = \operatorname{sen} u$ tem essa propriedade em $(-\pi/2, \pi/2)$.

(a) Fazendo $x = u$, $y = du/dt$, escreva a Eq. (i) como um sistema de duas equações e mostre que $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico.

(b) Mostre que

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\,ds, \qquad -k < x < k \tag{ii}$$

é positiva definida e use esse resultado para mostrar que o ponto crítico $(0, 0)$ é estável. Note que a função de Liapunov V dada pela Eq. (ii) corresponde à função energia $V(x, y) = (\frac{1}{2})y^2 + (1 - \cos x)$ para o caso em que $g(u) = \operatorname{sen} u$.

7. Introduzindo variáveis adimensionais adequadas, o sistema de equações não lineares para o pêndulo amortecido [Eq. (8) da Seção 9.3] pode ser escrito na forma

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -y - \operatorname{sen} x.$$

(a) Mostre que a origem é um ponto crítico.

(b) Mostre que enquanto $V(x, y) = x^2 + y^2$ é positiva definida, $\dot{V}(x, y)$ toma valores positivos e negativos em qualquer domínio contendo a origem, logo V não é uma função de Liapunov.

Sugestão: $x - \operatorname{sen} x > 0$ para $x > 0$ e $x - \operatorname{sen} x < 0$ para $x < 0$. Considere os casos com y positivo, mas tão pequeno que y^2 pode ser desprezado se comparado a y.

(c) Usando a função de energia $V(x, y) = (\frac{1}{2})y^2 + (1 - \cos x)$ mencionada no Problema 6(b), mostre que a origem é um ponto crítico estável. Como o sistema tem amortecimento, podemos esperar que a origem seja assintoticamente estável. No entanto, não é possível chegar a essa conclusão usando-se esta função de Liapunov.

(d) Para mostrar a estabilidade assintótica, é necessário construir uma função de Liapunov melhor do que a usada no item (c). Mostre que $V(x, y) = (\frac{1}{2})(x + y)^2 + x^2 + (\frac{1}{2})y^2$ é tal função de Liapunov e conclua que a origem é um ponto crítico assintoticamente estável.

Sugestão: da fórmula de Taylor com resto, segue que $\operatorname{sen} x = x - \alpha x^3/3!$, onde α depende de x, mas $0 < \alpha < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$. Então, fazendo $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que $\dot{V}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = -r^2[1 + h(r, \theta)]$, onde $|h(r, \theta)| < 1$ se r for suficientemente pequeno.

8. A equação de Liénard (Problema 30 da Seção 9.3) é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + c(v)\frac{dv}{dt} + g(v) = 0,$$

onde g satisfaz a condições do Problema 6 e $c(v) \geq 0$. Mostre que o ponto $v = 0$, $dv/dt = 0$ é um ponto crítico estável.

9. (a) Um caso particular da equação de Liénard do Problema 8 é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt} + g(v) = 0,$$

onde g satisfaz as condições do Problema 6. Fazendo $x = v$, $y = dv/dt$, mostre que a origem é um ponto crítico do sistema resultante. Essa equação pode ser interpretada como descrevendo o movimento de um sistema mola-massa com amortecimento proporcional à velocidade e uma força restauradora não linear. Usando a função de Liapunov do Problema 6, mostre que a origem é um ponto crítico estável, mas note que mesmo com amortecimento não podemos concluir a estabilidade assintótica com esta função de Liapunov.

(b) A estabilidade assintótica do ponto crítico $(0, 0)$ pode ser estabelecida construindo-se uma função de Liapunov melhor, como foi feito no item (d) do Problema 7. No entanto, a análise para uma função g geral é um pouco mais sofisticada, e vamos mencionar, apenas, que uma forma apropriada para V é

$$V(x,y) = \tfrac{1}{2}y^2 + Ayg(x) + \int_0^x g(s)\,ds,$$

onde A é uma constante positiva a ser escolhida de modo que V seja positiva definida e que $\dot{V}$ seja negativa definida. Para o problema do pêndulo, $g(x) = \operatorname{sen} x$; use V como na equação precedente com $A = \frac{1}{2}$ para mostrar que a origem é assintoticamente estável.

Sugestão: use $\operatorname{sen} x = x - \alpha x^3/3!$ e $\cos x = 1 - \beta x^2/2!$, onde α e β dependem de x, mas $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$; sejam $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, e mostre que $\dot{V}(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = -(\frac{1}{2})r^2[1 + (\frac{1}{2})\operatorname{sen} 2\theta + h(r,\theta)]$, onde $|h(r,\theta)| < \frac{1}{2}$ para r suficientemente pequeno. Para mostrar que V é positiva definida, use que $\cos x = 1 - x^2/2 + \gamma x^4/4!$, onde γ depende de x e $0 < \gamma < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Nos Problemas 10 e 11, vamos provar parte do Teorema 9.3.2: se o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema localmente linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y + F_1(x,y), \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y + G_1(x,y) \tag{i}$$

for um ponto crítico assintoticamente estável do sistema linear correspondente

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y, \tag{ii}$$

então ele será um ponto crítico assintoticamente estável do sistema localmente linear (i). O Problema 12 trata do resultado correspondente para a instabilidade.

10. Considere o sistema linear (ii).
    (a) Como $(0, 0)$ é um ponto crítico assintoticamente estável, mostre que $a_{11} + a_{22} < 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. (Veja o Problema 21 da Seção 9.1.)
    (b) Construa uma função de Liapunov $V(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ tal que V seja positiva definida e $\dot{V}$ seja negativa definida. Um modo de garantir que $\dot{V}$ seja negativa definida é escolher A, B e C tais que $\dot{V}(x, y) = -x^2 - y^2$. Mostre que isso leva ao resultado

$$A = -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta}, \qquad B = \frac{a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}}{\Delta}, \qquad C = -\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta},$$

    onde $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.
    (c) Usando o resultado do item (a), mostre que $A > 0$ e depois mostre (são necessários vários passos algébricos) que

$$4AC - B^2 = \frac{(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}{\Delta^2} > 0.$$

    Logo, pelo Teorema 9.6.4, V é positiva definida.

11. Neste problema, vamos mostrar que a função de Liapunov construída no problema precedente também é uma função de Liapunov para o sistema localmente linear (i). Precisamos mostrar que existe alguma região contendo a origem na qual $\dot{V}$ é negativa definida.
    (a) Mostre que

$$\dot{V}(x,y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x,y) + (Bx + 2Cy)G_1(x,y).$$

    (b) Lembre-se de que $F_1(x,y)/r \to 0$ e $G_1(x,y)/r \to 0$ quando $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to 0$. Isso significa que dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um círculo $r = R$ em torno da origem tal que, se $0 < r < R$, então $|F_1(x,y)| < \epsilon r$ e $|G_1(x,y)| < \epsilon r$. Escolhendo M como o máximo entre $|2A|$, $|B|$ e $|2C|$, mostre, usando coordenadas polares, que R pode ser escolhido de modo que $\dot{V}(x,y) < 0$ para $r < R$.

    Sugestão: escolha ϵ suficientemente pequeno em função de M.

12. Neste problema, vamos provar uma parte do Teorema 9.3.2 relativa à instabilidade.
    (a) Mostre que se $a_{11} + a_{22} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, então o ponto crítico do sistema linear (ii) é instável.
    (b) O mesmo resultado é válido para o sistema localmente linear (i). Como nos Problemas 10 e 11, construa uma função positiva definida V tal que $\dot{V}(x,y) = x^2 + y^2$, de modo que $\dot{V}$ seja positiva definida, e invoque o Teorema 9.6.2.

9.7 Soluções Periódicas e Ciclos Limites

Nesta seção vamos discutir mais a fundo a possível existência de soluções periódicas de sistemas autônomos de segunda ordem da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Tais soluções satisfazem a relação

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \tag{2}$$

para todo t e para alguma constante não negativa T chamada de período. As trajetórias correspondentes são *curvas fechadas* no plano de fase. Soluções periódicas, com frequência, têm um papel importante em problemas físicos, pois representam fenômenos que ocorrem repetidamente. Em muitas situações, uma solução periódica representa um "estado final" para o qual todas as soluções "vizinhas" tendem quando a parte transiente, devido às condições iniciais, vai sumindo.

Um caso particular de solução periódica é a solução constante $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, que corresponde a um ponto crítico do sistema autônomo. Tal solução é claramente periódica com qualquer período. Nesta seção, ao falarmos de solução periódica queremos dizer uma solução periódica não constante. Nesse caso o período T é positivo e escolhido, em geral, como o menor número positivo para o qual a Eq. (2) é válida.

Lembre-se de que as soluções do sistema autônomo linear

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3}$$

são periódicas se, e somente se, os autovalores da matriz A são imaginários puros. Nesse caso, o ponto crítico na origem é um centro, como discutido na Seção 9.1. Enfatizamos que se os autovalores de A forem imaginários puros, então toda solução do sistema linear (3) será periódica, enquanto se os autovalores não forem imaginários puros não existirão soluções periódicas (não constantes). As equações predador-presa discutidas na Seção 9.5, embora não lineares, comportam-se de maneira análoga: todas as soluções no primeiro quadrante são periódicas. O exemplo a seguir ilustra um modo diferente em que podem aparecer soluções periódicas de sistemas autônomos não lineares.

EXEMPLO 1

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x + y - x(x^2 + y^2) \\ -x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Não é difícil mostrar que $(0, 0)$ é o único ponto crítico do sistema (4) e, também, que o sistema é localmente linear em uma vizinhança da origem. O sistema linear correspondente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

tem autovalores $1 \pm i$. Logo, a origem é um ponto espiral instável, tanto para o sistema linear (5) quanto para o sistema não linear (4). Assim, qualquer solução que comece próxima à origem no plano de fase vai se afastar da origem ao longo de uma espiral. Como não existem outros pontos críticos, poderíamos imaginar que todas as soluções das Eqs. (4) correspondem a trajetórias que tendem ao infinito ao longo de espirais. No entanto, vamos mostrar que isso não está correto porque, muito longe da origem, as trajetórias estão orientadas para dentro.

É conveniente usar coordenadas polares r e θ, onde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \tag{6}$$

e $r \geq 0$. Se multiplicarmos a primeira das Eqs. (4) por x, a segunda por y e depois somarmos, obteremos

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2. \tag{7}$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r(dr/dt) = x(dx/dt) + y(dy/dt)$, segue da Eq. (7) que

$$r\frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2). \tag{8}$$

Esta equação é semelhante às equações discutidas na Seção 2.5. Os pontos críticos (para $r \geq 0$) são a origem e o ponto $r = 1$, que corresponde ao círculo unitário no plano de fase. Da Eq. (8), segue que $dr/dt > 0$ se $r < 1$ e $dr/dt < 0$ se $r > 1$. Logo, no interior do círculo unitário as trajetórias estão orientadas para fora, enquanto no exterior estão orientadas para dentro. Aparentemente, o círculo $r = 1$ é uma trajetória limite para esse sistema.

Para determinar uma equação para θ, multiplicamos a primeira das Eqs. (4) por y, a segunda por x e subtraímos, obtendo

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Calculando dx/dt e dy/dt das Eqs. (6), vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (9) é $-r^2(d\theta/dt)$, de modo que a Eq. (9) se reduz a

$$\frac{d\theta}{dt} = -1. \tag{10}$$

O sistema de equações (8), (10) para r e θ é equivalente ao sistema original (4). Uma solução do sistema (8), (10) é

$$r = 1, \qquad \theta = -t + t_0, \tag{11}$$

onde t_0 é uma constante arbitrária. Quando t aumenta, um ponto que satisfaça as Eqs. (11) move-se no sentido horário em cima do círculo unitário. Assim, o sistema autônomo (4) tem uma solução periódica. Outras soluções podem ser obtidas resolvendo-se a Eq. (8) pelo método de separação de variáveis; se $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então

$$\frac{dr}{r(1-r^2)} = dt. \tag{12}$$

A Eq. (12) pode ser resolvida usando-se frações parciais para se reescrever a expressão à esquerda do sinal de igualdade e, depois, integrar. Fazendo esses cálculos, encontramos que a solução das Eqs. (10) e (12) é

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}}, \qquad \theta = -t + t_0, \tag{13}$$

onde c_0 e t_0 são constantes arbitrárias. A solução (13) contém, também, a solução (11), que pode ser obtida fazendo-se $c_0 = 0$ na primeira das Eqs. (13).

A solução satisfazendo as condições iniciais $r = \rho, \theta = \alpha$ em $t = 0$ é dada por

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + [(1/\rho^2) - 1]e^{-2t}}}, \qquad \theta = -(t - \alpha). \tag{14}$$

Se $\rho < 1$, então $r \to 1$ por dentro quando $t \to \infty$; se $\rho > 1$, então $r \to 1$ por fora quando $t \to \infty$. Logo, em todos os casos as trajetórias são espirais que se aproximam do círculo $r = 1$ quando $t \to \infty$. A Figura 9.7.1 mostra diversas trajetórias.

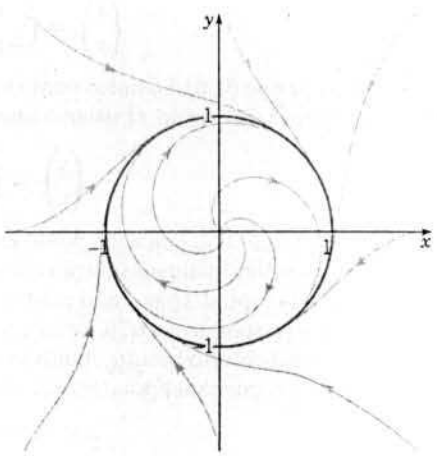


FIGURA 9.7.1 Trajetórias do sistema (4); um ciclo limite.

Nesse exemplo, o círculo $r = 1$ não corresponde, apenas, a soluções periódicas do sistema (4), mas também atrai outras trajetórias não fechadas que espiralam em sua direção quando $t \to \infty$. Em geral, uma trajetória fechada no plano de fase tal que outras trajetórias tendem a ela, por dentro ou por fora, quando $t \to \infty$, é chamada de **ciclo limite**. Assim, o círculo $r = 1$ é um ciclo limite para o sistema (4). Se todas as trajetórias que começam perto de uma trajetória fechada (tanto dentro quanto fora) espiralam na direção da trajetória fechada quando $t \to \infty$, então o ciclo limite é **assintoticamente estável**. Como a trajetória limite é, ela própria, uma órbita periódica, em vez de um ponto de equilíbrio, esse tipo de estabilidade é chamado, muitas vezes, de **estabilidade orbital**. Se as trajetórias de um lado espiralam em direção à trajetória fechada, enquanto as do outro lado se afastam quando $t \to \infty$, então o ciclo limite é dito **semiestável**. Se as trajetórias de ambos os lados da trajetória fechada espiralam se afastando quando $t \to \infty$, então a trajetória fechada é **instável**. Também é possível existir trajetórias fechadas tais que outras trajetórias nem se aproximam nem se afastam dela, por exemplo, as soluções periódicas das equações predador-presa na Seção 9.5. Nesse caso, a trajetória fechada é **estável**.

A existência de um ciclo limite assintoticamente estável foi estabelecida, no Exemplo 1, resolvendo-se as equações explicitamente. Infelizmente, isso não é possível em geral, de modo que vale a pena conhecer teoremas gerais relativos à existência ou não existência de ciclos limites para sistemas autônomos não lineares. Para discutir esses teoremas, é conveniente escrever o sistema (1) em forma escalar

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y). \tag{15}$$

Teorema 9.7.1 Suponha que as funções F e G têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D do plano xy. Uma trajetória fechada do sistema (15) tem, necessariamente, que conter pelo menos um ponto crítico (de equilíbrio) em seu interior. Se contiver apenas um ponto crítico, este ponto não poderá ser de sela.

Não vamos demonstrar esse teorema, mas é fácil mostrar exemplos dele. Um é dado pelo Exemplo 1 e pela Figura 9.7.1, nos quais a trajetória fechada contém, em seu interior, o ponto crítico $(0, 0)$, um ponto espiral. Outro exemplo é o sistema de equações predador-presa na Seção 9.5; veja a Figura 9.5.2. Cada trajetória fechada contém, em seu interior, o ponto crítico $(3, 2)$; neste caso, o ponto crítico é um centro.

O Teorema 9.7.1 também é útil de maneira negativa. Se dada região não contém pontos críticos não podem existir trajetórias fechadas inteiramente contidas na região. A mesma conclusão pode ser obtida se a região contém um único ponto crítico que é de sela. Por exemplo, no Exemplo 2 da Seção 9.4, um exemplo sobre espécies em competição, o único ponto crítico no interior do primeiro quadrante é o ponto de sela $(0,5; 0,5)$. Portanto, este sistema não tem trajetórias fechadas contidas no primeiro quadrante.

Um segundo resultado sobre a não existência de trajetórias fechadas é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 9.7.2 Suponha que as funções F e G têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio simplesmente conexo D do plano xy. Se $F_x + G_y$ tem o mesmo sinal em todos os pontos de D, então não existe trajetória fechada do sistema (15) inteiramente contida em D.

Um domínio simplesmente conexo em duas dimensões é um que não tem buracos. O Teorema 9.7.2 é uma consequência direta do Teorema de Green no plano; veja o Problema 13. Note que se $F_x + G_y$ muda de sinal no domínio, não podemos concluir coisa alguma; podem existir ou não trajetórias fechadas em D.

Para ilustrar o Teorema 9.7.2, considere o sistema (4). Um cálculo rotineiro mostra que

$$F_x(x, y) + G_y(x, y) = 2 - 4(x^2 + y^2) = 2(1 - 2r^2), \tag{16}$$

onde, como de hábito, $r^2 = x^2 + y^2$. Logo, $F_x + G_y$ é positiva para $0 \le r < 1/\sqrt{2}$, de modo que não existe trajetória fechada neste disco. É claro, mostramos no Exemplo 1 que não existe trajetória fechada na região maior $r < 1$. Isso ilustra que a informação dada pelo Teorema 9.7.2 pode não ser o melhor resultado possível. Referindo-nos, mais uma vez, à Eq. (16), note que $F_x + G_y < 0$ para $r > 1/\sqrt{2}$. No entanto, o teorema não se aplica neste caso, já que esta região anular não é simplesmente conexa. De fato, como mostramos no Exemplo 1, ela contém um ciclo limite.

O teorema a seguir nos dá condições que garantem a existência de uma trajetória fechada.

Teorema 9.7.3 **(Teorema de Poincaré-Bendixson)**[11] Sejam F e G funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D no plano xy. Seja D_1 um subdomínio limitado de D e seja R a região que consiste na união de D_1 à sua fronteira (todos os pontos de R pertencem a D). Suponha que R não contém pontos críticos do sistema (15). Se existir uma constante t_0 tal que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema (15) que existe e permanece em R para todo $t \ge t_0$, então, ou $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução periódica (trajetória fechada), ou $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ espirala tendendo a uma trajetória fechada quando $t \to \infty$. Em qualquer dos casos, o sistema (15) tem uma solução periódica em R.

Note que se R contém uma trajetória fechada, então necessariamente, pelo Teorema 9.7.1, esta trajetória tem que conter um ponto crítico em seu interior. No entanto, este ponto crítico não pode pertencer a R. Logo, R não pode ser simplesmente conexo; tem que ter um buraco.

[11] Ivar Otto Bendixson (1861-1935), um matemático sueco, recebeu seu doutorado da Universidade Uppsala; foi professor e depois reitor durante muitos anos na Universidade de Estocolmo. Este teorema apareceu em um artigo publicado por ele na revista *Acta Mathematica* em 1901.

Como aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson, considere, novamente, o sistema (4). Como a origem é um ponto crítico, ela tem que ser excluída. Por exemplo, podemos considerar a região R definida por $0{,}5 \le r \le 2$. A seguir, precisamos mostrar que existe uma solução cuja trajetória permanece em R para todo t maior ou igual a algum t_0. Isso segue imediatamente da Eq. (8). Para $r = 0{,}5$, $dr/dt > 0$, de modo que r aumenta, enquanto para $r = 2$, $dr/dt < 0$, de modo que r diminui. Logo, qualquer trajetória que cruza a fronteira de R está entrando em R. Em consequência, qualquer solução das Eqs. (4) que começa em R em $t = t_0$ não pode sair, mas tem que permanecer em R para $t > t_0$. É claro que outros números, diferentes de 0,5 e 2, podem ser usados; o importante é que incluam $r = 1$.

Não deveríamos inferir, dessa discussão dos teoremas precedentes, que é fácil determinar se um sistema autônomo não linear dado tem soluções periódicas ou não; muitas vezes isso não é absolutamente simples. Com frequência os Teoremas 9.7.1 e 9.7.2 não são conclusivos, enquanto para o Teorema 9.7.3 é difícil, muitas vezes, determinar uma região R e uma solução que sempre permaneça nela.

Vamos encerrar esta seção com outro exemplo de um sistema não linear que tem um ciclo limite.

EXEMPLO 2

A equação de van der Pol[12]

$$u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0, \tag{17}$$

onde μ é uma constante não negativa descreve a corrente u em um oscilador tríodo. Discuta as soluções desta equação.

Se $\mu = 0$, a Eq. (17) se reduz a $u'' + u = 0$, cujas soluções são ondas de seno ou cosseno de período 2π. Para $\mu > 0$, o segundo termo na expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (17) também tem que ser considerado. Este é o termo da resistência, proporcional a u', com um coeficiente $-\mu(1 - u^2)$ que depende de u. Para valores grandes de u este termo é positivo e age, como de hábito, para reduzir a amplitude da resposta. No entanto, para u pequeno o termo de resistência é negativo e, portanto, faz com que a resposta cresça. Isso sugere que talvez exista uma solução de tamanho intermediário para a qual outras soluções tendam quando t aumenta.

Para analisar a Eq. (17) com mais cuidado, vamos escrevê-la como um sistema de duas equações introduzindo as variáveis $x = u$, $y = u'$. Segue que

$$x' = y, \qquad y' = -x + \mu(1 - x^2)y. \tag{18}$$

O único ponto crítico do sistema (18) é a origem. Perto da origem, o sistema linear correspondente é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{19}$$

cujos autovalores são $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$. Logo, a origem é um ponto espiral instável para $0 < \mu < 2$ e um nó instável para $\mu \ge 2$. Em todos os casos, uma solução que começa próxima da origem cresce quando t aumenta.

Em relação a soluções periódicas, os Teoremas 9.7.1 e 9.7.2 fornecem, apenas, informação parcial. Do Teorema 9.7.1 concluímos que, se existirem trajetórias fechadas, então a origem tem que estar em seu interior. Calculando $F_x(x, y) + G_y(x, y)$, obtemos

$$F_x(x, y) + G_y(x, y) = \mu(1 - x^2). \tag{20}$$

Logo, segue do Teorema 9.7.2 que se existirem trajetórias fechadas elas não poderão estar contidas na faixa $|x| < 1$, onde $F_x + G_y > 0$.

A aplicação do teorema de Poincaré-Bendixson a este problema não é tão simples quanto no Exemplo 1. Se introduzirmos coordenadas polares, veremos que a equação para a variável radial r é

$$r' = \mu(1 - r^2 \cos^2\theta) r \operatorname{sen}^2\theta. \tag{21}$$

Novamente, considere uma região anular R dada por $r_1 \le r \le r_2$, onde r_1 é pequeno e r_2 é grande. Quando $r = r_1$, o termo linear à direita do sinal de igualdade na Eq. (21) domina, e $r' > 0$, exceto no eixo dos x, onde $\operatorname{sen}\theta = 0$ e, portanto, $r' = 0$ também. Logo, trajetórias estão entrando em R em todos os pontos do círculo $r = r_1$, com a possível exceção dos contidos no eixo dos x, onde as trajetórias são tangentes ao círculo. Quando $r = r_2$, o termo cúbico à direita do sinal de igualdade na Eq. (21) é o dominante. Então $r' < 0$, exceto nos pontos pertencentes ao eixo dos x, onde $r' = 0$, e nos pontos próximos ao eixo dos y, onde $r^2 \cos^2\theta < 1$ e o termo linear faz com que $r' > 0$. Portanto, não importa quão grande seja o círculo, sempre haverá pontos sobre ele (a saber, os pontos pertencentes ou próximos ao eixo dos y) onde as trajetórias estão saindo de R. Portanto, o teorema de Poincaré-Bendixson não é aplicável, a não ser que consideremos regiões mais complicadas.

[12]Balthasar van der Pol (1889-1959), um físico e engenheiro elétrico holandês, trabalhou no Laboratório de Pesquisas da Philips em Eindhoven. Foi pioneiro no estudo experimental de fenômenos não lineares e investigou a equação que tem seu nome em um artigo publicado em 1926.

É possível mostrar, por uma análise mais elaborada, que a equação de van der Pol tem um único ciclo limite. No entanto, não prosseguiremos com essa linha de argumentação. Em vez disso, vamos considerar uma abordagem diferente, onde fazemos o gráfico de soluções aproximadas calculadas numericamente. Observações experimentais indicam que a equação de van der Pol tem uma solução periódica assintoticamente estável cujo período e amplitude dependem do parâmetro μ. Olhando gráficos de trajetórias no plano de fase e de u em função de t podemos entender melhor esse comportamento periódico.

A Figura 9.7.2 mostra duas trajetórias da equação de van der Pol no plano de fase para $\mu = 0{,}2$. A trajetória que começa próxima da origem afasta-se em forma de espiral e está orientada no sentido horário; isso é consistente com o comportamento da aproximação linear perto da origem. A outra trajetória passa pelo ponto $(-3, 2)$ e vai para dentro, novamente no sentido horário. Ambas as trajetórias se aproximam de uma curva fechada que corresponde a uma solução periódica estável. A Figura 9.7.3 mostra os gráficos de u em função de t para as soluções correspondentes às trajetórias na Figura 9.7.2. A solução inicialmente menor tem sua amplitude gradualmente aumentada, enquanto a solução maior decai gradualmente. Ambas as soluções tendem a um movimento periódico estável que corresponde ao ciclo limite. A Figura 9.7.3 também mostra que existe uma diferença de fase entre as duas soluções quando elas se aproximam do ciclo limite. Os gráficos de u em função de t têm forma quase senoidal, consistente com o ciclo limite, que é quase circular neste caso.

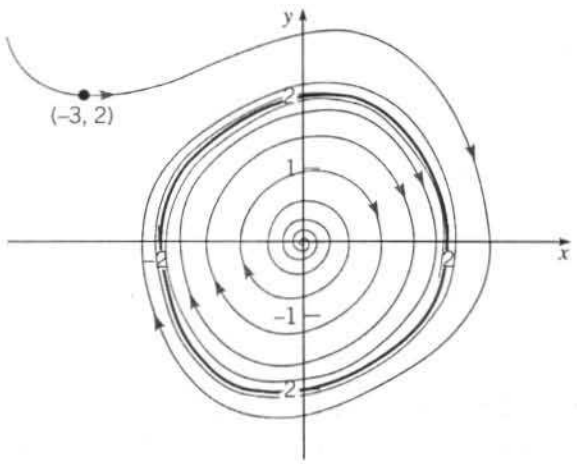


FIGURA 9.7.2 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 0{,}2$.

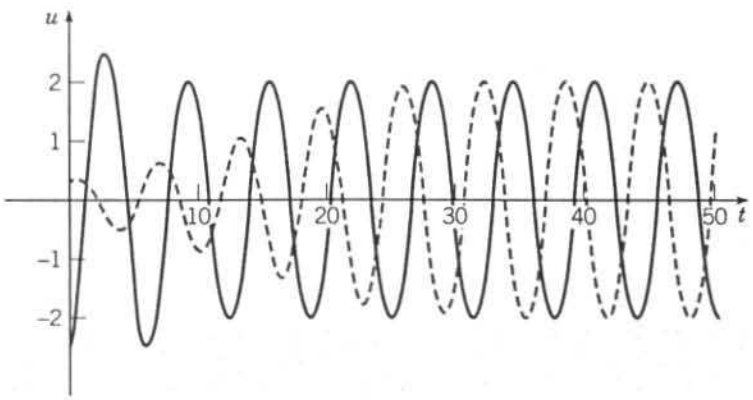


FIGURA 9.7.3 Gráficos de u em função de t para as trajetórias na Figura 9.7.2.

As Figuras 9.7.4 e 9.7.5 mostram gráficos semelhantes para o caso $\mu = 1$. As trajetórias, novamente, movem-se no sentido horário no plano de fase, mas o ciclo limite é bem diferente de um círculo. Os gráficos de u em função de t tendem mais rapidamente à oscilação limite e, mais uma vez, mostram uma diferença de fase. As oscilações são um pouco menos simétricas nesse caso, com uma subida mais íngreme do que a descida.

A Figura 9.7.6 mostra o plano de fase para $\mu = 5$. O movimento permanece no sentido horário e o ciclo limite é ainda mais alongado, especialmente na direção do eixo dos y. A Figura 9.7.7 mostra um gráfico de u em função de t. Embora a solução comece longe do ciclo limite, a oscilação limite é praticamente alcançada em uma fração de um período. Começando em um de seus valores extremos no eixo dos x no plano de fase, a solução move-se para a outra posição extrema, começando devagar, mas depois de atingir um determinado

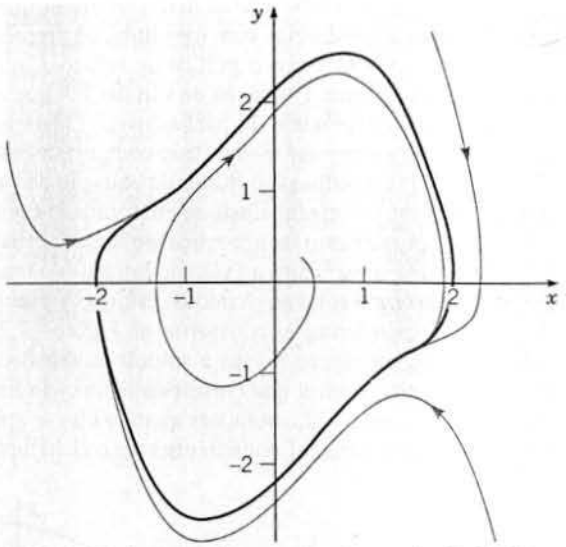


FIGURA 9.7.4 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 1$.

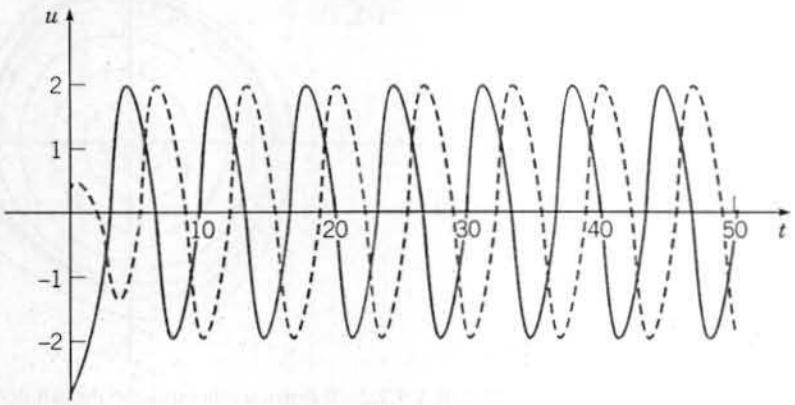


FIGURA 9.7.5 Gráficos de u em função de t para as trajetórias na Figura 9.7.4.

ponto na trajetória o restante da transição é completado rapidamente. O processo é repetido, então, na direção oposta. A forma de onda do ciclo limite, como ilustrado na Figura 9.7.7, é bem diferente de um seno.

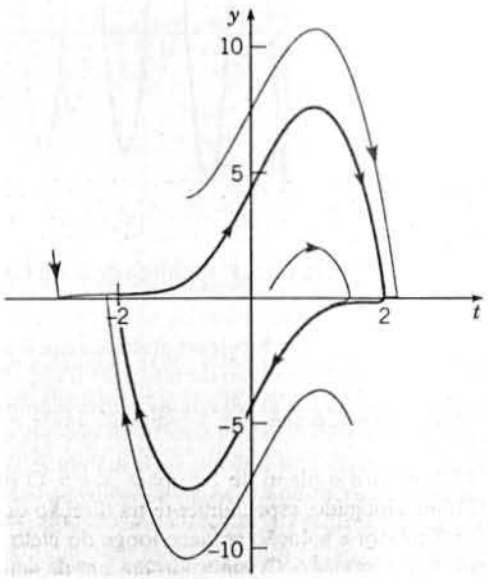


FIGURA 9.7.6 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 5$.

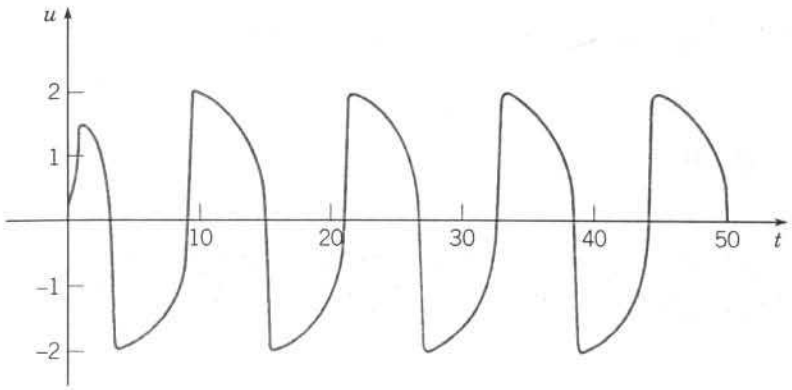


FIGURA 9.7.7 Gráfico de u em função de t para a trajetória que espirala para fora na Figura 9.7.6.

Esses gráficos mostram, claramente, que na ausência de excitação externa o oscilador de van der Pol tem determinados modos de vibração característicos para cada valor de μ. Os gráficos de u em função de t mostram que a amplitude dessa oscilação varia muito pouco com μ, mas o período aumenta quando μ aumenta. Ao mesmo tempo, a forma da onda muda de uma quase senoidal para uma muito menos suave.

A presença de um único movimento periódico que atrai todas as soluções (próximas), ou seja, de um ciclo limite assintoticamente estável, é um dos fenômenos característicos associados a equações diferenciais não lineares.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, um sistema autônomo está expresso em coordenadas polares. Determine todas as soluções periódicas, todos os ciclos limites e suas características de estabilidade.

1. $dr/dt = r^2(1 - r^2)$, $d\theta/dt = 1$
2. $dr/dt = r(1 - r)^2$, $d\theta/dt = -1$
3. $dr/dt = r(r - 1)(r - 3)$, $d\theta/dt = 1$
4. $dr/dt = r(1 - r)(r - 2)$, $d\theta/dt = -$
5. $dr/dt = \operatorname{sen} \pi r$, $d\theta/dt = 1$
6. $dr/dt = r|r - 2|(r - 3)$, $d\theta/dt = -1$
7. Se $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que $y(dx/dt) - x(dy/dt) = -r^2(d\theta/dt)$.
8. (a) Mostre que o sistema

$$dx/dt = -y + xf(r)/r, \qquad dy/dt = x + yf(r)/r$$

tem soluções periódicas correspondentes aos zeros de $f(r)$. Qual o sentido do movimento nas trajetórias fechadas no plano de fase?

(b) Seja $f(r) = r(r - 2)^2(r^2 - 4r + 3)$. Determine todas as soluções periódicas e suas características de estabilidade.

9. Determine as soluções periódicas, se existirem, do sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2), \qquad \frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2).$$

10. Usando o Teorema 9.7.2, mostre que o sistema autônomo linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y$$

não tem solução periódica (diferente de $x = 0, y = 0$) se $a_{11} + a_{22} \neq 0$.

Em cada um dos Problemas 11 e 12, mostre que o sistema dado não tem soluções periódicas não constantes.

11. $dx/dt = x + y + x^3 - y^2$, $dy/dt = -x + 2y + x^2y + y^3/$
12. $dx/dt = -2x - 3y - xy^2$, $dy/dt = y + x^3 - x^2y$
13. Prove o Teorema 9.7.2 completando o argumento a seguir. De acordo com o teorema de Green no plano, se C for uma curva fechada simples suficientemente suave e se F e G forem funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\int_C [F(x,y)\,dy - G(x,y)\,dx] = \iint_R [F_x(x,y) + G_y(x,y)]\,dA,$$

onde C é percorrida no sentido trigonométrico e R é a região limitada por C. Suponha que $x = \phi(t), y = \psi(t)$ é uma solução periódica do sistema (15) com período T. Seja C a curva fechada dada por $x = \phi(t), y = \psi(t)$ para $0 \le t \le T$. Mostre que, para esta curva, a integral de linha é nula. Depois, mostre que a conclusão do Teorema 9.7.2 tem que seguir.

14. (a) Examinando os gráficos de u em função de t nas Figuras 9.7.3, 9.7.5 e 9.7.7, estime o período T do oscilador de van der Pol nesses casos.
    (b) Calcule e faça o gráfico das soluções da equação de van der Pol para outros valores do parâmetro μ. Estime o período T também nesses casos.
    (c) Faça o gráfico dos valores estimados de T em função de μ. Descreva como T depende de μ.

15. A equação

$$u'' - \mu(1 - \tfrac{1}{3}u'^2)u' + u = 0$$

é chamada, muitas vezes, de equação de Rayleigh.[13]

    (a) Escreva a equação de Rayleigh como um sistema de duas equações de primeira ordem.
    (b) Mostre que a origem é o único ponto crítico desse sistema. Determine seu tipo e se é assintoticamente estável, estável ou instável.
    (c) Seja $\mu = 1$. Escolha condições iniciais e calcule a solução correspondente para o sistema em um intervalo como $0 \le t \le 20$ ou maior. Faça o gráfico de u em função de t e faça, também, o gráfico da trajetória no plano de fase. Observe que a trajetória tende a uma curva fechada (um ciclo limite). Estime a amplitude A e o período T do ciclo limite.
    (d) Repita o item (c) para outros valores de μ, como $\mu = 0.2; 0.5; 2$ e 5. Em cada caso, estime a amplitude A e o período T.
    (e) Descreva como o ciclo limite muda quando μ aumenta. Por exemplo, faça uma tabela e/ou um gráfico de A e T em função de μ.

16. Considere o sistema de equações

$$x' = \mu x + y - x(x^2 + y^2), \qquad y' = -x + \mu y - y(x^2 + y^2), \tag{i}$$

onde μ é um parâmetro. Observe que esse sistema é igual ao do Exemplo 1, exceto pela introdução de μ.

    (a) Mostre que a origem é o único ponto crítico.
    (b) Encontre o sistema linear que aproxima as Eqs. (i) perto da origem e seus autovalores. Determine o tipo e a estabilidade do ponto crítico na origem. Como esta classificação depende de μ?
    (c) Referindo-se ao Exemplo 1, se necessário, coloque as Eqs. (i) em coordenadas polares.
    (d) Mostre que, quando $\mu > 0$, existe uma solução periódica $r = \sqrt{\mu}$. Resolvendo o sistema encontrado no item (c) ou fazendo gráficos de soluções aproximadas calculadas numericamente, conclua que esta solução periódica atrai todas as outras soluções não nulas.

Nota: quando o parâmetro μ aumenta passando pelo valor zero, o ponto crítico na origem, anteriormente assintoticamente estável, perde sua estabilidade e, ao mesmo tempo, aparece uma solução nova assintoticamente estável (o ciclo limite). Assim, o ponto $\mu = 0$ é um ponto de bifurcação; este tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação de Hopf.**[14]

17. Considere o sistema de van der Pol

$$x' = y, \quad y' = -x + \mu(1 - x^2)y,$$

onde permitimos agora que μ seja qualquer número real.

    (a) Mostre que a origem é o único ponto crítico. Determine seu tipo e propriedades de estabilidade, e como eles dependem de μ.
    (b) Seja $\mu = -1$; desenhe um retrato de fase e conclua que existe uma solução periódica contendo a origem em seu interior. Note que esta solução periódica é instável. Compare seu gráfico com a Figura 9.7.4.
    (c) Desenhe um retrato de fase para alguns outros valores negativos de μ. Descreva como a forma da solução periódica varia com μ.

---

[13]John William Strutt (1842-1919), o terceiro Lord Rayleigh, fez contribuições notáveis em diversas áreas da física matemática. Fora cinco anos como Professor de Física da Cátedra de Cavendish em Cambridge, trabalhou principalmente em seu laboratório particular em casa. Ganhou o Prêmio Nobel em 1904 pela descoberta do argônio.

[14]Eberhard Hopf (1902-1983) nasceu na Áustria e foi educado na Universidade de Berlim, mas passou grande parte de sua vida nos Estados Unidos, principalmente na Universidade de Indiana. As bifurcações de Hopf receberam este nome em honra de seu tratamento rigoroso delas em um artigo de 1942.

(d) Considere valores de μ pequenos em módulo, positivos ou negativos. Desenhando retratos de fase, determine como a solução periódica varia quando $\mu \to 0$. Compare o comportamento do sistema de van der Pol quando μ aumenta passando por zero com o comportamento do sistema no Problema 16.

Os Problemas 18 e 19 estendem as considerações sobre o modelo predador-presa de Rosenzweig e MacArthur introduzido no Problema 13 da Seção 9.5.

18. Considere o sistema

$$x' = x\left(2{,}4 - 0{,}2x - \frac{2y}{x+6}\right), \quad y' = y\left(-0{,}25 + \frac{x}{x+6}\right).$$

Note que este sistema só difere do sistema no Problema 13 da Seção 9.5 na taxa de crescimento da presa.

(a) Encontre todos os pontos críticos.

(b) Determine o tipo e as propriedades de estabilidade de cada ponto crítico.

(c) Desenhe um retrato de fase no primeiro quadrante e conclua que existe um ciclo limite assintoticamente estável. Assim, este modelo prevê uma oscilação estável em longo prazo das populações da presa e do predador.

19. Considere o sistema

$$x' = x\left(a - 0{,}2x - \frac{2y}{x+6}\right), \quad y' = y\left(-0{,}25 + \frac{x}{x+6}\right),$$

onde a é um parâmetro positivo. Note que este sistema inclui o do Problema 18, que acabamos de ver, e também o do Problema 13 na Seção 9.5.

(a) Encontre todos os pontos críticos.

(b) Considere o ponto crítico no interior do primeiro quadrante. Encontre os autovalores do sistema linear aproximado. Determine o valor a_0 onde este ponto crítico muda de assintoticamente estável para instável.

(c) Desenhe um retrato de fase para um valor de a ligeiramente maior do que a_0. Observe que aparece um ciclo limite. Como este ciclo limite varia quando a aumenta mais?

20. Existem determinadas reações químicas nas quais as concentrações constituintes oscilam periodicamente com o tempo. O sistema

$$x' = 1 - (b+1)x + x^2y/4, \qquad y' = bx - x^2y/4$$

é um caso especial de um modelo, conhecido como bruxelador,* deste tipo de reação. Suponha que b é um parâmetro positivo e considere soluções no primeiro quadrante do plano xy.

(a) Mostre que o único ponto crítico é $(1, 4b)$.

(b) Encontre os autovalores do sistema linear aproximado, no ponto crítico.

(c) Classifique o ponto crítico quanto a tipo e estabilidade. Como a classificação depende de b?

(d) Quando b aumenta e passa por um determinado valor crítico b_0, o ponto crítico muda de assintoticamente estável para instável. Qual o valor de b_0?

(e) Desenhe trajetórias no plano de fase para valores de b ligeiramente menores e ligeiramente maiores do que b_0. Observe o ciclo limite quando $b > b_0$; o bruxelador tem um ponto de bifurcação de Hopf em b_0.

(f) Desenhe trajetórias para diversos valores de $b > b_0$ e observe como o ciclo limite se deforma quando b aumenta.

21. O sistema

$$x' = 3(x + y - \tfrac{1}{3}x^3 - k), \qquad y' = -\tfrac{1}{3}(x + 0{,}8y - 0{,}7)$$

é um caso especial das equações de Fitzhugh-Nagumo,[15] que modelam a transmissão de impulsos neurais ao longo de um axônio. O parâmetro k é o estímulo externo.

(a) Mostre que o sistema tem um único ponto crítico independente do valor de k.

(b) Encontre o ponto crítico para $k = 0$ e mostre que é um ponto espiral assintoticamente estável. Repita a análise para $k = 0{,}5$ e mostre que o ponto crítico é agora um ponto espiral instável. Desenhe um retrato de fase para o sistema em cada caso.

**Brusselator* no original inglês; tem este nome por ter sido proposto pelo grupo de Ilya Prigogine em Bruxelas. (N.T.)

[15]Richard Fitzhugh (1922-2007), do Serviço de Saúde Pública dos Estados Unidos, e Jin-Ichi Nagumo (1926-1999), da Universidade de Tóquio, propuseram, independentemente, uma simplificação do modelo de Hodgkin e Huxley para transmissão neural em 1961.

(c) Encontre o valor k_0 onde o ponto crítico muda de assintoticamente estável para instável. Encontre o ponto crítico e desenhe um retrato de fase para o sistema para $k = k_0$.

(d) Para $k > k_0$ o sistema exibe um ciclo limite assintoticamente estável; o sistema tem um ponto de bifurcação de Hopf em k_0. Desenhe um retrato de fase para $k = 0{,}4$; 0,5 e 0,6; note que o ciclo limite não é pequeno quando k está perto de k_0. Faça também o gráfico de x em função de t e estime o período T em cada caso.

(e) Quando k aumenta mais, existe um valor k_1 no qual o ponto crítico torna-se de novo assintoticamente estável e o ciclo limite desaparece. Encontre k_1.

9.8 Caos e Atratores Estranhos: as Equações de Lorenz

Em princípio, os métodos descritos neste capítulo para sistemas autônomos de segunda ordem também podem ser aplicados para sistemas de ordem maior. Na prática, aparecem diversas dificuldades ao se tentar fazer isso. Um problema é que existe um número maior de casos que podem ocorrer, e esse número cresce com o número de equações no sistema (e com a dimensão do espaço de fase). Outro problema é a dificuldade em se fazer gráficos de trajetórias de maneira precisa em um espaço de fase com dimensão maior do que dois; mesmo em três dimensões pode não ser fácil construir um gráfico claro e compreensível das trajetórias, e isso se torna mais difícil quando o número de variáveis aumenta. Finalmente, e isso só se tornou claro nos últimos anos, existem fenômenos diferentes e muito complexos que não ocorrem em sistemas de segunda ordem e que podem ocorrer, e o fazem com frequência, em sistemas de ordem três ou maiores. Nosso objetivo, nesta seção, é dar uma breve introdução a alguns desses fenômenos discutindo um sistema autônomo particular de terceira ordem que tem sido estudado intensamente. Em alguns aspectos, a apresentação aqui é semelhante ao tratamento da equação de diferenças logística na Seção 2.9.

Um problema importante em meteorologia e em outras aplicações de dinâmica dos fluidos trata do movimento de uma camada de fluido, como a atmosfera da Terra, que é mais quente em baixo do que em cima; veja a Figura 9.8.1. Se a diferença de temperatura vertical ΔT é pequena, então a temperatura varia linearmente com a altitude, mas não há um movimento significativo da camada de fluido. No entanto, se ΔT é suficientemente grande então o ar quente sobe, deslocando o ar frio que está sobre ele, o que resulta em um movimento regular que se propaga. Se as diferenças de temperatura aumentam ainda mais, então finalmente o fluxo regular em propagação transforma-se em um movimento mais complexo e turbulento.

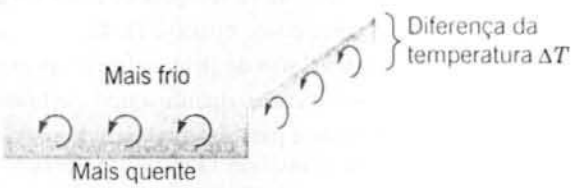


FIGURA 9.8.1 Uma camada de fluido aquecida por baixo.

Ao investigar este fenômeno, Edward Lorenz[16] foi levado (por um processo muito complicado para ser descrito aqui) ao sistema não linear autônomo tridimensional

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(-x + y), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{1}$$

As Eqs. (1) são chamadas geralmente de equações de Lorenz.[17] Observe que a segunda e a terceira equações contêm termos não lineares quadráticos. No entanto, exceto por ser um sistema de três equações

[16]Edward N. Lorenz (1917-2008), um meteorologista americano, recebeu seu Ph.D. do Instituto de Tecnologia de Massachusetts em 1948 e ficou associado a esta instituição ao longo de sua carreira científica. Seus primeiros estudos sobre o sistema (1) apareceram em um artigo famoso de 1963 que tratava da estabilidade de fluxos de fluidos na atmosfera.

[17]O livro de Sparrow, listado nas referências ao final deste capítulo, contém um tratamento bastante completo das equações de Lorenz.

as equações de Lorenz parecem, superficialmente, não mais complicadas do que as equações para duas espécies em competição, ou predador-presa, discutidas nas Seções 9.4 e 9.5. A variável x nas Eqs. (1) está relacionada à intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis y e z estão relacionadas às variações de temperatura nas direções horizontal e vertical. As equações de Lorenz envolvem, também, três parâmetros σ, r e b, todos reais e positivos. Os parâmetros σ e b dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido. Para a atmosfera da Terra, valores razoáveis para esses parâmetros são $\sigma = 10$ e $b = 8/3$; atribuiremos esses valores na maior parte do que segue nesta seção. O parâmetro r, por outro lado, é proporcional à diferença de temperatura ΔT, e nosso objetivo é investigar como a natureza das soluções das Eqs. (1) varia com r.

Antes de prosseguir, observamos que para um sistema autônomo com três equações de primeira ordem

$$dx/dt = F(x, y, z), \quad dy/dt = G(x, y, z), \quad dz/dt = H(x, y, z), \tag{2}$$

a matriz jacobiana $\mathbf{J}$ é definida por

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Assim, para as equações de Lorenz (1) a matriz jacobiana é

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

O primeiro passo para se analisar as equações de Lorenz é localizar os pontos críticos, resolvendo-se o sistema algébrico

$$\begin{aligned} \sigma x - \sigma y &= 0, \\ rx - y - xz &= 0, \\ -bz + xy &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Da primeira equação, temos $y = x$. Então, eliminando y da segunda e da terceira equações, obtemos

$$x(r - 1 - z) = 0, \tag{6}$$

$$-bz + x^2 = 0. \tag{7}$$

Um modo de satisfazer a Eq. (6) é escolher $x = 0$. Segue, então, que $y = 0$ e, da Eq. (7), $z = 0$. De maneira alternativa, podemos satisfazer a Eq. (6) escolhendo $z = r - 1$. Logo, a Eq. (7) implica que $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ e, então, $y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ também. Observe que essas expressões para x e y só são reais quando $r \geq 1$. Assim, $(0, 0, 0)$, que denotaremos por P_1, é um ponto crítico para todos os valores de r e é o único ponto crítico para $r < 1$. No entanto, quando $r > 1$, também existem outros dois pontos críticos, a saber, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Vamos denotar esses dois pontos por P_2 e P_3, respectivamente. Note que todos os três pontos críticos coincidem quando $r = 1$. Quando r aumenta, passando por 1, o ponto crítico P_1 na origem se bifurca e os pontos críticos P_2 e P_3 aparecem.

Vamos determinar, agora, o comportamento local das soluções em uma vizinhança de cada ponto crítico. Embora a maior parte da análise a ser feita funcione para valores arbitrários de σ e b, simplificaremos nosso trabalho usando os valores $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Perto da origem (do ponto crítico P_1), a aproximação linear é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Os autovalores[18] são determinados da equação

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda & 10 & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 - \lambda \end{vmatrix} = -(8/3 + \lambda)[\lambda^2 + 11\lambda - 10(r-1)] = 0. \tag{9}$$

[18]Como r aparece como um parâmetro nas equações de Lorenz, usaremos λ para denotar os autovalores.

Portanto,

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2}. \tag{10}$$

Note que todos os três autovalores são negativos para $r < 1$; por exemplo, quando $r = 1/2$, os autovalores são $\lambda_1 = -8/3$, $\lambda_2 = -10{,}52494$ e $\lambda_3 = -0{,}47506$. Então a origem é assintoticamente estável para r nesse intervalo, tanto para a aproximação linear (8) quanto para o sistema original (1). No entanto, λ_3 muda de sinal quando $r = 1$ e é positivo para $r > 1$. O valor $r = 1$ corresponde ao início da propagação do fluxo no problema físico descrito anteriormente. A origem é instável para $r > 1$; todas as soluções começando perto da origem tendem a crescer, exceto as que pertencem ao plano determinado pelos autovetores associados a λ_1 e λ_2 [ou, para o sistema não linear (1), em uma determinada superfície tangente a esse plano na origem].

Vamos considerar, agora, a vizinhança do ponto crítico $P_2(\sqrt{8(r-1)/3}, \sqrt{8(r-1)/3}, r-1)$ para $r > 1$. Se u, v e w são as perturbações do ponto crítico nas direções dos eixos de x, y e z, respectivamente, então o sistema linear aproximado é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{8(r-1)/3} \\ \sqrt{8(r-1)/3} & \sqrt{8(r-1)/3} & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Os autovalores da matriz de coeficientes da Eq. (11) são determinados pela equação

$$3\lambda^3 + 41\lambda^2 + 8(r + 10)\lambda + 160(r - 1) = 0, \tag{12}$$

que é obtida através de cálculos algébricos diretos omitidos aqui. As soluções da Eq. (12) dependem de r da seguinte maneira:

Para $1 < r < r_1 \cong 1{,}3456$, existem três autovalores reais negativos.

Para $r_1 < r < r_2 \cong 24{,}737$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real negativa.

Para $r_2 < r$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real positiva.

Os mesmos resultados são obtidos para o ponto crítico P_3. Logo, existem diversas situações diferentes.

Para $0 < r < 1$, o único ponto crítico é P_1 e ele é assintoticamente estável. Todas as soluções tendem a esse ponto (a origem) quando $t \to \infty$.

Para $1 < r < r_1$, os pontos críticos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções próximas tendem a um dos pontos P_2 e P_3 exponencialmente.

Para $r_1 < r < r_2$, os pontos críticos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções próximas tendem a um dos pontos P_2 e P_3; a maior parte delas tem forma de espiral entrando no ponto crítico.

Para $r_2 < r$, todos os três pontos críticos são instáveis. A maior parte das soluções próximas de P_2 ou P_3 tem forma espiral e se afasta do ponto crítico.

No entanto, esse não é o final da história. Vamos considerar soluções para r um pouco maior do que r_2. Neste caso P_1 tem um autovalor positivo e cada um dos pontos P_2 e P_3 tem um par de autovalores complexos com parte real positiva. Uma trajetória só pode se aproximar de um dos pontos críticos por caminhos altamente restritivos. O menor desvio desses caminhos faz com que a trajetória se afaste do ponto crítico. Como nenhum dos pontos críticos é estável, poderíamos esperar que a maioria das trajetórias tendesse a infinito para t muito grande. Entretanto, pode-se mostrar que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$; veja o Problema 5. De fato, pode-se mostrar que todas as soluções acabam tendendo a determinado conjunto limite de pontos com volume nulo. Aliás, isso não é válido só para $r > r_2$, mas para todos os valores positivos de r.

A Figura 9.8.2 mostra um gráfico de valores calculados de x em função de t para uma solução típica com $r > r_2$. Note que a solução oscila entre valores positivos e negativos de um modo um tanto errático. De fato, o gráfico de x em função de t parece uma vibração aleatória, embora as equações de Lorenz sejam inteiramente determinísticas e a solução esteja completamente determinada pelas condições iniciais. Apesar disso, a solução exibe, também, uma certa *regularidade*, no sentido de que a frequência e a amplitude permanecem essencialmente constantes no tempo.

As soluções das equações de Lorenz são, também, extremamente sensíveis a perturbações nas condições iniciais. A Figura 9.8.3 mostra os gráficos dos valores calculados de x em função de t para duas soluções com condições iniciais (5; 5; 5) e (5,01; 5; 5). O gráfico pontilhado é igual ao da Figura 9.8.2, enquanto o gráfico sólido começa em um ponto próximo. As duas soluções permanecem próximas até t

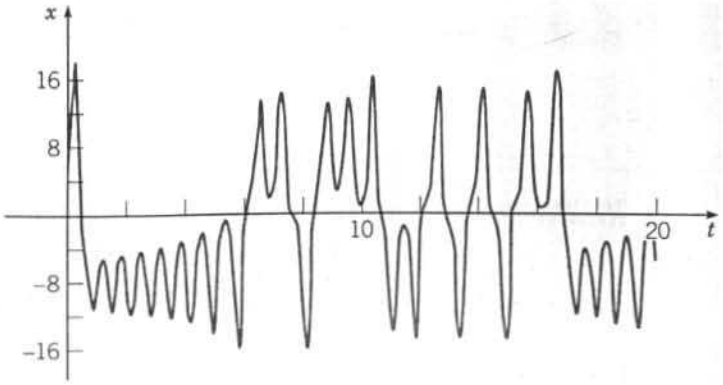


FIGURA 9.8.2 Um gráfico de x em função de t para as equações de Lorenz (1) com $r = 28$; o ponto inicial é $(5, 5, 5)$.

chegar perto de 10, quando elas se tornam bem diferentes e, de fato, parecem não ter relação entre si. Foi essa propriedade que atraiu a atenção de Lorenz em seu estudo original dessas equações e fez com que ele concluísse que previsões de tempo em longo prazo são, provavelmente, impossíveis.

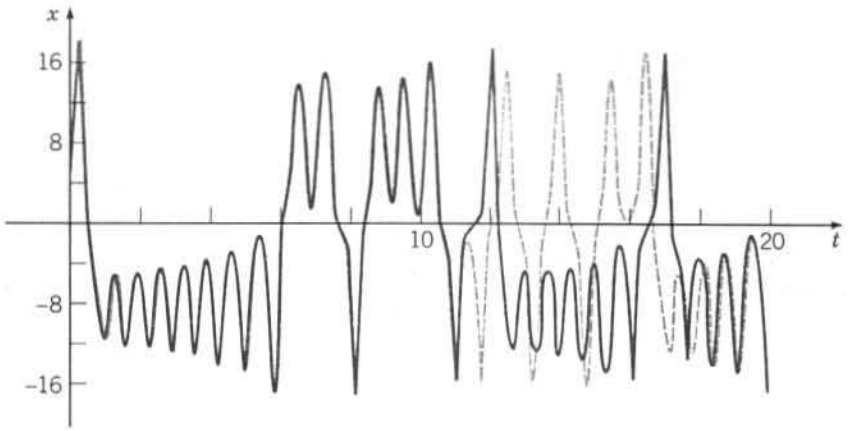


FIGURA 9.8.3 Gráficos de x em função de t para duas soluções próximas das equações de Lorenz com $r = 28$; o ponto inicial para a curva pontilhada é (5; 5; 5) e para a curva sólida é (5,01; 5; 5).

O conjunto atrator, neste caso, embora de volume nulo, tem uma estrutura bastante complicada e é chamado de **atrator estranho**. O termo **caótico** tem sido usado, em geral, para descrever soluções como as ilustradas nas Figuras 9.8.2 e 9.8.3.

Para determinar como e por que o atrator estranho é criado, ajuda investigar soluções para valores menores de r. Para $r = 21$ a Figura 9.8.4 mostra soluções que começam próximas de três pontos iniciais diferentes. Para o ponto inicial $(3, 8, 0)$ a solução começa a convergir para o ponto P_3 quase que imediatamente; veja a Figura 9.8.4*a*. Para o segundo ponto inicial $(5, 5, 5)$ existe um intervalo razoavelmente curto de comportamento transiente, depois do qual a solução converge para P_2; veja a Figura 9.8.4*b*. No entanto, como mostra a Figura 9.8.4*c*, para o terceiro ponto inicial $(5, 5, 10)$ existe um intervalo muito mais longo de comportamento transiente caótico antes de a solução acabar convergindo para P_2. Quando r aumenta, a duração do comportamento caótico transiente também aumenta. Quando $r = r_3 \cong 24{,}06$, o comportamento caótico transiente parece durar indefinidamente, e aparece o atrator estranho.

Podemos mostrar, também, as trajetórias das equações de Lorenz no espaço de fase tridimensional ou, pelo menos, projeções delas em diversos planos. As Figuras 9.8.5 e 9.8.6 mostram projeções nos planos xy e xz, respectivamente, da trajetória que começa em $(5, 5, 5)$. Observe que os gráficos nessas figuras parecem se cruzar repetidamente, mas isso não pode ser verdade para as trajetórias no espaço tridimensional devido ao teorema geral de unicidade. Esses cruzamentos aparentes são devidos ao caráter bidimensional das figuras.

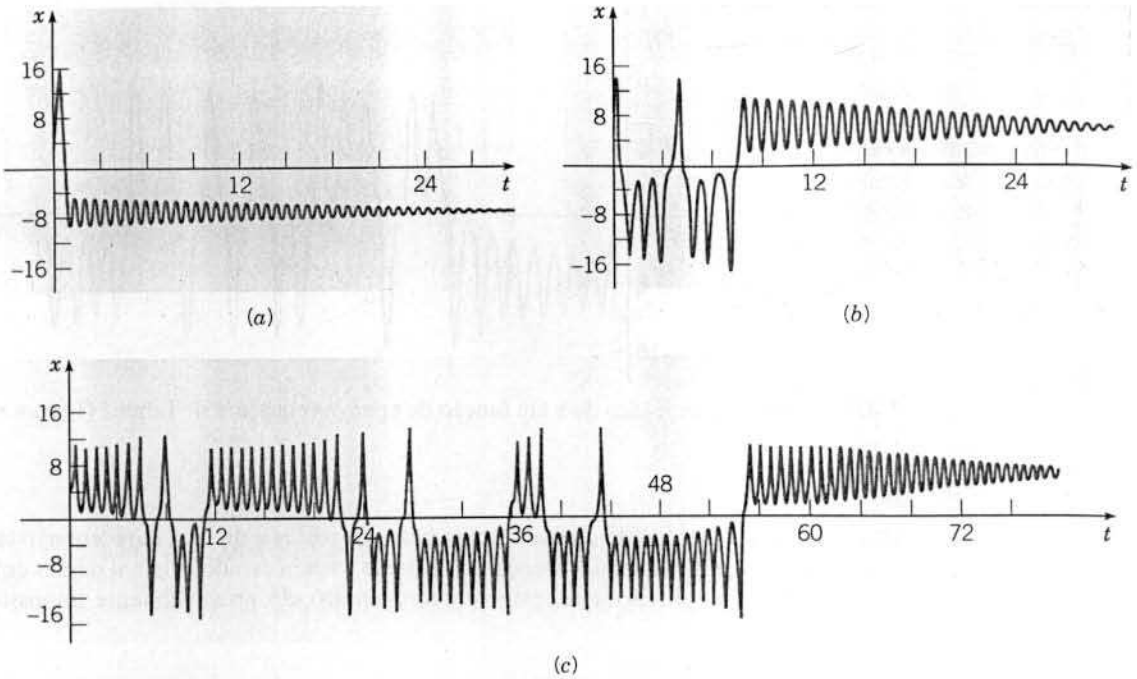


FIGURA 9.8.4 Gráficos de x em função de t para três soluções das equações de Lorenz com $r = 21$. (a) O ponto inicial é $(3, 8, 0)$. (b) O ponto inicial é $(5, 5, 5)$. (c) O ponto inicial é $(5, 5, 10)$.

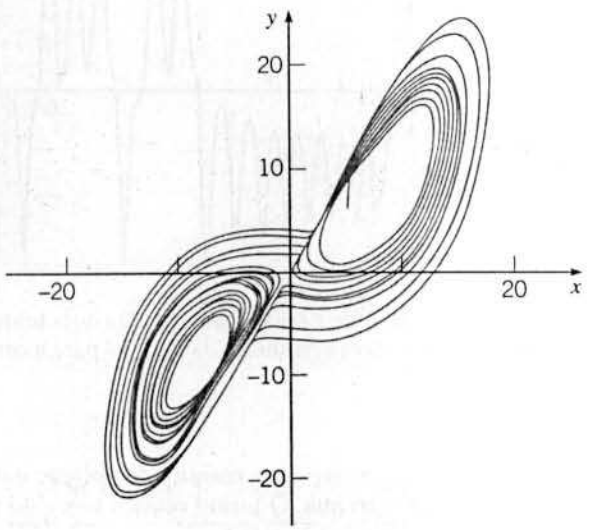


FIGURA 9.8.5 Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz (com $r = 28$) no plano xy.

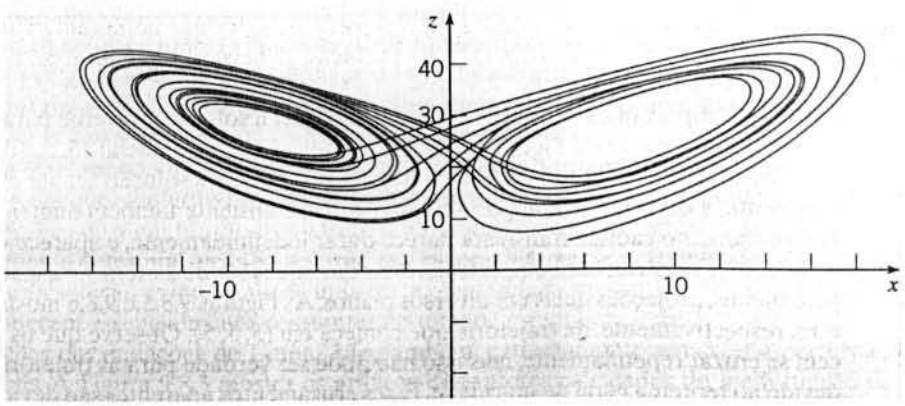


FIGURA 9.8.6 Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz (com $r = 28$) no plano xz.

A sensibilidade das soluções a perturbações nos dados iniciais tem implicações, também, para cálculos numéricos, como os apresentados aqui. Tamanhos de passos diferentes, algoritmos numéricos diferentes ou mesmo a execução do mesmo algoritmo em máquinas diferentes vão introduzir pequenas diferenças na solução calculada numericamente, o que acaba levando a grandes desvios. Por exemplo, a sequência exata de laços negativos e positivos na solução calculada depende fortemente do algoritmo numérico escolhido e de sua implementação, além das condições iniciais. No entanto, a aparência geral da solução e a estrutura do conjunto atrator são independentes de todos esses fatores.

Soluções das equações de Lorenz para outros intervalos do parâmetro exibem outros tipos interessantes de comportamento. Por exemplo, para determinados valores de r maiores do que r_2, comportamento caótico intermitente separa intervalos longos de oscilação periódica aparentemente regular. Para outros intervalos de r, as soluções mostram a propriedade de duplicação de período que vimos na Seção 2.9 para a equação de diferenças logísticas. Algumas dessas características são discutidas nos problemas.

Desde cerca de 1975 as equações de Lorenz e outros sistemas autônomos de ordem mais alta têm sido estudados intensamente, e essa é uma das áreas mais ativas da pesquisa matemática atual. O comportamento caótico de soluções parece ser muito mais comum do que se suspeitava anteriormente, e muitas perguntas permanecem sem resposta. Algumas delas são de natureza matemática, enquanto outras estão relacionadas a aplicações físicas ou interpretação de soluções.

PROBLEMAS

Os Problemas de 1 a 3 pedem para você preencher alguns detalhes da análise das equações de Lorenz feitas nesta seção.

1. (a) Mostre que os autovalores do sistema linear (8), válidos perto da origem, são dados pela Eq. (10).
   (b) Determine os autovetores correspondentes.
   (c) Determine os autovalores e autovetores do sistema (8) quando $r = 28$.

2. (a) Mostre que a aproximação linear válida perto do ponto crítico P_2 é dada pela Eq. (11).
   (b) Mostre que os autovalores do sistema (11) satisfazem a Eq. (12).
   (c) Para $r = 28$, resolva a Eq. (12) e determine, assim, os autovalores do sistema (11).

3. (a) Resolvendo a Eq. (12) numericamente, mostre que a parte real das raízes complexas muda de sinal quando $r \cong 24{,}737$.
   (b) Mostre que um polinômio de grau três da forma $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ tem uma raiz real e duas raízes imaginárias puras só se $AB = C$.
   (c) Aplicando o resultado do item (b) à Eq. (12), mostre que a parte real das raízes complexas muda de sinal quando $r = 470/19$.

4. Use a função de Liapunov $V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$ para mostrar que a origem é um ponto crítico globalmente assintoticamente estável para as equações de Lorenz (1) se $r < 1$.

5. Considere o elipsóide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = c > 0.$$

   (a) Calcule dV/dt ao longo das trajetórias das equações de Lorenz (1).
   (b) Determine uma condição suficiente sobre c para que toda trajetória cruzando $V(x, y, z) = c$ esteja orientada para dentro.
   (c) Calcule a condição encontrada no item (b) no caso em que $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

Em cada um dos Problemas de 6 a 10, faça as investigações pedidas sobre as equações de Lorenz.

6. Para $r = 28$, faça o gráfico de x em função de t para os casos ilustrados nas Figuras 9.8.2 e 9.8.3. Seus gráficos são iguais aos das figuras? Lembre-se da discussão sobre cálculos numéricos no texto.

7. Para $r = 28$, faça as projeções nos planos xy e xz, respectivamente, da trajetória que começa no ponto (5, 5, 5). Os gráficos são iguais aos das Figuras 9.8.5 e 9.8.6?

8. (a) Para $r = 21$, faça os gráficos de x em função de t para as soluções com pontos iniciais (3, 8, 0), (5, 5, 5) e (5, 5, 10). Use um intervalo para t de, pelo menos, $0 \le t \le 30$. Compare seus gráficos com os da Figura 9.8.4.
   (b) Repita os cálculos do item (a) para $r = 22$, $r = 23$ e $r = 24$. Aumente o intervalo para t o quanto for necessário para que você possa determinar quando cada solução começa a convergir para um dos pontos críticos. Registre a duração aproximada do estado transiente caótico em cada caso. Descreva como essa quantidade depende do valor de r.
   (c) Repita os cálculos feitos nos itens (a) e (b) para valores de r ligeiramente maiores do que 24. Tente estimar o valor de r para o qual a duração do estado transiente caótico tende a infinito.

9. Em determinados intervalos para r, as equações de Lorenz exibem uma propriedade de duplicação do período semelhante ao que ocorre na equação de diferenças logística discutida na Seção 2.9. Cálculos cuidadosos podem revelar esse fenômeno.
   (a) Um intervalo de duplicação do período inclui o valor $r = 100$. Seja $r = 100$ e faça o gráfico da trajetória que começa em (5, 5, 5) ou em outro ponto inicial de sua escolha. A solução parece ser periódica? Qual é o período?
   (b) Repita os cálculos do item (a) para valores ligeiramente menores de r. Quando $r \cong 99{,}98$, você pode ser capaz de observar que o período da solução dobra. Tente observar este resultado fazendo cálculos para valores próximos de r.
   (c) Quando r diminui mais, o período da solução dobra repetidamente. O próximo valor de r para o qual o período dobra é em torno de $r = 99{,}629$. Tente observar isso traçando trajetórias para valores próximos de r.

10. Considere, agora, valores de r ligeiramente maiores do que os do Problema 9.
   (a) Faça o gráfico de trajetórias das equações de Lorenz para valores de r entre 100 e 100,78. Você deveria observar uma solução periódica regular para esse intervalo de valores de r.
   (b) Faça o gráfico de trajetórias das equações de Lorenz para valores de r entre 100,78 e 100,8. Determine, o melhor que puder, como e quando a trajetória periódica deixa de existir.

O Sistema de Rössler.[19] O sistema

$$x' = -y - z, \quad y' = x + ay, \quad z' = b + z(x - c), \tag{i}$$

onde a, b e c são parâmetros positivos, é conhecido como o sistema de Rössler.[20] É um sistema relativamente simples que consiste em duas equações lineares e uma terceira equação com uma única não linearidade quadrática. Nos Problemas de 11 a 15, pedimos que você faça algumas investigações numéricas sobre esse sistema com o objetivo de explorar sua propriedade de duplicação de período. Para simplificar, faça $a = 0{,}25$, $b = 0{,}5$ e deixe $c > 0$ permanecer arbitrário.

11. (a) Mostre que não existem pontos críticos quando $c < \sqrt{0{,}5}$, existe um único ponto crítico quando $c = \sqrt{0{,}5}$ e existem dois pontos críticos quando $c > \sqrt{0{,}5}$.
   (b) Encontre o(s) ponto(s) crítico(s) e determine os autovalores correspondentes da matriz jacobiana quando $c = \sqrt{0{,}5}$ e quando $c = 1$.
   (c) Como você acha que será o comportamento das trajetórias do sistema para $c = 1$? Desenhe a trajetória que começa na origem. Ela se comporta da maneira que você esperava?
   (d) Escolha um ou dois outros pontos iniciais e desenhe as trajetórias correspondentes. Esses gráficos estão de acordo com suas expectativas?

12. (a) Seja $c = 1{,}3$. Encontre os pontos críticos e os autovalores correspondentes. O que você pode concluir desta informação, se é que pode concluir alguma coisa?
   (b) Desenhe a trajetória que começa na origem. Qual o comportamento limite desta trajetória? Para ver claramente o comportamento limite, você deve escolher uma janela com o intervalo de t de modo a eliminar o comportamento transiente inicial.
   (c) Escolha um ou dois outros pontos iniciais e desenhe as trajetórias correspondentes. O comportamento limite de cada uma é igual ao do item (b)?
   (d) Note que existe um ciclo limite cuja bacia de atração é razoavelmente grande (mas não é todo o espaço xyz). Faça um gráfico de x, y ou z em função de t e estime o período T_1 de movimento em torno do ciclo limite.

13. O ciclo limite encontrado no Problema 12 aparece como resultado de uma bifurcação de Hopf em um valor c_1 de c entre 1 e 1,3. Determine, ou pelo menos estime com mais precisão, o valor de c_1. Existem diversas maneiras de fazer isso.
   (a) Desenhe trajetórias para diversos valores de c.
   (b) Calcule os autovalores nos pontos críticos para diversos valores de c.
   (c) Use o resultado do Problema 3(b) desta seção.

14. (a) Seja $c = 3$. Encontre os pontos críticos e os autovalores correspondentes.
   (b) Desenhe a trajetória que começa no ponto $(1, 0, -2)$. Observe que o ciclo limite agora consiste em dois laços antes de fechar; é chamado muitas vezes de 2-ciclo.

[19]Otto E. Rössler (1940-), médico e bioquímico alemão, foi estudante e depois professor na Universidade de Tübingen. As equações que recebem seu nome apareceram pela primeira vez em um artigo que publicou em 1976.
[20]Veja o livro de Strogatz para uma discussão mais completa e outras referências.

(c) Faça o gráfico de x, y ou z em função de t e mostre que o período T_2 de movimento no 2-ciclo está muito próximo do dobro do período T_1 do ciclo limite simples no Problema 12. Ocorreu uma bifurcação com duplicação de período dos ciclos para algum valor de c entre 1 e 1,3.

15. (a) Seja $c = 3{,}8$. Encontre os pontos críticos e os autovalores correspondentes.

(b) Desenhe a trajetória que começa no ponto $(1, 0, -2)$. Observe que o ciclo limite agora é um 4-ciclo. Encontre o período T_4 do movimento. Ocorreu outra bifurcação com duplicação de período para c entre 3 e 3,8.

(c) Para $c = 3{,}85$, mostre que o ciclo limite é um 8-ciclo. Verifique que seu período está muito próximo de oito vezes o período do ciclo limite simples no Problema 12.

Nota: à medida que c continua aumentando há uma sequência acelerada de bifurcações com duplicação de período. Os valores de bifurcação de c convergem para um limite que marca o início do caos.

REFERÊNCIAS

Existem muitos livros que ampliam o material deste capítulo. Eles incluem

Drazin, P. G., *Nonlinear Systems* (Cambridge: Cambridge University Press, 1992).

Glendinning, P., *Stability, Instability, and Chaos* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).

Grimshaw, R., *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1990).

Hubbard, J. H., and West, B. H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher Dimensional Systems* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1995)

Dois livros especialmente importantes do ponto de vista de aplicações são

Danby, J. M. A., *Computer Applications to Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985).

Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994).

Uma boa referência sobre o segundo método de Liapunov é

LaSalle, J., and Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications* (NewYork: Academic Press, 1961).

Entre o grande número de livros mais extensos sobre equações diferenciais, estão

Arnol'd, V. I., *Ordinary Differential Equations* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1992). Translation of the third Russian edition by Roger Cooke.

Brauer, F., and Nohel, J., *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

Guckenheimer, J.C., and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1983).

Uma referência clássica sobre ecologia é

Odum, E. P., *Fundamentals of Ecology* (3rd ed.) (Philadelphia: Saunders, 1971).

Três livros que tratam de ecologia e dinâmica populacional em um nível mais matemático são

Brauer, Fred and Castillo-Chávez, Carlos, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 2001).

May, R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973).

Pielou, E. C., *Mathematical Ecology* (New York: Wiley, 1977).

O artigo original sobre as equações de Lorenz é

Lorenz, E. N., "Deterministic Nonperiodic Flow," *Journal of the Atmospheric Sciences 20* (1963), pp. 130–141.

Um tratamento bastante detalhado das equações de Lorenz está em

Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1982).

CAPÍTULO

10

Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

Em muitos problemas físicos importantes existem duas ou mais variáveis independentes, de modo que o modelo matemático correspondente envolve equações diferenciais parciais, em vez de ordinárias. Este capítulo trata de um método importante para se resolver equações diferenciais parciais, conhecido como método de separação de variáveis. Sua característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que têm que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno. A primeira seção deste capítulo trata de algumas propriedades básicas de problemas de valores de contorno para equações diferenciais ordinárias. A solução desejada da equação diferencial parcial é expressa, então, como uma soma, uma série infinita, em geral, formada por soluções das equações diferenciais ordinárias. Em muitos casos acabaremos tendo que lidar com uma série em senos e/ou cossenos, de modo que parte deste capítulo é dedicada a uma discussão de tais séries, conhecidas como séries de Fourier. Após o estudo da base matemática necessária ilustramos, então, o uso do método de separação de variáveis em diversos problemas ligados à condução de calor, à propagação de ondas e à teoria do potencial.

10.1 Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos

Até agora, neste livro, tratamos de problemas de valores iniciais, que consistem em uma equação diferencial junto com condições iniciais apropriadas em um ponto dado. Um exemplo típico, bastante discutido no Capítulo 3, é a equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

com as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'. \tag{2}$$

Aplicações físicas levam, muitas vezes, a outro tipo de problema, no qual o valor da variável dependente y ou de sua derivada é especificado em dois pontos *diferentes*. Tais condições são chamadas de **condições de contorno**, para distingui-las das condições iniciais que especificam os valores de y e de y' no *mesmo* ponto. Uma equação diferencial junto com uma condição de contorno apropriada forma um **problema de valores de contorno com dois pontos**. Um exemplo típico é a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3}$$

com as condições de contorno

$$y(\alpha) = y_0, \qquad y(\beta) = y_1. \tag{4}$$

A ocorrência natural de problemas de valores de contorno envolve, em geral, uma coordenada espacial como variável independente, de modo que usamos x, em vez de t, nas Eqs. (3) e (4). Para resolver o problema de valores de contorno (3), (4), precisamos encontrar uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial (3) no intervalo $\alpha < x < \beta$ e assume os valores especificados, y_0 e y_1, nos extremos do intervalo.

Em geral, procuramos primeiro a solução geral da equação diferencial e depois usamos as condições de contorno para determinar os valores das constantes arbitrárias.

Problemas de valores de contorno também podem ser postos para equações diferenciais não lineares, mas vamos nos restringir a considerar apenas equações lineares. Uma classificação importante de problemas de valores de contorno lineares é se são homogêneos ou não. Se a função g tem valor nulo para todo x e se os valores y_0 e y_1 também são nulos, então o problema (3), (4) é dito **homogêneo**. Caso contrário, o problema é **não homogêneo**.

Embora os problemas de valor inicial (1), (2) e de contorno (3), (4) possam parecer, superficialmente, bem semelhantes, suas soluções diferem sob aspectos muito importantes. Os problemas de valor inicial, sob condições relativamente fracas, têm, certamente, uma única solução. Por outro lado, problemas de valores de contorno sob condições semelhantes podem ter uma única solução, mas podem, também, não ter solução ou, em alguns casos, ter uma infinidade de soluções. Sob esse aspecto, problemas de valores de contorno lineares se assemelham a equações algébricas lineares.

Vamos lembrar alguns fatos (veja a Seção 7.3) sobre o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$ dada, $\mathbf{b}$ é um vetor $n \times 1$ dado e $\mathbf{x}$ é um vetor $n \times 1$ a ser determinado. Se $\mathbf{A}$ for invertível, então o sistema (5) terá uma única solução para qualquer $\mathbf{b}$. Se $\mathbf{A}$ for singular, então o sistema (5) não terá solução, a menos que $\mathbf{b}$ satisfaça uma determinada condição adicional, caso em que o sistema tem uma infinidade de soluções. Vamos considerar agora o sistema homogêneo associado

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

obtido do sistema (5) quando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. O sistema homogêneo (6) sempre tem a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, chamada de solução trivial. Se $\mathbf{A}$ for invertível, então esta será a única solução, mas se $\mathbf{A}$ for singular então existirá uma infinidade de soluções não nulas, ou não triviais. Note que é impossível para o sistema homogêneo não ter solução. Esses resultados podem, também, ser enunciados do seguinte modo: o sistema não homogêneo (5) tem uma única solução se, e somente se, o sistema homogêneo (6) só tem a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e o sistema não homogêneo (5) não tem solução ou tem uma infinidade de soluções se, e somente se, o sistema homogêneo (6) tem soluções não nulas.

Vamos ver alguns exemplos de problemas de valores de contorno lineares que têm comportamento semelhante. Uma discussão mais geral sobre problemas de valores de contorno lineares aparece no Capítulo 11.

EXEMPLO 1

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \tag{7}$$

A solução geral da equação diferencial (7) é

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{8}$$

Para que a primeira condição de contorno seja satisfeita, é preciso que $c_1 = 1$. A segunda condição de contorno implica que $c_1 \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\pi = 0$, de modo que $c_2 = -\cot\sqrt{2}\pi \cong -0{,}2762$. Logo, a solução do problema de valores de contorno (7) é

$$y = \cos\sqrt{2}x - \cot\sqrt{2}\pi \operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{9}$$

Este exemplo ilustra o caso de um problema de valores de contorno não homogêneo com uma única solução.

EXEMPLO 2

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = a, \tag{10}$$

onde a é um número dado.

A solução geral desta equação diferencial é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \tag{11}$$

e, da primeira condição de contorno, vemos que $c_1 = 1$. A segunda condição de contorno requer, agora, que $-c_1 = a$. Essas duas condições sobre c_1 são incompatíveis se $a \neq -1$, de modo que o problema não tem solução nesse caso. No entanto, se $a = -1$, então ambas as condições de contorno são satisfeitas desde que $c_1 = 1$, independentemente do valor de c_2. Nesse caso, existe uma infinidade de soluções, todas elas da forma

$$y = \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \tag{12}$$

onde c_2 permanece arbitrário. Este exemplo ilustra o fato de que um problema de valores de contorno não homogêneo pode não ter solução, assim como sob condições especiais pode ter uma infinidade de soluções.

Correspondendo ao problema de valores de contorno não homogêneo (3), (4), existe um problema homogêneo, que consiste na equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{13}$$

e nas condições de contorno

$$y(\alpha) = 0, \qquad y(\beta) = 0. \tag{14}$$

Observe que este problema tem solução $y = 0$ para todo x, independentemente dos coeficientes $p(x)$ e $q(x)$. Esta solução (trivial) raramente é de interesse. O que queremos saber, em geral, é se o problema tem outras soluções não nulas. Considere os dois exemplos a seguir.

EXEMPLO 3

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{15}$$

A solução geral da equação diferencial é novamente dada pela Eq. (8),

$$y = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}x.$$

A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$ e a segunda nos leva a $c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}\pi = 0$. Como $\operatorname{sen} \sqrt{2}\pi \neq 0$, segue que $c_2 = 0$. Em consequência, $y = 0$ para todo x é a única solução do problema (15). Este exemplo ilustra o fato de que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter somente a solução trivial $y = 0$.

EXEMPLO 4

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{16}$$

A solução geral é dada pela Eq. (11),

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

e a primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$. Como $\operatorname{sen} \pi = 0$, a segunda condição de contorno é satisfeita independentemente do valor de c_2. Logo, a solução do problema (16) é $y = c_2 \operatorname{sen} x$, onde c_2 permanece arbitrário. Este exemplo ilustra que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter uma infinidade de soluções.

Os Exemplos de 1 a 4 ilustram (mas não provam, é claro) que a relação entre problemas de valores de contorno homogêneos e não homogêneos é a mesma que existe entre sistemas algébricos lineares homogêneos e não homogêneos. Um problema de valores de contorno não homogêneo (Exemplo 1) tem uma única solução e o problema homogêneo correspondente (Exemplo 3) só tem a solução trivial. Além disso, um problema não homogêneo (Exemplo 2) não tem solução ou tem uma infinidade de soluções, e o problema homogêneo correspondente (Exemplo 4) tem soluções não triviais.

Problemas de Autovalores. Lembre-se da equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \tag{17}$$

que discutimos na Seção 7.3. A Eq. (17) tem solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo valor de λ, mas para determinados valores de λ, chamados de autovalores, existem também soluções não nulas, chamadas de autovetores. A situação é semelhante para problemas de valores de contorno.

Considere o problema que consiste na equação diferencial

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{18}$$

junto com as condições de contorno

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0. \tag{19}$$

Observe que o problema (18), (19) é igual aos problemas nos Exemplos 3 e 4 se $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, respectivamente. Lembrando dos resultados desses exemplos, notamos que, para $\lambda = 2$, as Eqs. (18), (19) têm apenas a solução trivial $y = 0$, enquanto para $\lambda = 1$ o problema (18), (19) tem outras soluções não nulas. Estendendo a terminologia associada à Eq. (17), os valores de λ para os quais existem soluções não triviais do problema (18), (19) são chamados de **autovalores**, e as soluções não triviais são chamadas de **autofunções**. Enunciando os resultados dos Exemplos 3 e 4 de outro modo, vimos que $\lambda = 1$ é um autovalor do problema (18), (19) e que $\lambda = 2$ não é. Além disso, qualquer múltiplo não nulo de sen x é uma autofunção correspondente ao autovalor $\lambda = 1$.

Vamos considerar agora o problema de encontrar outros autovalores e autofunções do problema (18), (19). Vamos precisar considerar, separadamente, os casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, já que a forma da solução da Eq. (18) é diferente em cada um desses casos. Suponha primeiro que $\lambda > 0$. Para evitar o aparecimento frequente de raízes quadradas, é conveniente fazer $\lambda = \mu^2$ e escrever a Eq. (18) como

$$y'' + \mu^2 y = 0. \tag{20}$$

A equação característica da Eq. (20) é $r^2 + \mu^2 = 0$, com raízes $r = \pm i\mu$, de modo que a solução geral é

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x \tag{21}$$

Note que μ é diferente de zero (já que $\lambda > 0$) e não há perda de generalidade em supor que μ é positivo. A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$ e, então, a segunda se reduz a

$$c_2 \operatorname{sen} \mu\pi = 0 \tag{22}$$

Estamos procurando soluções não triviais, de modo que precisamos que $c_2 \neq 0$. Em consequência, $\operatorname{sen}\mu\pi$ tem que ser zero e nossa tarefa é escolher μ de modo que isso ocorra. Sabemos que a função seno tem valor zero em todos os múltiplos inteiros de π, de modo que podemos escolher μ como sendo qualquer inteiro (positivo). Os valores correspondentes de λ são os quadrados dos inteiros positivos, de modo que encontramos que

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9, \quad \ldots, \quad \lambda_n = n^2, \quad \ldots \tag{23}$$

são autovalores do problema (18), (19). As autofunções são dadas pela Eq. (21) com $c_1 = 0$, de modo que são, simplesmente, os múltiplos da função sen nx para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Observe que a constante c_2 na Eq. (21) nunca está determinada, de modo que as autofunções estão determinadas a menos de uma constante multiplicativa arbitrária [tal como os autovetores do problema matricial (17)]. Vamos escolher, em geral, essa constante multiplicativa como sendo 1 e escrever as autofunções como

$$y_1(x) = \operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad \ldots, \quad y_n(x) = \operatorname{sen} nx, \quad \ldots \tag{24}$$

lembrando que múltiplos dessas funções também são autofunções.

Vamos supor agora que $\lambda < 0$. Fazendo $\lambda = -\mu^2$, a Eq. (18) fica

$$y'' - \mu^2 y = 0. \tag{25}$$

A equação característica para a Eq. (25) é $r^2 - \mu^2 = 0$, com raízes $r = \pm\mu$, de modo que a solução geral pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh \mu x + c_2 \operatorname{senh} \mu x. \tag{26}$$

Escolhemos as funções hiperbólicas cosh μx e senh μx como um conjunto fundamental de soluções, em vez de $\exp(\mu x)$ e $\exp(-\mu x)$, por conveniência no cálculo das condições de contorno. A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$ e, então, a segunda nos dá c_2 senh $\mu\pi = 0$. Como $\mu \neq 0$, segue que senh $\mu\pi \neq 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Logo, $y = 0$ e não existem soluções não triviais quando $\lambda < 0$. Em outras palavras, o problema (18), (19) não tem autovalores negativos.

Finalmente, vamos considerar o caso $\lambda = 0$. Então, a Eq. (18) fica

$$y'' = 0, \tag{27}$$

e sua solução geral é

$$y = c_1 x + c_2. \tag{28}$$

As condições de contorno (19) só podem ser satisfeitas se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, logo só existe a solução trivial $y = 0$ também nesse caso. Ou seja, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Resumindo nossos resultados: mostramos que o problema (18), (19) tem uma sequência infinita de autovalores positivos $\lambda_n = n^2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e que as autofunções correspondentes são proporcionais a sen nx.

Além disso, não existem outros autovalores reais. Resta a possibilidade de autovalores complexos; lembre que uma matriz com coeficientes reais pode muito bem ter autovalores complexos. No Problema 23, esboçamos um argumento que mostra que o problema particular (18), (19) não pode ter autovalores complexos. Mais tarde, na Seção 11.2, discutiremos uma classe importante de problemas de valores de contorno que inclui (18), (19). Uma das propriedades úteis desta classe é que todos os autovalores são reais.

Em seções mais à frente, neste capítulo, vamos encontrar muitas vezes o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \tag{29}$$

cuja única diferença do problema (18), (19) é que a segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $x = L$, em vez de $x = \pi$. O processo de solução para $\lambda > 0$ é exatamente igual ao de antes, até o passo onde se aplica a segunda condição de contorno. Para o problema (29), essa condição requer que

$$c_2 \operatorname{sen} \mu L = 0 \tag{30}$$

em vez da Eq. (22), como no caso anterior. Em consequência, μL tem que ser um múltiplo inteiro de π, de modo que $\mu = n\pi/L$, onde n é um inteiro positivo. Portanto, os autovalores e autovetores do problema (29) são dados por

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \qquad y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{31}$$

Como de hábito, as autofunções $y_n(x)$ estão determinadas a menos de uma constante multiplicativa. Do mesmo modo que para o problema (18), (19), você pode mostrar que o problema (29) não tem autovalores ou autofunções diferentes daquelas dadas na Eq. (31).

Os problemas desta seção exploram, até certo ponto, o efeito de condições de contorno diferentes sobre autovalores e autofunções. Uma discussão mais sistemática de problema de valores de contorno com fronteira de dois pontos aparece no Capítulo 11.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 13, resolva o problema de valores de contorno dado ou mostre que não tem solução.

1. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$
2. $y'' + 2y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$
3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$
4. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(L) = 0$
5. $y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
6. $y'' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
7. $y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
8. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
9. $y'' + 4y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
10. $y'' + 3y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
11. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = 1$
12. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$
13. $x^2y'' + 5xy' + (4 + \pi^2)y = \ln x, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$

Em cada um dos Problemas de 14 a 20, encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno dado. Suponha que todos os autovalores são reais.

14. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
15. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
16. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
17. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
19. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
20. $x^2y'' - xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(L) = 0, \quad L > 1$
21. O fluxo laminar de um fluido incompressível viscoso em um tubo longo com seção reta circular, simétrico em relação ao eixo e com gradiente de pressão axial constante, é conhecido como fluxo de Poiseuille.[1] A velocidade axial w é uma função só da variável radial r e satisfaz o problema de valores de contorno

$$w'' + \frac{1}{r}w' = -\frac{G}{\mu}, \qquad w(R) = 0, \quad w(r) \text{ limitada para } 0 < r < R,$$

onde R é o raio do tubo, G o gradiente de pressão e μ o coeficiente de viscosidade do fluido.

(a) Encontre o perfil de velocidade $w(r)$.

(b) Integrando $w(r)$ em uma seção circular, mostre que a taxa total de fluxo Q é dada por

[1] Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) era um médico francês que tinha também conhecimentos de matemática e física. Ele estava particularmente interessado no fluxo de sangue, e publicou seu primeiro artigo sobre o assunto em 1840.

$$Q = \pi R^4 G/8\mu.$$

Como Q, R e G podem ser medidos, este resultado fornece um modo prático de se determinar a viscosidade μ.

(c) Suponha que R está reduzido a ¾ de seu valor original. Qual a redução correspondente em Q? Este resultado tem implicações para o fluxo de sangue pelas artérias afetadas por uma placa.

22. Considere uma barra metálica de comprimento L sujeita a uma carga vertical de $f(x)$ por unidade de comprimento. O deslocamento vertical resultante $y(x)$ na barra satisfaz a equação diferencial

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f(x),$$

onde E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção reta em torno do eixo perpendicular ao plano xy passando pelo centroide. Suponha que $f(x)/EI$ é uma constante k. Para cada uma das condições de contorno dadas a seguir resolva para o deslocamento $y(x)$ e faça o gráfico de y em função de x no caso em que $L = 1$ e $k = -1$.

(a) Simplesmente apoiado nas duas extremidades: $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$.

(b) Preso nas duas extremidades: $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$.

(c) Preso em $x = 0$, livre em $x = L$: $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.

23. Neste problema vamos esboçar uma demonstração de que os autovalores do problema de valores de contorno (18), (19) são reais.

(a) Escreva a solução da Eq. (18) como $y = k_1\exp(i\mu x) + k_2\exp(-i\mu x)$, onde $\lambda = \mu^2$, e imponha as condições de contorno (19). Mostre que existem soluções não triviais se, e somente se,

$$\exp(i\mu\pi) - \exp(-i\mu\pi) = 0. \tag{i}$$

(b) Seja $\mu = \nu + i\sigma$ e use a relação de Euler $\exp(i\nu\pi) = \cos(\nu\pi) + i\,\mathrm{sen}(\nu\pi)$ para determinar as partes real e imaginária da Eq. (i).

(c) Considerando as equações encontradas no item (b), mostre que ν é um inteiro e $\sigma = 0$. Em consequência, μ é real e λ também.

10.2 Séries de Fourier

Mais tarde, neste capítulo, você vai descobrir como resolver muitos problemas importantes envolvendo equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função dada como uma série infinita de senos e/ou cossenos. Nesta e nas duas próximas seções vamos explicar em detalhe como isso pode ser feito. Essas séries trigonométricas são chamadas de **séries de Fourier**;[2] elas são análogas às séries de Taylor, no sentido de que ambos os tipos de séries fornecem um modo de se expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares familiares.

Vamos começar com uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L} + b_m\,\mathrm{sen}\,\frac{m\pi x}{L}\right). \tag{1}$$

No conjunto de pontos onde a série (1) converge, ela define uma função f cujos valores em cada ponto é a soma da série para aquele valor de x. Nesse caso, dizemos que a série (1) é a série de Fourier de f. Nossos objetivos imediatos são determinar quais as funções que podem ser representadas como uma soma de uma série de Fourier e encontrar maneiras de calcular os coeficientes na série correspondente a uma função dada. O primeiro termo na série (1) é escrito como $a_0/2$, em vez de simplesmente a_0, para simplificar uma fórmula para os coeficientes que deduziremos mais adiante. Além de sua associação ao método de separação de variáveis e às equações diferenciais parciais, as séries de Fourier são também úteis de muitas outras maneiras, como na análise de sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças externas periódicas.

[2] O nome séries de Fourier é em homenagem a Joseph Fourier, o primeiro a fazer uso sistemático dessas séries, embora em uma investigação não completamente rigorosa, em seus artigos de 1807 e 1811 sobre a condução de calor. De acordo com Riemann, quando Fourier apresentou seu primeiro artigo na Academia de Paris em 1807, dizendo que uma função arbitrária podia ser expressa como uma série da forma (1), o matemático Lagrange ficou tão surpreso que negou, categoricamente, que isso fosse possível. Embora a afirmação de Fourier seja forte demais, seus resultados inspiraram um fluxo de pesquisa importante que continua até hoje. Veja os livros de Grattan-Guinness ou de Carslaw (Introdução Histórica) para uma história detalhada das séries de Fourier.

Periodicidade das Funções Seno e Cosseno. Para discutir as séries de Fourier é necessário desenvolver certas propriedades das funções trigonométricas $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, onde m é um inteiro positivo. A primeira é seu caráter periódico. Uma função f é dita **periódica** com período $T > 0$ se o domínio de f contém $x + T$ sempre que contiver x e se

$$f(x + T) = f(x) \tag{2}$$

para todo valor de x. A Figura 10.2.1 mostra um exemplo de uma função periódica. Segue imediatamente da definição que se T é um período de f, então $2T$ também o é, como, de fato, qualquer múltiplo inteiro de T. O menor valor de T para o qual a Eq. (2) é válida é chamado de **período fundamental** de f. Uma função constante pode ser considerada periódica com qualquer período, mas não tem período fundamental.

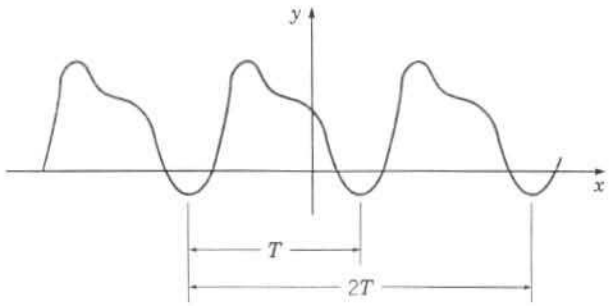


FIGURA 10.2.1 Uma função periódica.

Se f e g são duas funções periódicas com período comum T, então seu produto fg e qualquer combinação linear $c_1f + c_2g$ também são periódicos com período T. Para provar esta última afirmação, seja $F(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$; então, para qualquer x,

$$F(x + T) = c_1f(x + T) + c_2g(x + T) = c_1f(x) + c_2g(x) = F(x). \tag{3}$$

Além disso, pode-se mostrar que a soma de qualquer número finito, ou até a soma de uma série infinita convergente, de funções de período T também é periódica com período T.

Em particular, as funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, são periódicas com período fundamental $T = 2L/m$. Para ver isso, lembre-se de que $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ têm período fundamental 2π e que $\operatorname{sen}\alpha x$ e $\cos\alpha x$ têm período fundamental $2\pi/\alpha$. Escolhendo $\alpha = m\pi/L$, vemos que o período T de $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e de $\cos(m\pi x/L)$ é dado por $T = 2\pi L/m\pi = 2L/m$.

Note também que, como todo múltiplo inteiro de um período também é um período, cada uma das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$ tem o período comum $2L$.

Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno. Para descrever uma segunda propriedade essencial das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, vamos generalizar o conceito de ortogonalidade de vetores (veja a Seção 7.2). O **produto interno** padrão (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \le x \le \beta$ é definido por

$$(u, v) = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)\,dx. \tag{4}$$

As funções u e v são ditas **ortogonais** em $\alpha \le x \le \beta$ se seu produto interno for nulo, ou seja, se

$$\int_\alpha^\beta u(x)v(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Um conjunto de funções é dito um **conjunto ortogonal** se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.

As funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, \ldots$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \le x \le L$. De fato, elas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ L, & m = n; \end{cases} \tag{6}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad \text{todos } m, n. \tag{7}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases} \tag{8}$$

Esses resultados podem ser obtidos por integração direta. Por exemplo, para deduzir a Eq. (8), note que

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(m-n)\pi x/L]}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}[(m+n)\pi x/L]}{m+n}\right\}\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= 0$$

desde que $m+n$ e $m-n$ sejam diferentes de zero. Como m e n são positivos, $m+n \neq 0$. Por outro lado, se $m-n=0$, então $m=n$ e a integral tem que ser calculada de outra maneira. Nesse caso,

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L}\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 - \cos\frac{2m\pi x}{L}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\operatorname{sen}(2m\pi x/L)}{2m\pi/L}\right\}\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$= L.$$

Isso prova a Eq. (8); as Eqs. (6) e (7) podem ser verificadas por cálculos análogos.

As Fórmulas de Euler-Fourier. Vamos supor, agora, que uma série da forma (1) converge e vamos chamar essa soma de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{9}$$

Como consequência das condições de ortogonalidade (6), (7) e (8), podemos encontrar a relação entre os coeficientes a_m, b_m e $f(x)$. Primeiro, multiplique a Eq. (9) por $\cos(n\pi x/L)$, onde n é um inteiro positivo ($n > 0$) *fixo*, e integre em relação a x de $-L$ a L. Supondo que a série pode ser integrada termo a termo[3], obtemos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{10}$$

Tendo em mente que n está fixo enquanto m varia sobre todos os inteiros positivos, segue das relações de ortogonalidade (6) e (7) que o único termo não nulo à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é o termo onde $m = n$ no primeiro somatório. Logo,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = La_n, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Para determinar a_0, podemos integrar a Eq. (9) de $-L$ a L, obtendo

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = La_0, \tag{12}$$

[3]Essa é uma hipótese não trivial, já que nem todas as séries convergentes com termos variáveis podem ser integradas desse modo. Para o caso especial de séries de Fourier, no entanto, a integração termo a termo sempre pode ser justificada.

já que cada integral envolvendo uma função trigonométrica é zero. Assim,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{13}$$

Escrevendo o termo constante na Eq. (9) como $a_0/2$, é possível calcular todos os a_n da Eq. (13). Caso contrário, teríamos que usar uma fórmula separada para a_0.

Uma expressão semelhante para b_n pode ser obtida multiplicando-se a Eq. (9) por $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, integrando termo a termo de $-L$ a L e usando as relações de ortogonalidade (7) e (8); assim,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{14}$$

As Eqs. (13) e (14) são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier. Portanto, se a série (9) converge para $f(x)$ e se a série puder ser integrada termo a termo, então os coeficientes *têm que ser dados* pelas Eqs. (13) e (14).

Note que as Eqs. (13) e (14) são fórmulas explícitas para a_n e b_n em função de f e que a determinação de qualquer coeficiente particular é independente de qualquer outro coeficiente. É claro que a dificuldade em calcular as integrais nas Eqs. (13) e (14) depende muito da função particular f.

Observe, também, que as fórmulas (13) e (14) dependem apenas dos valores de $f(x)$ no intervalo $-L \le x \le L$. Como cada um dos termos na série de Fourier (9) é periódico com período $2L$, a série converge para todo x sempre que convergir em $-L \le x \le L$ e sua soma também é uma função periódica de período $2L$. Logo, $f(x)$ fica determinada para todo x por seus valores no intervalo $-L \le x \le L$.

É possível mostrar (veja o Problema 27) que se g é periódica com período T, então todas as integrais de g em um intervalo de comprimento T têm o mesmo valor. Aplicando esse resultado às fórmulas de Euler-Fourier (13) e (14), segue que o intervalo de integração, $-L \le x \le L$, pode ser substituído, caso seja mais conveniente, por qualquer intervalo de comprimento $2L$.

EXEMPLO 1

Suponha que existe uma série de Fourier convergindo para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x). \tag{15}$$

Determine os coeficientes desta série de Fourier.

Esta função representa uma onda triangular (veja a Figura 10.2.2) e é periódica com período 4. Então, nesse caso, $L = 2$ e a série de Fourier tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{2} + b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{2}\right), \tag{16}$$

onde os coeficientes são calculados pelas Eq. (13) e (14) com $L = 2$. Substituindo $f(x)$ na Eq. (13) com $m = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx = 1 + 1 = 2. \tag{17}$$

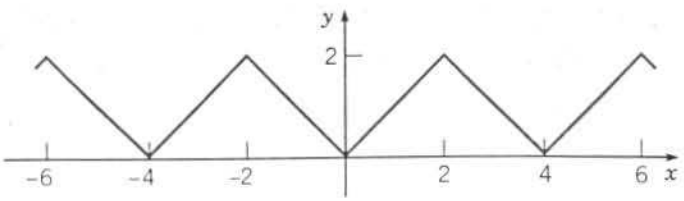


FIGURA 10.2.2 Onda triangular.

Para $m > 0$, a Eq. (13) nos dá

$$a_m = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-x)\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\frac{m\pi x}{2}\,dx.$$

Essas integrais podem ser calculadas integrando-se por partes, com o resultado que

$$a_m = \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{m\pi}x\,\text{sen}\frac{m\pi x}{2} - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \cos\frac{m\pi x}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{m\pi}x\,\text{sen}\frac{m\pi x}{2} + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \cos\frac{m\pi x}{2}\right]\Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{2}{m\pi}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4}{(m\pi)^2}(\cos m\pi - 1), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$= \begin{cases} -8/(m\pi)^2, & m \text{ ímpar}, \\ 0, & m \text{ par}. \end{cases} \tag{18}$$

Finalmente, segue da Eq. (14), de maneira análoga, que

$$b_m = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Substituindo os coeficientes encontrados nas Eqs. (17), (18) e (19) na série (16), obtemos a série de Fourier de f:

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}. \tag{20}$$

EXEMPLO 2

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases} \tag{21}$$

e suponha que $f(x + 6) = f(x)$; veja a Figura 10.2.3. Encontre os coeficientes da série de Fourier de f.

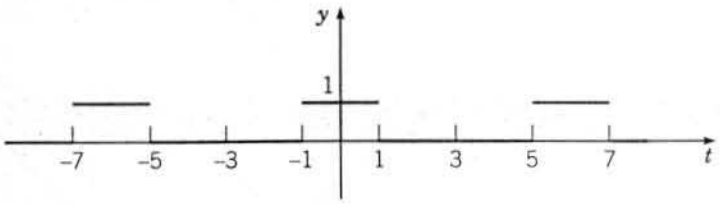


FIGURA 10.2.3 Gráfico de $f(x)$ no Exemplo 2.

Note que nos pontos de descontinuidade não foi atribuído valor para $f(x)$, como em $x = -1$ e em $x = 1$. Isso não afeta os valores dos coeficientes de Fourier, já que eles são calculados por uma integral e o valor da integral não é afetado pelo valor do integrando em um único ponto ou em um número finito de pontos. Portanto, os coeficientes são os mesmos, independentemente dos valores que porventura forem atribuídos a $f(x)$ nos pontos de descontinuidade.

Como f tem período 6, segue que $L = 3$ neste problema. Em consequência, a série de Fourier de f tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{3} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi x}{3}\right), \tag{22}$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados pelas Eqs. (13) e (14) com $L = 3$. Temos

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3}. \tag{23}$$

Analogamente,

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

e

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_{-1}^{1} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Assim, a série de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \cdots\right]. \tag{26}$$

EXEMPLO 3

Considere novamente a função no Exemplo 1 e sua série de Fourier (20). Investigue a velocidade de convergência da série. Em particular, determine quantos termos são necessários para que o erro não seja maior do que 0,01 para todo x.

A m-ésima soma parcial dessa série,

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2} \tag{27}$$

pode ser usada para aproximar a função f. Os coeficientes diminuem como $(2n-1)^{-2}$, de modo que a série converge razoavelmente rápido. Isso é confirmado pela Figura 10.2.4, onde aparece o gráfico para as somas parciais com $m = 1$ e $m = 2$. Para investigar a convergência em maiores detalhes, vamos considerar o erro $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. A Figura 10.2.5 mostra o gráfico de $|e_6(x)|$ em função de x para $0 \le x \le 2$. Observe que $|e_6(x)|$ é maior nos pontos $x = 0$ e $x = 2$, onde o gráfico de $f(x)$ tem bicos. É mais difícil para a série aproximar a função perto desses pontos, resultando em um erro maior aí para um dado m. Gráficos semelhantes podem ser obtidos para outros valores de m.

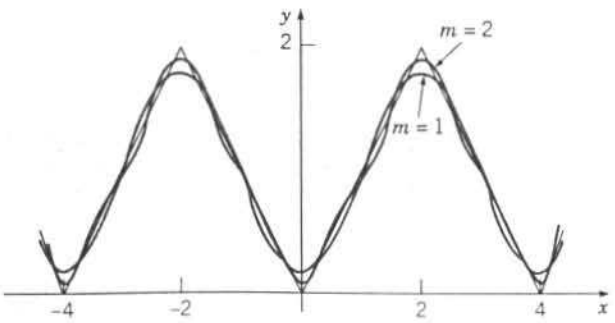


FIGURA 10.2.4 Somas parciais da série de Fourier, Eq. (20), para a onda triangular.

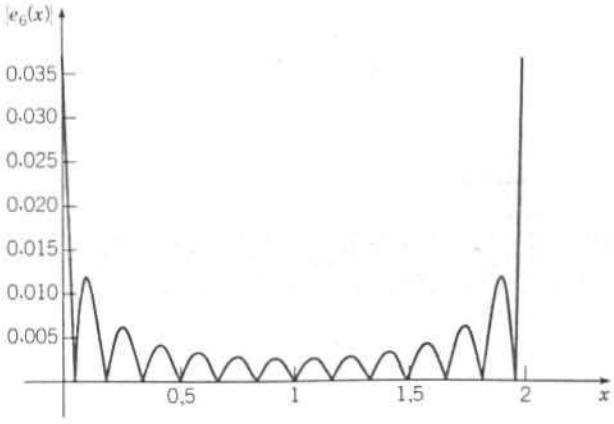


FIGURA 10.2.5 Gráfico de $|e_6(x)|$ em função de x para a onda triangular.

Uma vez compreendendo que o erro máximo sempre ocorre em $x = 0$ ou $x = 2$, você pode obter uma cota *uniforme* para o erro para cada m calculando simplesmente $|e_m(x)|$ em um desses pontos. Por exemplo, para $m = 6$, temos $e_6(2) = 0{,}03370$, de modo que $|e_6(x)| < 0{,}034$ para $0 \le x \le 2$ e, em consequência, para todo x. A Tabela 10.2.1 mostra dados correspondentes a outros valores de m; esses dados estão colocados em um gráfico na Figura 10.2.6. A partir dessa informação você pode começar a estimar o número de termos da série que são

necessários para se obter um nível de precisão dado na aproximação. Por exemplo, para garantir que $|e_m(x)| \leq 0{,}01$, precisamos escolher $m = 21$.

TABELA 10.2.1 Valores do erro $e_m(2)$ para a onda triangular

m	$e_m(2)$
2	0,09937
4	0,05040
6	0,03370
10	0,02025
15	0,01350
20	0,01013
25	0,00810

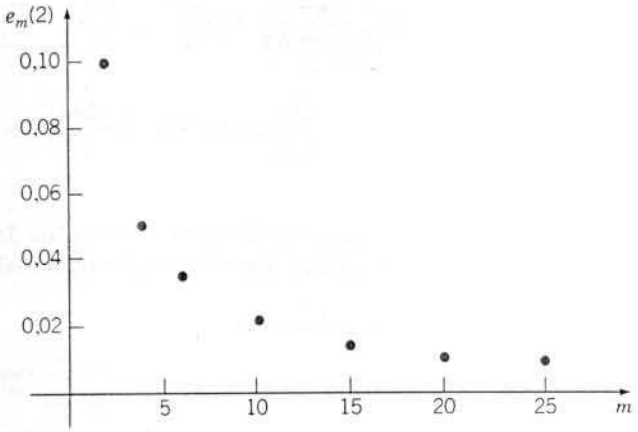


FIGURA 10.2.6 Gráfico de $e_m(2)$ em função de m para a onda triangular.

Neste livro as séries de Fourier aparecem principalmente como um meio de resolver determinados problemas em equações diferenciais parciais. No entanto, tais séries têm uma aplicação muito mais ampla em ciência e engenharia, e, em geral, são ferramentas valiosas na investigação de fenômenos periódicos. Um problema básico é decompor um sinal de entrada em seus componentes harmônicos, o que corresponde a construir sua representação em série de Fourier. Em algumas bandas de frequência os termos separados correspondem a cores diferentes ou a tons audíveis diferentes. O módulo do coeficiente determina a amplitude de cada componente. Esse processo é conhecido como análise espectral.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, determine se a função dada é periódica. Se for, encontre seu período fundamental.

1. $\operatorname{sen} 5x$ 2. $\cos 2\pi x$ 3. $\operatorname{senh} 2x$ 4. $\operatorname{sen} \pi x/L$ 5. $\tan \pi x$ 6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

9. Se $f(x) = -x$ para $-L < x < L$ e se $f(x+2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.

10. Se $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ e se $f(x+2) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $1 < x < 2$ e no intervalo $8 < x < 9$.

11. Se $f(x) = L - x$ para $0 < x < 2L$ e se $f(x+2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $-L < x < 0$.

12. Verifique as Eqs. (6) e (7) nesta seção integrando diretamente.

Em cada um dos Problemas de 13 a 18:

(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.

(b) Encontre a série de Fourier da função dada.

13. $f(x) = -x, \quad -L \le x < L; \qquad f(x+2L) = f(x)$

14. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < L; \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \qquad f(x+2) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \le x \le 0, \\ L, & 0 < x < L; \end{cases} \qquad f(x+2L) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

Em cada um dos Problemas de 19 a 24:

(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.

(b) Encontre a série de Fourier da função dada.

(c) Faça o gráfico de $s_m(x)$ em função de x para $m = 5$, 10 e 20.

(d) Descreva como a série de Fourier parece estar convergindo.

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

20. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1; \qquad f(x+2) = f(x)$

21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \le x \le 2; \qquad f(x+4) = f(x)$

22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0, \\ 2-2x, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \le x < 0, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \le x < 2; \end{cases} \qquad f(x+4) = f(x)$

24. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0, \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3; \end{cases} \qquad f(x+6) = f(x)$

25. Considere a função f definida no Problema 21 e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$.

(a) Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \le x \le 2$ para diversos valores de m.

(b) Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \le 0{,}1$ para todo x.

26. Considere a função f definida no Problema 24 e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$.

(a) Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \le x \le 3$ para diversos valores de m.

(b) Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \le 0{,}1$ para todo x.

27. Suponha que g é uma função integrável e periódica com período T.

(a) Se $0 \le a \le T$, mostre que

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

Sugestão: mostre primeiro que $\int_0^a g(x)\,dx = \int_T^{a+T} g(x)\,dx$. Considere a mudança de variável $s = x - T$ na segunda integral.

(b) Mostre que, para qualquer valor de a, não necessariamente em $0 \le a \le T$,

$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$

(c) Mostre que, para quaisquer valores de a e b,

$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)\,dx.$$

28. Se f for diferenciável e periódica com período T, mostre que f' também é periódica com período T. Determine se

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

é sempre periódica.

29. Neste problema, indicamos algumas semelhanças entre vetores geométricos tridimensionais e séries de Fourier.

(a) Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ três vetores ortogonais dois a dois em três dimensões, e seja $\mathbf{u}$ qualquer vetor tridimensional. Mostre que

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \tag{i}$$

onde

$$a_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}, \qquad i = 1,2,3. \tag{ii}$$

Mostre que a_i pode ser interpretado como sendo a projeção de $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbf{v}_i$ dividida pelo comprimento de $\mathbf{v}_i$.

(b) Defina o produto interno (u, v) por

$$(u, v) = \int_{-L}^{L} u(x)v(x)\,dx. \tag{iii}$$

Sejam

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \cos(n\pi x/L), \qquad n = 0,1,2,\ldots; \\ \psi_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad n = 1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{iv}$$

Mostre que a Eq. (10) pode ser escrita na forma

$$(f,\phi_n) = \frac{a_0}{2}(\phi_0,\phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\phi_m,\phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\psi_m,\phi_n). \tag{v}$$

(c) Use a Eq. (v) e a equação correspondente para (f, ψ_n) junto com as relações de ortogonalidade para mostrar que

$$a_n = \frac{(f,\phi_n)}{(\phi_n,\phi_n)}, \qquad n = 0,1,2,\ldots; \qquad b_n = \frac{(f,\psi_n)}{(\psi_n,\psi_n)}, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{vi}$$

Note a semelhança entre as Eqs. (vi) e a Eq. (ii). As funções ϕ_n e ψ_n têm um papel semelhante ao dos vetores ortogonais $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ no espaço tridimensional. Os coeficientes a_n e b_n podem ser interpretados como sendo as projeções da função f sobre as funções da base ϕ_n e ψ_n.

Observe também que qualquer vetor tridimensional pode ser expresso como uma combinação linear de três vetores ortogonais dois a dois. De maneira semelhante, qualquer função suficientemente suave definida em $-L \le x \le L$ pode ser expressa como uma combinação linear das funções ortogonais $\cos(m\pi x/L)$ e $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$, ou seja, como uma série de Fourier.

10.3 O Teorema de Convergência de Fourier

Na seção precedente mostramos que se a série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L} + b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right) \tag{1}$$

converge e assim define uma função f, então f é periódica com período $2L$ e os coeficientes a_m e b_m estão relacionados a $f(x)$ pelas fórmulas de Euler-Fourier

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx, \qquad m = 0,1,2,\ldots; \tag{2}$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx, \qquad m = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Nesta seção vamos supor que é dada uma função f. Se essa função for periódica com período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$, então pode-se calcular um conjunto de coeficientes a_m e b_m pelas Eqs. (2) e (3), e pode-se construir, formalmente, uma série da forma (1). O problema é saber se essa série converge para algum valor de x e, nesse caso, se sua soma é $f(x)$. Foram descobertos exemplos que mostram que uma série de Fourier correspondente a uma função f pode não convergir para $f(x)$ ou pode até divergir. Funções cujas séries de Fourier não convergem para o valor da função em pontos isolados são fáceis de construir, e vamos apresentar exemplos mais adiante nesta seção. Funções cujas séries de Fourier divergem em um ou mais pontos são mais patológicas, e não serão consideradas neste livro.

Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes foram calculados é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função. De um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse e, ainda, simples o suficiente para serem facilmente verificadas para funções particulares. Ao longo dos anos, foram desenvolvidos diversos conjuntos de condições com esse propósito.

Antes de enunciar um teorema de convergência para séries de Fourier, vamos definir uma expressão que aparece no teorema. Uma função f é dita **seccionalmente contínua** em um intervalo $a \le x \le b$ se o intervalo pode ser dividido por um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$.
2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do intervalo.

A Figura 10.3.1 mostra o gráfico de uma função seccionalmente contínua.

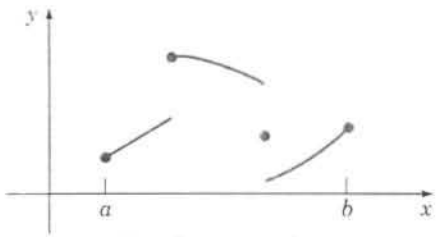


FIGURA 10.3.1 Uma função seccionalmente contínua.

A notação $f(c+)$ é usada para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \to c$ pela direita; analogamente, $f(c-)$ denota o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela esquerda.

Note que não é necessário que a função esteja definida nos pontos da partição x_i. Por exemplo, no teorema a seguir supomos que f' é seccionalmente contínua; mas, certamente, f' não pode existir nos pontos onde a própria f é descontínua. Também não é essencial que o intervalo seja fechado; ele também pode ser aberto, ou aberto em uma das extremidades e fechado na outra.

Teorema 10.3.1 Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \le x < L$. Suponha, além disso, que f está definida fora do intervalo $-L \le x < L$ de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right) \tag{4}$$

cujos coeficientes são dados pelas Eqs. (2) e (3). A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Note que $[f(x+) + f(x-)]/2$ é o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto x. Em qualquer ponto onde f é contínua, $f(x+) = f(x-) = f(x)$, logo é correto dizer que a série de Fourier converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos. Sempre que dissermos que uma série de Fourier converge para uma função f, isso vai significar que ela converge neste sentido.

Deve-se enfatizar que as condições dadas nesse teorema são apenas suficientes para a convergência de uma série de Fourier; elas não são, de modo algum, necessárias. As condições suficientes mais gerais não foram descobertas. Apesar disso, a demonstração do teorema é razoavelmente complicada, e não será dada aqui.[4] Sob condições mais restritivas, é possível uma demonstração muito mais simples; veja o Problema 18.

[4]Demonstrações de convergência de uma série de Fourier podem ser encontradas na maior parte dos livros de cálculo avançado. Veja, por exemplo, Kaplan (Capítulo 7) ou Buck (Capítulo 6).

Para obter uma compreensão melhor do significado do teorema, vamos considerar algumas classes de funções que não satisfazem as condições impostas. Funções não incluídas no teorema são, principalmente, as que têm descontinuidades infinitas no intervalo $[-L, L]$, como $1/x^2$ quando $x \to 0$, ou $\ln|x - L|$ quando $x \to L$. Também estão excluídas funções com um número infinito de saltos nesse intervalo; no entanto, tais funções são encontradas raramente.

Vale a pena observar que uma série de Fourier pode convergir para uma soma que não é diferenciável, nem mesmo contínua, apesar do fato de que cada termo na série (4) é contínuo e até diferenciável um número infinito de vezes. O exemplo a seguir é uma ilustração disso, como é o Exemplo 2 na Seção 10.2.

EXEMPLO 1 Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0, \\ L, & 0 < x < L, \end{cases} \tag{5}$$

e seja f definida fora desse intervalo de modo que $f(x + 2L) = f(x)$ para todo x. Vamos, temporariamente, deixar em aberto a definição de f nos pontos $x = 0, \pm L$. Encontre a série de Fourier desta função e determine onde ela converge.

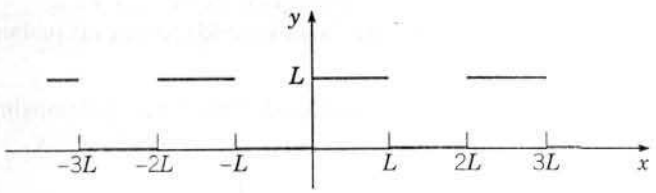


FIGURA 10.3.2 Onda quadrada.

O gráfico da equação $y = f(x)$ está ilustrado na Figura 10.3.2, estendido em ambas as direções. Pode-se pensar nele como representando uma onda quadrada. O intervalo $[-L, L]$ pode ser dividido em dois subintervalos abertos, $(-L, 0)$ e $(0, L)$. Em $(0, L)$, $f(x) = L$ e $f'(x) = 0$. É claro que ambas, f e f', são contínuas e têm limites quando $x \to 0$ pela direita e quando $x \to L$ pela esquerda. A situação em $(-L, 0)$ é semelhante. Em consequência, f e f' são seccionalmente contínuas em $[-L, L]$, de modo que f satisfaz as condições do Teorema 10.3.1. Se os coeficientes a_m e b_m forem calculados pelas Eqs. (2) e (3), a convergência da série de Fourier resultante está garantida em todos os pontos onde f é contínua. Note que os valores de a_m e b_m são os mesmos, independentemente da definição de f nos pontos de descontinuidades. Isso é verdade porque o valor de uma integral não é afetado ao se mudar o integrando em um número finito de pontos. Da Eq. (2),

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_0^L dx = L;$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$= 0, \qquad m \neq 0.$$

Analogamente, da Eq. (3),

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_0^L \mathrm{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{L}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$

$$= \begin{cases} 0, & m \text{ par}; \\ 2L/m\pi, & m \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\mathrm{sen}\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\mathrm{sen}\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(m\pi x/L)}{m}$$

$$= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}(2n-1)\pi x/L}{2n-1}. \tag{6}$$

Nos pontos $x = 0, \pm nL$, onde a função f não é contínua, todos os termos na série após o primeiro desaparecem e a soma é $L/2$. Este é o valor médio dos limites à direita e à esquerda, como deveria ser. Podemos então definir f nesses pontos como tendo o valor $L/2$. Se escolhermos outros valores, a série ainda nos dá o valor $L/2$ nesses pontos, já que todos os cálculos precedentes permanecem válidos. A série simplesmente não converge para a função nesses pontos a menos que f esteja definida como tendo o valor $L/2$. Isso ilustra a possibilidade de a série de Fourier correspondente a uma função não convergir para ela nos pontos de descontinuidade, a menos que a função seja definida apropriadamente em tais pontos.

A maneira na qual as somas parciais

$$s_n(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

da série de Fourier (6) convergem para f está indicada na Figura 10.3.3, onde L foi escolhido como sendo 1 e aparece o gráfico de $s_8(x)$. A figura sugere que nos pontos onde f é contínua as somas parciais tendem a $f(x)$ quando n aumenta. No entanto, em vizinhanças dos pontos de descontinuidade, tais como $x = 0$ e $x = L$, as somas parciais não convergem suavemente ao ponto médio. Em vez disso, elas tendem a passar da marca em cada extremidade do salto, como se tivessem dificuldade de se acomodar à mudança brusca que têm que fazer nesse ponto. Este fenômeno é típico de séries de Fourier em pontos de descontinuidade, e é conhecido como o fenômeno de Gibbs.[5]

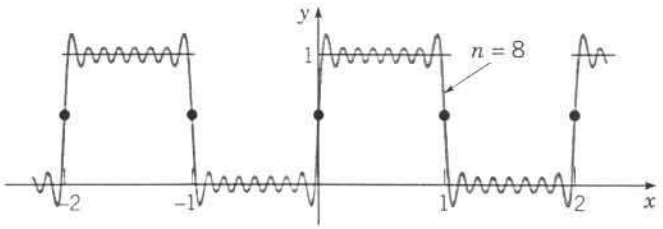


FIGURA 10.3.3 A soma parcial $s_8(x)$ da série de Fourier, Eq. (6), da onda quadrada.

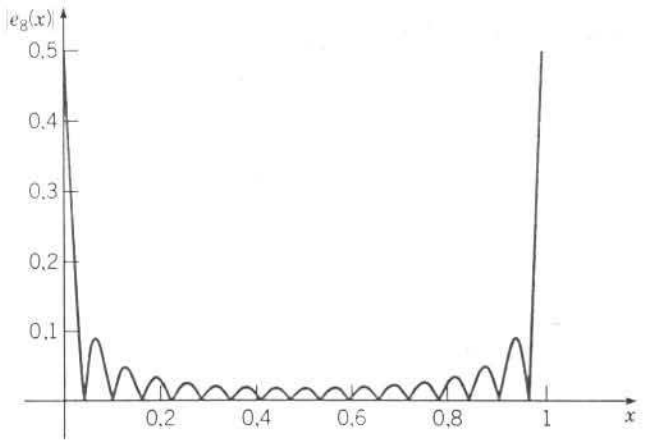


FIGURA 10.3.4 Um gráfico do erro $e_8(x)$| em função de x para a onda quadrada.

Pode-se obter uma melhor compreensão considerando-se o erro $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. A Figura 10.3.4 mostra um gráfico de $|e_n(x)|$ em função de x para $n = 8$ e $L = 1$. A menor cota superior de $|e_8(x)|$ é 0,5 e é aproximada quando $x \to 0$ e $x \to 1$. Quando n aumenta, o erro diminui no interior do intervalo [onde $f(x)$ é contínua], mas a menor cota superior não diminui quando n aumenta. Não podemos, então, reduzir o erro uniformemente no intervalo inteiro aumentando o número de termos.

As Figuras 10.3.3 e 10.3.4 mostram também que a série neste exemplo converge mais devagar do que aquela no Exemplo 1, na Seção 10.2. Isso se deve ao fato de que os coeficientes na série (6) são proporcionais, apenas, a $1/(2n-1)$.

[5]O fenômeno de Gibbs leva esse nome em honra a Josiah Willard Gibbs (1839-1903), mais conhecido por seu trabalho em análise vetorial e mecânica estatística. Gibbs foi professor de física matemática em Yale e um dos primeiros cientistas americanos a obter reputação internacional. O fenômeno de Gibbs é discutido em mais detalhes por Carslaw (Capítulo 9).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função estendida.

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge por três períodos.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \le x < 0, \\ L - x, & 0 \le x < L \end{cases}$

4. $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \le x < 1$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Em cada um dos Problemas de 7 a 12, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função dada.

(b) Seja $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Encontre a menor cota superior ou o valor máximo (se existir) de $|e_n(x)|$ para $n =$ 10, 20 e 40.

(c) Se possível, encontre o menor n para o qual $|e_n(x)| \le 0{,}01$ para todo x.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases}$ $f(x + 2\pi) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 15)

8. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 \le x < 0, \\ 1 - x, & 0 \le x < 1; \end{cases}$ $f(x + 2) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 16)

9. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1;$ $f(x + 2) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 20)

10. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \le x < 0, \\ 2 - 2x, & 0 \le x < 2; \end{cases}$ $f(x + 4) = f(x)$ (veja a Seção 10.2, Problema 22)

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1; \end{cases}$ $f(x + 2) = f(x)$ (veja o Problema 6)

12. $f(x) = x - x^3, \quad -1 \le x < 1;$ $f(x + 2) = f(x)$

Forças Externas Periódicas. Neste capítulo estamos preocupados, basicamente, com a utilização de séries de Fourier para resolver problemas de valores de contorno para determinadas equações diferenciais parciais. No entanto, as séries de Fourier são também úteis em muitas outras situações onde ocorrem fenômenos periódicos. Os Problemas de 13 a 16 indicam como elas podem ser usadas para se resolver problemas de valor inicial com forças externas periódicas no caso de problemas físicos.

13. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$. O que acontece se $\omega^2 = n^2$?

14. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $\omega > 0$ é diferente de todos os inteiros positivos. Como esta solução é modificada se $\omega = m$, onde m é um inteiro positivo?

15. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica de período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Veja o Problema 1.

16. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica de período 2 e

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t < 1; \\ -1 + t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Veja o Problema 8.

17. Supondo que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \tag{i}$$

mostre, formalmente, que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Esta relação entre uma função f e seus coeficientes de Fourier é conhecida como a identidade de Parseval.[6] Esta identidade é muito importante na teoria de séries de Fourier; veja o Problema 9 na Seção 11.6.

Sugestão: multiplique a Eq. (i) por $f(x)$, integre de $-L$ a L e use as fórmulas de Euler-Fourier.

18. Esse problema indica uma demonstração de convergência de séries de Fourier sob condições mais restritivas do que as do Teorema 10.3.1.

(a) Se f e f' forem seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$ e se f for periódica com período $2L$, mostre que na_n e nb_n permanecerão limitadas quando $n \to \infty$.

Sugestão: use integração por partes.

(b) Se f for contínua em $-L \le x \le L$ e periódica com período $2L$, e se f' e f'' forem seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$, mostre que $n^2 a_n$ e $n^2 b_n$ permanecerão limitadas quando $n \to \infty$. Se f for contínua no intervalo *fechado*, então será contínua para todo x. Por que isso é importante?

Sugestão: novamente, integre por partes.

(c) Usando o resultado do item (b), mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergem.

(d) Do resultado no item (c), mostre que a série de Fourier (4) converge absolutamente[7] para todo x.

Aceleração da Convergência. No próximo problema mostramos como é possível, algumas vezes, aumentar a velocidade de convergência de uma série de Fourier.

19. Suponha que queremos calcular valores da função g, onde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{1 + (2n-1)^2} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x. \tag{i}$$

É possível mostrar que esta série converge, embora bem devagar. No entanto, observe que para n grande os termos na série (i) são aproximadamente iguais a $[\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1)$ e que estes últimos são semelhantes aos do exemplo no texto, Eq. (6).

(a) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1) = (\pi/2)\left[f(x) - \tfrac{1}{2}\right], \tag{ii}$$

onde f é a onda quadrada no exemplo com $L = 1$.

(b) Subtraia a Eq. (ii) da Eq. (i) e mostre que

$$g(x) = \frac{\pi}{2}\left[f(x) - \tfrac{1}{2}\right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)[1 + (2n-1)^2]}. \tag{iii}$$

A série (iii) converge muito mais rápido do que a série (i) e, assim, fornece um modo melhor de se calcular valores de $g(x)$.

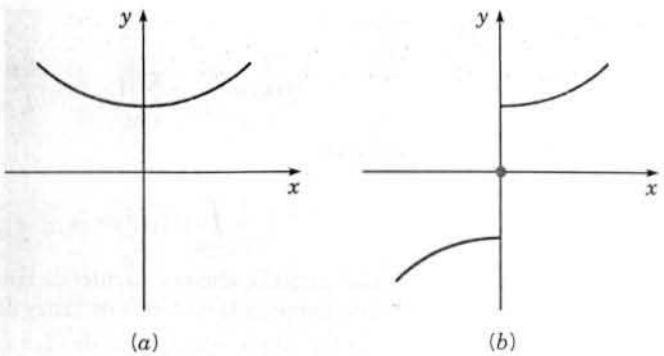
---

[6] Marc-Antoine Parseval (1755-1836) foi um matemático francês relativamente obscuro que teve um resultado importante batizado com seu nome. Ele apresentou um precursor deste resultado em 1799, embora não no contexto de séries de Fourier.

[7] Ela também converge uniformemente; para uma explicação do que isso significa, consulte um livro de cálculo avançado ou de análise.

10.4 Funções Pares e Ímpares

Antes de olhar outros exemplos de séries de Fourier, vamos distinguir duas classes de funções para as quais a fórmula de Euler-Fourier pode ser simplificada. Essas classes são formadas pelas funções pares e ímpares, que são caracterizadas, geometricamente, pela propriedade de simetria em relação ao eixo dos y e à origem, respectivamente (veja a Figura 10.4.1).



(a) (b)

FIGURA 10.4.1 (a) Uma função par. (b) Uma função ímpar.

Analiticamente, f é uma **função par** se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

para cada x no domínio de f. Analogamente, f é uma **função ímpar** se seu domínio contém $-x$ sempre que contiver x e se

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

para cada x no domínio de f. Exemplos de funções pares são $1, x^2, \cos nx, |x|$ e x^{2n}. As funções x, x^3, sen nx e x^{2n+1} são exemplos de funções ímpares. Note que, de acordo com a Eq. (2), $f(0)$ tem que ser zero se f for uma função ímpar cujo domínio contém a origem. A maioria das funções não é par nem ímpar, como, por exemplo, e^x. Apenas uma função, f identicamente nula, é ao mesmo tempo par e ímpar.

As propriedades elementares de funções pares e ímpares incluem as seguintes:

1. A soma (diferença) e o produto (quociente) de duas funções pares são pares.
2. A soma (diferença) de duas funções ímpares é ímpar; o produto (quociente) de duas funções ímpares é par.
3. A soma (diferença) de uma função par e uma função ímpar não é par nem ímpar; o produto (quociente) de tais funções é ímpar.[5]

As demonstrações de todas essas afirmações são simples e seguem diretamente das definições. Por exemplo, se f_1 e f_2 são ímpares e se $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, então

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) \\ &= -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x), \end{aligned} \tag{3}$$

de modo que $f_1 + f_2$ também é ímpar. Analogamente, se $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, então

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x) = h(x), \tag{4}$$

de modo que f_1f_2 é par.

Também são importantes as duas propriedades integrais de funções pares e ímpares que enunciamos a seguir:

4. Se f for uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx. \tag{5}$$

[5]Essas afirmações precisam ser modificadas se uma das funções é identicamente nula.

5. Se f for uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Essas propriedades ficam claras, intuitivamente, a partir da interpretação de integral como área sob uma curva, mas também seguem imediatamente das definições. Por exemplo, se f for par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{L} f(x)\,dx.$$

Fazendo $x = -s$ na primeira integral à direita do sinal de igualdade e usando a Eq. (1), obtemos

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = -\int_{L}^{0} f(s)\,ds + \int_{0}^{L} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx.$$

A demonstração da propriedade correspondente para funções ímpares é semelhante.

Funções pares e ímpares são particularmente importantes em aplicações de séries de Fourier, já que suas séries de Fourier têm formas especiais que ocorrem frequentemente em problemas físicos.

Séries em Cossenos. Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$ e que f é um função periódica par com período $2L$. Segue das propriedades 1 e 3 que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par e que $f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ é ímpar. Como consequência das Eqs. (5) e (6), os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Logo, f tem série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Em outras palavras, a série de Fourier de qualquer função par é formada apenas pelas funções trigonométricas pares $\cos(n\pi x/L)$ e pelo termo constante; é natural chamar tal série de **série de Fourier em cossenos**. De um ponto de vista computacional, observe que basta calcular os coeficientes a_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$, da fórmula integral (7). Cada um dos b_n, $n = 1, 2, \ldots$, é automaticamente nulo para qualquer função par e, portanto, não precisa ser calculado por integração.

Série em Senos. Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas e que f é uma função periódica ímpar de período $2L$. Segue das propriedades 2 e 3 que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ é par. Nesse caso, os coeficientes de Fourier de f são

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

e a série de Fourier de f é da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

Assim, a série de Fourier de qualquer função ímpar é formada apenas pelas funções trigonométricas $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$; tal série é chamada de **série de Fourier em senos**. Mais uma vez, note que basta calcular, por integração, metade dos coeficientes, já que todos os a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são nulos para qualquer função ímpar.

EXEMPLO 1

Seja $f(x) = x$, $-L < x < L$, e seja $f(-L) = f(L) = 0$. Seja f definida no restante da reta de modo a ser periódica de período $2L$ (veja a Figura 10.4.2). A função definida desse modo é conhecida como função dente de serra. Encontre a série de Fourier desta função.

Como f é uma função ímpar, seus coeficientes de Fourier, de acordo com a Eq. (8), são dados por

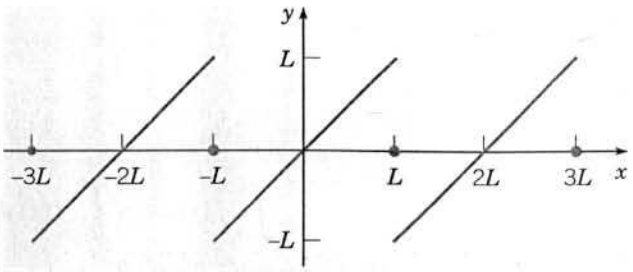


FIGURA 10.4.2 Função dente de serra.

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\left\{\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\right\}\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto, a série de Fourier de f, a função dente de serra, é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{9}$$

Observe que a função periódica f é descontínua nos pontos $\pm L, \pm 3L, \ldots$, como mostra a Figura 10.4.2. Nesses pontos a série em (9) converge ao valor médio dos limites à esquerda e à direita, a saber, zero. A soma parcial da série (9) para $n = 9$ está ilustrada na Figura 10.4.3. O fenômeno de Gibbs (mencionado na Seção 10.3) ocorre novamente próximo aos pontos de descontinuidade.

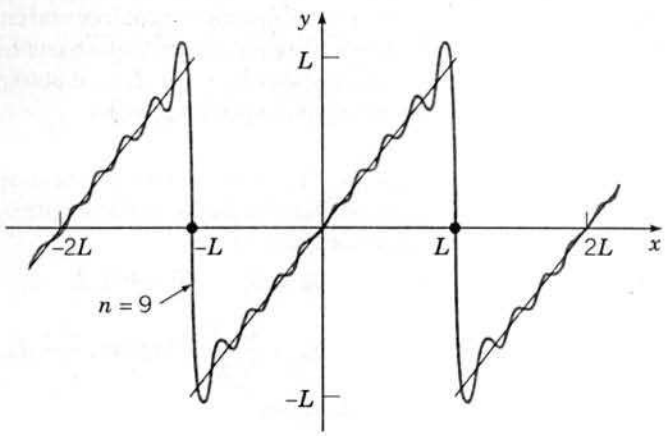


FIGURA 10.4.3 Uma soma parcial da série de Fourier da função dente de serra, Eq. (9).

Note que, nesse exemplo, $f(-L) = f(L) = 0$, assim como $f(0) = 0$. Isso é necessário para que a função f seja tanto ímpar quanto periódica com período $2L$. Quando falarmos sobre a construção de uma série em senos para uma função definida em $0 \le x \le L$, fica subentendido que, se necessário, redefinimos, primeiro, a função de modo a se anular em $x = 0$ e $x = L$.

Vale a pena observar que a onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2) e a função dente de serra, que acabamos de considerar, são idênticas no intervalo $0 \le x < L$. Portanto, suas séries de Fourier convergem à mesma função, $f(x) = x$, nesse intervalo. Assim, se for necessário representar a função $f(x) = x$ em $0 \le x < L$ por uma série de Fourier é possível fazer isso com *uma série em cossenos ou uma série em senos*. No primeiro caso, f tem que ser estendida como uma função *par* para o intervalo $-L < x < 0$ e periodicamente para o resto da reta (a onda triangular). No segundo caso, f tem que ser estendida para o intervalo $-L < x < 0$ como uma função *ímpar* e periodicamente para o resto da reta (a função dente de serra). Se f for estendida de outra maneira qualquer, a série de Fourier resultante vai convergir para x em $0 \le x < L$, mas vai envolver termos em seno e em cosseno.

Ao se resolver problemas em equações diferenciais é útil, muitas vezes, expandir uma função f, dada originalmente no intervalo $[0, L]$, em uma série de Fourier de período $2L$. Como indicado anteriormente para a função $f(x) = x$, existem diversas alternativas possíveis. Explicitamente, podemos:

1. Definir uma função g de período $2L$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

A função g é, então, a extensão periódica par de f. Sua série de Fourier, que é uma série em cossenos, representa f em $[0, L]$.

2. Definir uma função h de período $2L$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, L, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \tag{11}$$

A função h é, então, a extensão periódica ímpar de f. Sua série de Fourier, que é uma série em senos, representa f em $(0, L)$.

3. Definir uma função k de período $2L$ tal que

$$k(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{12}$$

e definir $k(x)$ em $(-L, 0)$ de qualquer maneira consistente com as condições do Teorema 10.3.1. Algumas vezes é conveniente definir $k(x)$ como sendo zero para $-L < x < 0$. A série de Fourier de k, que envolve termos tanto em senos como em cossenos, também representa f em $[0, L]$, independentemente do modo que é definida $k(x)$ em $(-L, 0)$. Portanto, existe uma infinidade de tais séries, todas elas convergindo para $f(x)$ no intervalo original.

Em geral, a forma da expansão usada será determinada (ou pelo menos sugerida) pelo propósito para o qual é necessária. No entanto, se existir uma escolha sobre o tipo de série de Fourier a ser usada a seleção poderá se basear, em alguns casos, na velocidade de convergência. Por exemplo, a série em cossenos para a onda triangular [Eq. (20) da Seção 10.2] converge mais rapidamente do que a série em senos para a função dente de serra [Eq. (9) nesta seção], embora ambas convirjam para a mesma função em $0 \le x \le L$. Isso é devido ao fato de que a onda triangular é uma função mais suave do que a função dente de serra, sendo, portanto, mais fácil de ser aproximada. Em geral, quanto mais derivadas contínuas tem a função no intervalo inteiro $-\infty < x < \infty$, mais depressa vai convergir sua série de Fourier. Veja o Problema 18 da Seção 10.3.

EXEMPLO 2

Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases} \tag{13}$$

Como indicado anteriormente, podemos representar f por uma série em cossenos ou por uma em senos. Esboce o gráfico da soma de cada uma dessas séries para $-6 \le x \le 6$.

Neste exemplo $L = 2$, de modo que a série em cossenos para f converge para a extensão periódica par de f de período 4, cujo gráfico está esboçado na Figura 10.4.4.

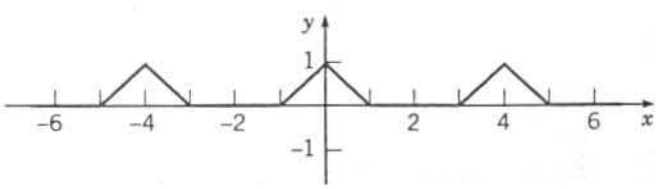


FIGURA 10.4.4 Extensão periódica par de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

Analogamente, a série em senos para f converge para a extensão periódica ímpar de f de período 4. O gráfico desta função está esboçado na Figura 10.4.5.

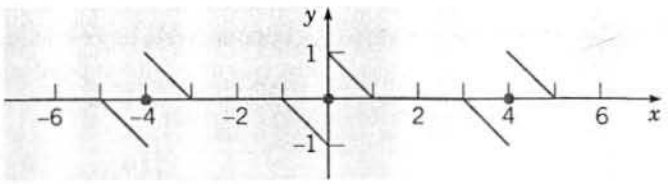


FIGURA 10.4.5 Extensão periódica ímpar de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

1. $x^3 - 2x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\tan 2x$
4. $\sec x$
5. $|x|^3$
6. e^{-x}

Em cada um dos Problemas de 7 a 12 é dada uma função f em um intervalo de comprimento L. Em cada caso, esboce os gráficos das extensões par e ímpar de f de período $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$
10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$
11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$
13. Prove que qualquer função pode ser expressa como a soma de uma função par com uma função ímpar. Ou seja, para qualquer função f cujo domínio contém $-x$ sempre que contiver x, mostre que existe uma função par g e uma função ímpar h tal que $f(x) = g(x) + h(x)$.
    Sugestão: o que você pode dizer sobre $f(x) + f(-x)$?
14. Encontre os coeficientes para as séries em cossenos e em senos descritas no Exemplo 2.

Em cada um dos Problemas de 15 a 22:

(a) Encontre a série de Fourier indicada para a função dada.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2; \end{cases}$ série em cossenos, período 4

    Compare com o Exemplo 1 e o Problema 5 da Seção 10.3.

16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2; \end{cases}$ série em senos, período 4
17. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi;$ série em cossenos, período 2π
18. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi;$ série em senos, período 2π
19. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi; \end{cases}$ série em senos, período 6π
20. $f(x) = x, \quad 0 \le x < 1;$ série de período 1
21. $f(x) = L - x, \quad 0 \le x \le L;$ série em cossenos, período $2L$

    Compare com o Exemplo 1 da Seção 10.2.

22. $f(x) = L - x, \quad 0 < x < L;$ série em senos, período $2L$

Em cada um dos Problemas de 23 a 26:

(a) Encontre a série de Fourier indicada da função dada.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.
(c) Faça o gráfico de uma ou mais somas parciais da série.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ série em cossenos, período 4π
24. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0;$ série em senos, período 2π

25. $f(x) = 2 - x^2, \quad 0 < x < 2$; série em senos, período 4

26. $f(x) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 4$; série em cossenos, período 8

Em cada um dos Problemas de 27 a 30 é dada uma função em um intervalo $0 < x < L$.

(a) Esboce os gráficos das extensões periódicas par $g(x)$ e ímpar $h(x)$ de períodos $2L$ da função dada em um intervalo de três períodos.

(b) Encontre as séries de Fourier em cossenos e em senos da função dada.

(c) Faça os gráficos de algumas das somas parciais de cada série.

(d) Para cada série, investigue a dependência em n do erro máximo em $[0, L]$.

27. $f(x) = 3 - x, \quad 0 < x < 3$

28. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$

29. $f(x) = (4x^2 - 4x - 3)/4, \quad 0 < x < 2$

30. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < 3$

31. Prove que, se f for uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$

32. Prove as propriedades 2 e 3 de funções pares e ímpares, como enunciadas no texto.

33. Prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.

34. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que, se f for par, então F será ímpar e que, se f for ímpar, F será par.

35. A partir da série de Fourier da onda quadrada no Exemplo 1 da Seção 10.3, mostre que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Esta relação entre π e os inteiros positivos ímpares foi descoberta por Leibniz em 1674.

36. A partir da série de Fourier da onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2), mostre que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

37. Suponha que f tem uma série de Fourier em senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad 0 \le x \le L.$$

(a) Mostre, formalmente, que

$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Compare este resultado (equação de Parseval) com o do Problema 17 na Seção 10.3. Qual o resultado correspondente se f tiver uma série em cossenos?

(b) Aplique o resultado do item (a) à série da função dente de serra dada pela Eq. (9), mostrando, assim, que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Esta relação foi descoberta por Euler em torno de 1735.

Séries de Fourier Mais Especializadas. Seja f uma função definida originalmente em $0 \le x \le L$ e satisfazendo aí as condições de continuidade do Teorema 10.3.1. Mostramos, nesta seção, que é possível representar f por uma série em senos ou por uma série em cossenos através da construção da extensão periódica ímpar ou par de f, respectivamente. Os Problemas de 38 a 40 tratam de outras séries de Fourier mais especializadas que convergem à função f dada no intervalo $(0, L)$.

38. Estenda f ao intervalo $(L, 2L]$ arbitrariamente. Depois, estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como uma função ímpar e ao resto da reta como periódica de período $4L$ (veja a Figura 10.4.6). Mostre que esta função tem uma série de Fourier em senos formada pelas funções $\operatorname{sen}(n\pi x/2L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/2L),$$

onde

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\,\text{sen}\,(n\pi x/2L)\,dx.$$

Esta série converge para a função original em $(0, L)$.

39. Estenda primeiro f a $(L, 2L)$ de modo que seja simétrica em relação à reta $x = L$, ou seja, de modo que $f(2L - x) = f(x)$ para $0 \le x < L$. Estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como ímpar e ao resto da reta real como periódica de período $4L$ (veja a Figura 10.4.7). Mostre que esta função tem série de Fourier formada pelas funções $\text{sen}(\pi x/2L)$, $\text{sen}(3\pi x/2L)$, $\text{sen}(5\pi x/2L)$, ...; ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^{L} f(x)\,\text{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx.$$

Esta série converge para a função original em $(0, L]$.

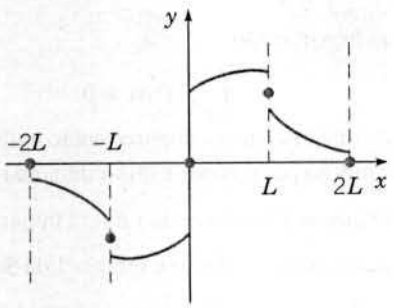


FIGURA 10.4.6 Gráfico da função no Problema 38.

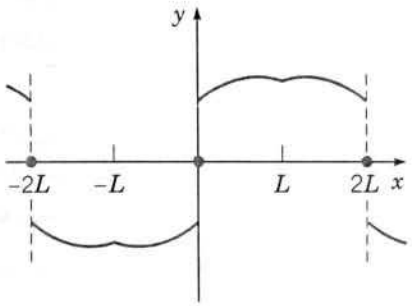


FIGURA 10.4.7 Gráfico da função no Problema 39.

40. (a) Como se deve estender f, definida originalmente em $[0, L]$, de modo a se obter uma série de Fourier envolvendo, apenas, as funções $\cos(\pi x/2L)$, $\cos(3\pi x/2L)$, $\cos(5\pi x/2L)$, ...? Veja os Problemas 38 e 39.

(b) Se $f(x) = x$ para $0 \le x \le L$, esboce a função para a qual essa série de Fourier converge para $-4L \le x \le 4L$.

10.5 Separação de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra

As equações diferenciais parciais básicas de condução de calor, propagação de ondas e teoria do potencial, que vamos discutir neste capítulo, estão associadas a três tipos distintos de fenômenos: processos de difusão, processos oscilatórios e processos independentes do tempo ou estacionários. Essas equações são, portanto, de importância fundamental em muitos ramos da física. Elas também são muito importantes do ponto de vista matemático. As equações diferenciais parciais cuja teoria está mais bem desenvolvida e cujas aplicações são mais significativas e variadas são as equações lineares de segunda ordem. Todas essas equações podem ser classificadas em três tipos: a equação de calor, a equação de onda e a equação do potencial, respectivamente, são protótipos de cada um desses tipos. Assim, um estudo destas três equações fornece muita informação sobre as equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem mais gerais.

Durante os dois últimos séculos foram desenvolvidos diversos métodos para se resolver equações diferenciais parciais. O método de separação de variáveis é o método sistemático mais antigo, tendo sido usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, em torno de 1750, em suas investigações sobre ondas e vibrações. Nesse meio tempo o método foi consideravelmente refinado e generalizado, permanecendo, ainda hoje, como um método muito importante e de uso frequente. Para mostrar como o método de separação de variáveis funciona, vamos considerar primeiro um problema básico de condução de calor em um corpo sólido. O estudo matemático de condução de calor começou[9] em torno de 1800 e continua a atrair

[9]A primeira investigação importante sobre condução de calor foi feita por Joseph Fourier (1768-1830), enquanto governador da província de Isère (Grenoble) de 1801 a 1815. Ele apresentou artigos básicos sobre o assunto na Academia de Ciências de Paris em 1807 e 1811. No entanto, esses artigos foram criticados pelos consultores (principalmente Lagrange) por falta de rigor e, portanto, não foram publicados. Fourier continuou a desenvolver suas ideias e acabou escrevendo um dos clássicos da matemática aplicada, *Théorie analytique de la chaleur* (Teoria analítica do calor), publicado em 1822.

a atenção de cientistas modernos. Por exemplo, a análise da dissipação e transferência do calor produzido por máquinas de alta velocidade é, com frequência, um problema tecnológico importante.

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolha o eixo dos x de modo a formar o eixo da barra e suponha que $x = 0$ e $x = L$ correspondem às extremidades da barra (veja a Figura 10.5.1). Suponha, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há transmissão de calor aí. Podemos supor, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura u pode ser considerada constante em qualquer seção reta. Então, u só depende da coordenada axial x e do instante t.

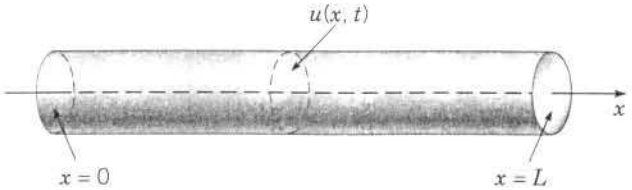


FIGURA 10.5.1 Uma barra sólida condutora de calor.

A variação da temperatura na barra é governada por uma equação diferencial parcial cuja dedução aparece no Apêndice A, no final deste capítulo. A equação é a **equação do calor** e tem a forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \tag{1}$$

onde α^2 é uma constante conhecida como **difusividade térmica**. O parâmetro α^2 depende, apenas, do material do qual é feita a barra, e é definido por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s, \tag{2}$$

onde κ é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra. As unidades de α^2 são (comprimento)^2/tempo. Valores típicos de α^2 são dados na Tabela 10.5.1.

TABELA 10.5.1 Valores de Difusividade Térmica para Alguns Materiais Comuns

Material	α^2 (cm^2/s)
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro fundido	0,12
Granito	0,011
Tijolo	0,0038
Água	0,00144

Além disso, vamos supor que a distribuição inicial de temperatura na barra é dada; então

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{3}$$

onde f é uma função dada. Finalmente, supomos que as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas: a temperatura T_1 em $x = 0$ e a temperatura T_2 em $x = L$. No entanto, acontece que basta considerar o caso em que $T_1 = T_2 = 0$. Vamos mostrar na Seção 10.6 como reduzir o problema mais geral a este caso especial. Logo, nesta seção, vamos supor que u é sempre zero quando $x = 0$ ou $x = L$:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{4}$$

O problema fundamental de condução de calor é encontrar $u(x, t)$ que satisfaz a equação diferencial (1) para $0 < x < L$ e para $t > 0$, a condição inicial (3) quando $t = 0$ e as condições de contorno (4) em $x = 0$ e $x = L$.

O problema descrito pelas Eqs. (1), (3) e (4) é um problema de valor inicial na variável t; é dada uma condição inicial e a equação diferencial determina o que acontece depois. No entanto, em relação à variável espacial x o problema é de valores de contorno; são impostas condições de contorno em cada extremidade da barra, e a equação diferencial descreve a evolução da temperatura no intervalo entre elas. De outro ponto de vista, podemos considerar o problema como sendo um problema de valores de contorno

no plano xt (veja a Figura 10.5.2). Neste caso, procura-se a solução $u(x,t)$ da Eq. (1) na faixa semi-infinita $0 < x < L, t > 0$ sujeita à condição de que $u(x,t)$ tem que assumir um valor dado em cada ponto da fronteira dessa faixa.

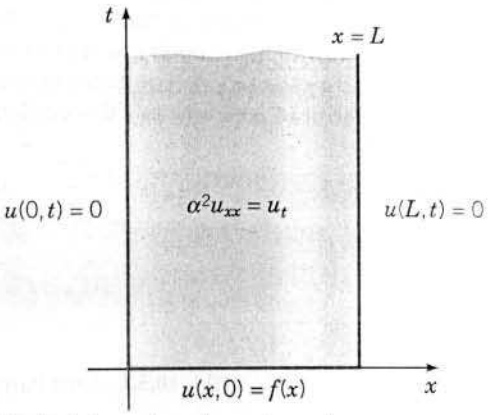


FIGURA 10.5.2 Problema de valores de contorno para a equação do calor.

O problema de condução de calor (1), (3), (4) é *linear*, já que u só aparece na primeira potência em toda a equação. A equação diferencial e as condições de contorno são, também, *homogêneas*. Isso sugere que podemos abordar o problema procurando soluções da equação diferencial e das condições de contorno, fazendo, depois, uma superposição para satisfazer a condição inicial. O restante desta seção descreve como implementar este plano.

Uma solução da equação diferencial (1) que satisfaz as condições de contorno (4) é a função $u(x,t) = 0$, mas esta solução não satisfaz a condição inicial (3), exceto no caso trivial em que $f(x)$ também é nula. Nosso objetivo, então, é procurar outras soluções, não nulas, da equação diferencial e das condições de contorno. Para encontrar as soluções necessárias, vamos começar fazendo uma hipótese básica sobre a forma das soluções que terá muitas consequências, talvez até inesperadas. A hipótese é que $u(x,t)$ é um produto de duas outras funções, uma dependendo só de x e a outra dependendo só de t. Assim,

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

Substituindo u dado pela Eq. (5) na equação diferencial (1), obtemos

$$\alpha^2 X''T = XT', \tag{6}$$

onde a linha se refere à diferenciação usual em relação à variável independente, seja ela x ou t. A Eq. (6) é equivalente a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}, \tag{7}$$

na qual as variáveis estão separadas, ou seja, a expressão à esquerda do sinal de igualdade depende só de x e a expressão à direita depende só de t.

Agora é crucial compreender que para que a Eq. (7) seja válida para $0 < x < L, t > 0$ é preciso que ambos os lados da Eq. (7) sejam iguais à mesma constante. Caso contrário, mantendo uma variável independente (por exemplo, x) fixa e variando a outra, um lado da Eq. (7) (o esquerdo, nesse caso) permaneceria constante enquanto o outro estaria variando, o que viola a igualdade. Se denotarmos essa constante de separação por $-\lambda$, então a Eq. (7) fica

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda. \tag{8}$$

Obtemos, então, as duas equações diferenciais ordinárias a seguir para $X(x)$ e $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{9}$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0. \tag{10}$$

Denotamos a constante de separação por $-\lambda$ (em vez de λ) porque esta constante vai ser negativa e é conveniente exibir o sinal de menos explicitamente.

A hipótese (5) levou à substituição da equação diferencial parcial (1) pelas duas equações diferenciais ordinárias (9) e (10). Cada uma dessas equações pode ser resolvida imediatamente para *qualquer* valor de

λ. O produto de duas soluções das Eqs. (9) e (10), respectivamente, fornece uma solução da equação diferencial parcial (1). No entanto, só estamos interessados em soluções da Eq. (1) que satisfaçam, também, as condições de contorno (4). Como vamos mostrar agora, isso restringe bastante os valores possíveis para λ.

Substituindo $u(x, t)$ dada pela Eq. (5) na condição de contorno em $x = 0$, obtemos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \tag{11}$$

Se a Eq. (11) fosse satisfeita escolhendo-se $T(t)$ como sendo zero para todo t, então $u(x, t)$ seria zero para todo x e t, e já rejeitamos esta possibilidade. Portanto, a Eq. (11) tem que ser satisfeita impondo-se a condição

$$X(0) = 0. \tag{12}$$

Analogamente, a condição de contorno em $x = L$ implica

$$X(L) = 0. \tag{13}$$

Queremos, agora, considerar a Eq. (9) sujeita às condições de contorno (12) e (13). Este é um problema de autovalores e, de fato, é o mesmo problema que discutimos em detalhe no final da Seção 10.1; veja especialmente o parágrafo que segue a Eq. (29) naquela seção. A única diferença é que chamamos a variável dependente de y, em vez de X. Pelos resultados obtidos anteriormente [Eq. (31) da Seção 10.1], as únicas soluções não triviais das Eqs. (9), (12) e (13) são as autofunções

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

associadas aos autovalores

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Voltando para a Eq. (10) para $T(t)$ e substituindo λ por $n^2\pi^2/L^2$, temos

$$T' + (n^2\pi^2\alpha^2/L^2)T = 0. \tag{16}$$

Logo, $T(t)$ é proporcional a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$. Portanto, multiplicando as soluções das Eqs. (9) e (10), e desprezando as constantes arbitrárias de proporcionalidade, concluímos que as funções

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

satisfazem a equação diferencial parcial (1) e as condições de contorno (4) para cada valor inteiro positivo de n. As funções u_n são chamadas, às vezes, de soluções fundamentais do problema de condução do calor (1), (3), (4).

Resta, apenas, satisfazer a condição inicial (3),

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{18}$$

Lembre-se de que resolvemos, muitas vezes, problemas de valor inicial formando combinações lineares de um conjunto fundamental de soluções e escolhendo, depois, os coeficientes que satisfazem as condições iniciais. A etapa análoga no problema atual é formar uma combinação linear das funções (17) e depois escolher os coeficientes que satisfaçam a Eq. (18). A diferença principal dos problemas anteriores é que existe uma infinidade de funções (17), de modo que uma combinação linear geral delas é uma série infinita. Vamos supor, então, que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \tag{19}$$

onde os coeficientes c_n ainda estão indeterminados. Os termos individuais na série (19) satisfazem a equação diferencial (1) e as condições de contorno (4). Vamos supor que a série infinita da Eq. (19) converge e satisfaz, também, as Eqs. (1) e (4). Para satisfazer a condição inicial (3) temos que ter

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{20}$$

Em outras palavras, precisamos escolher os coeficientes c_n tais que a série em senos na Eq. (20) convirja para a distribuição inicial de temperatura $f(x)$ para $0 \le x \le L$. A série na Eq. (20) é, simplesmente, a série de Fourier em senos de f; de acordo com a Eq. (8) da Seção 10.4, seus coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{21}$$

Portanto, a solução do problema de condução de calor (1), (3), (4) é dado pela série na Eq. (19) com os coeficientes calculados pela Eq. (21).

EXEMPLO 1

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, inicialmente a uma temperatura uniforme de 20°C em toda a barra e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t > 0$.

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução de calor (1), (3), (4) com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$. Logo, da Eq. (19), a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}, \tag{22}$$

onde, da Eq. (21),

$$c_n = \frac{4}{5}\int_0^{50} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{50}\,dx$$

$$= \frac{40}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 80/n\pi, & n \text{ ímpar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \tag{23}$$

Finalmente, substituindo os c_n na Eq. (22), obtemos

$$u(x,t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{50} \tag{24}$$

A expressão (24) para a temperatura é razoavelmente complicada, mas o fator exponencial com potência negativa em cada termo da série faz com que ela convirja rapidamente, exceto para valores pequenos de t ou α^2. Portanto, resultados precisos podem ser obtidos, em geral, usando-se apenas alguns poucos termos da série.

Para apresentar resultados quantitativos, vamos medir t em segundos; então α^2 tem unidades de cm²/s. Se escolhermos, por conveniência, $\alpha^2 = 1$, isso corresponde a uma barra feita com um material cujas propriedades térmicas estão entre o cobre e o alumínio. O comportamento da solução pode ser visto dos gráficos nas Figuras 10.5.3 até 10.5.5. Na Figura 10.5.3 mostramos a distribuição de temperatura na barra em diversos instantes diferentes de tempo. Observe que a temperatura vai diminuindo sempre, à medida que a barra perde calor pelas extremidades. O modo no qual a temperatura decai em um determinado ponto na barra está indicado na Figura 10.5.4, onde aparece o gráfico da temperatura em função do tempo para alguns pontos selecionados na barra. Finalmente, a Figura 10.5.5 mostra um gráfico tridimensional de u em função de x e de t. Observe que os gráficos nas Figuras 10.5.3 e 10.5.4 são obtidos intersectando-se a superfície na Figura 10.5.5 por planos onde t ou x são constantes. A pequena ondulação na Figura 10.5.5 em $t = 0$ resulta da utilização de apenas um número finito de termos na série que representa $u(x, t)$ e da convergência lenta da série para $t = 0$.

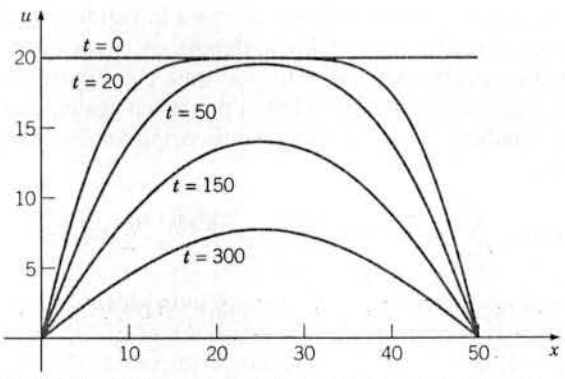


FIGURA 10.5.3 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

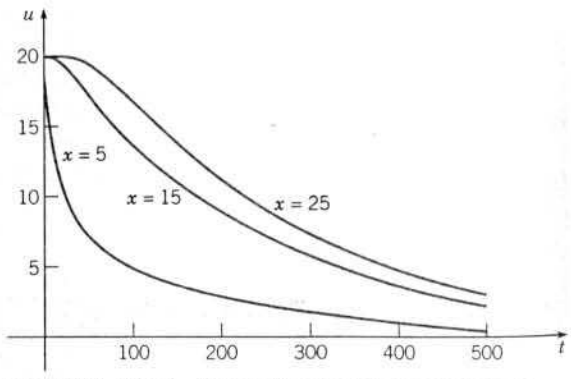


FIGURA 10.5.4 Dependência da temperatura no tempo em diversos pontos para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

Um problema com possível aplicação prática é determinar o instante τ no qual a barra inteira esfriou a uma determinada temperatura. Por exemplo, quando a temperatura na barra inteira não é maior do que 1°C? Devido à simetria da distribuição inicial de temperatura e das condições de contorno, o ponto mais quente na barra é sempre o centro. Assim, τ pode ser encontrado resolvendo-se $u(25, t) = 1$ para t. Usando um termo na expansão em série (24), obtemos

$$\tau = \frac{2500}{\pi^2}\ln(80/\pi) \cong 820 \text{ s}.$$

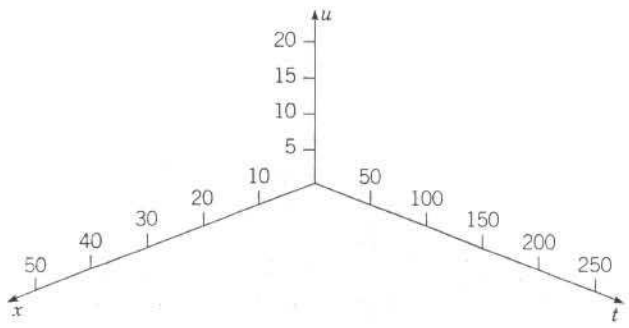


FIGURA 10.5.5 Gráfico da temperatura u em função de x e de t para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Nesse caso, encontre as equações.

1. $xu_{xx} + u_t = 0$
2. $tu_{xx} + xu_t = 0$
3. $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$
4. $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$
5. $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$
6. $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$
7. Encontre a solução do problema de condução de calor

$$100u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \operatorname{sen} 2\pi x - \operatorname{sen} 5\pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

8. Encontre a solução do problema de condução de calor

$$u_{xx} = 4u_t, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 2\operatorname{sen}(\pi x/2) - \operatorname{sen} \pi x + 4\operatorname{sen} 2\pi x, \quad 0 \le x \le 2.$$

Considere a condução de calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura de 0°C para todo $t > 0$. Em cada um dos Problemas de 9 a 12, encontre uma expressão para a temperatura $u(x,t)$ se a distribuição de temperatura inicial na barra é a função dada. Suponha que $\alpha^2 = 1$.

9. $u(x,0) = 50, \quad 0 < x < 40$
10. $u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 20, \\ 40 - x, & 20 \le x \le 40 \end{cases}$
11. $u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 10, \\ 50, & 10 \le x \le 30, \\ 0, & 30 < x \le 40 \end{cases}$
12. $u(x,0) = x, \quad 0 < x < 40$
13. Considere, novamente, a barra do Problema 9. Para $t = 5$ e $x = 20$, determine quantos termos são necessários para encontrar a solução correta até três casas decimais. Um modo razoável de fazer isso é encontrar n tal que a inclusão de mais um termo não muda as três primeiras casas decimais de $u(20, 5)$. Repita para $t = 20$ e $t = 80$. Chegue a alguma conclusão sobre a velocidade de convergência da série que representa $u(x,t)$.
14. Para a barra no Problema 9:
    (a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200. Coloque todos os gráficos no mesmo conjunto de eixos obtendo, assim, uma visão de como a distribuição de temperatura muda com o tempo.
    (b) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 5, 10, 15$ e 20.
    (c) Desenhe um gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
    (d) Quanto tempo leva para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?

15. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 10.
16. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 11.
17. Para a barra no Problema 12:
    (a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200.
    (b) Para cada valor de t usado no item (a), estime o valor de x para o qual a temperatura é a maior de todas. Faça o gráfico desses valores em função de t para ver como a posição do ponto mais quente na barra muda com o tempo.
    (c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 10, 20$ e 30.
    (d) Desenhe o gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
    (e) Quanto tempo leva para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?
18. Considere uma barra metálica com 20 cm de comprimento, aquecida a uma temperatura uniforme de 100°C. Suponha que em $t = 0$ as extremidades da barra estão mergulhadas em um banho gelado a 0°C e depois mantidas a esta temperatura, mas não é permitido escapar calor pela superfície lateral. Encontre uma expressão para a temperatura em qualquer ponto da barra em um instante posterior. Determine a temperatura no centro da barra no instante $t = 30$ s se a barra for feita de (a) prata, (b) alumínio ou (c) ferro fundido.
19. Para a barra do Problema 18, encontre o tempo necessário para o centro da barra esfriar a uma temperatura de 5°C se a barra for feita de (a) prata, (b) alumínio ou (c) ferro fundido.
20. Ao se resolver equações diferenciais, quase sempre os cálculos podem ser simplificados através da utilização de **variáveis adimensionais**.
    (a) Mostre que se introduzirmos a variável adimensional $\xi = x/L$ a equação do calor fica
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$
    (b) Como L^2/α^2 tem unidades de tempo, é conveniente usar esta quantidade para definir uma variável adimensional $\tau = (\alpha^2/L^2)t$. Mostre que, então, a equação do calor se reduz a
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0.$$
21. Considere a equação
    $$av_{xx} - bv_t + cv = 0, \tag{i}$$
    onde a, b e c são constantes.
    (a) Seja $u(x, t) = e^{\delta t}w(x, t)$, onde δ é constante, e encontre a equação diferencial parcial correspondente para w.
    (b) Se $b \neq 0$, mostre que δ pode ser escolhido de modo que a equação diferencial parcial encontrada no item (a) não tem termo em w. Assim, através de uma mudança de variável dependente, é possível reduzir a Eq. (i) à equação do calor.
22. A equação do calor em duas dimensões espaciais é
    $$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$
    Supondo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$.
23. A equação do calor em duas dimensões espaciais pode ser expressa, em coordenadas polares, na forma
    $$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}] = u_t.$$
    Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

10.6 Outros Problemas de Condução de Calor

Na Seção 10.5 consideramos o problema que consiste na equação do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

nas condições de contorno

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

e na condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{3}$$

Vimos que a solução é

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{4}$$

onde os coeficientes c_n são iguais aos da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{5}$$

A série na Eq. (5) é simplesmente a série de Fourier em senos de f; de acordo com a Seção 10.4, seus coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{6}$$

Logo, a solução do problema de condução de calor, Eqs. (1), (2), (3), é dada pela série na Eq. (4) com os coeficientes calculados pela Eq. (6).

Enfatizamos que, neste estágio, a solução (4) tem que ser considerada como uma solução *formal*, ou seja, foi obtida sem a justificativa rigorosa dos processos de limite envolvidos. Tal justificativa está aquém do escopo deste livro. No entanto, uma vez obtida a série (4) é possível mostrar que ela converge em $0 < x < L, t > 0$ para uma função contínua, que as derivadas u_{xx} e u_t podem ser calculadas diferenciando-se a série (4) termo a termo e que a equação de calor (1) é satisfeita de fato. O argumento baseia-se fortemente no fato de que cada termo da série (4) contém um fator exponencial com potência negativa, o que resulta em uma convergência relativamente rápida da série. Outro argumento estabelece que a função f dada pela Eq. (4) satisfaz, também, as condições de contorno e a condição inicial; isso completa a justificativa da solução formal.

É interessante notar que embora f satisfaça as condições do teorema de convergência de Fourier (Teorema 10.3.1), ela pode ter pontos de descontinuidade. Nesse caso, a distribuição inicial de temperatura $u(x,0) = f(x)$ é descontínua em um ou mais pontos. De qualquer jeito, a solução $u(x,t)$ é contínua para valores arbitrariamente pequenos de $t > 0$. Isso ilustra o fato de que a condução de calor é um processo de difusão que suaviza, instantaneamente, quaisquer descontinuidades que possam estar presentes na distribuição inicial de temperatura. Finalmente, como f é limitada, segue da Eq. (6) que os coeficientes c_n também são limitados. Em consequência, a presença do fator exponencial com potência negativa em cada termo da série garante que

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{7}$$

para todo x, independente da condição inicial. Isso está de acordo com o resultado esperado pela intuição física.

Vamos considerar, agora, dois outros problemas da equação de calor a uma dimensão espacial que podem ser resolvidos pelo método desenvolvido na Seção 10.5

Condições de Contorno Não Homogêneas. Suponha que uma das extremidades da barra é mantida a uma temperatura constante T_1 e a outra é mantida a outra temperatura constante, T_2. Então, as condições de contorno são

$$u(0,t) = T_1, \qquad u(L,t) = T_2, \quad t > 0. \tag{8}$$

A equação diferencial (1) e a condição inicial (3) permanecem inalteradas.

Esse problema só é ligeiramente mais difícil, devido às condições de contorno não homogêneas, do que o resolvido na Seção 10.5. Podemos resolvê-lo reduzindo-o a um problema com condições de contorno homogêneas que pode ser resolvido, então, como na Seção 10.5. A técnica para fazer isso é sugerida pelo argumento físico a seguir.

Depois de muito tempo — ou seja, quando $t \to \infty$ — antecipamos que será alcançada uma temperatura estacionária $v(x)$, que é independente do tempo t e das condições iniciais. Como $v(x)$ tem que satisfazer a equação de calor (1), temos

$$v''(x) = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{9}$$

Logo, a distribuição de temperatura estado estacionário é uma função linear de x. Além disso, $v(x)$ tem que satisfazer as condições de contorno

$$v(0) = T_1, \qquad v(L) = T_2, \tag{10}$$

que são válidas mesmo quando $t \to \infty$. A solução da Eq. (9), satisfazendo as Eqs. (10), é

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1. \tag{11}$$

Retornando ao problema original, Eqs. (1), (3), (8), vamos tentar expressar $u(x, t)$ como a soma da distribuição de temperatura estado estacionário $v(x)$ com uma outra distribuição (transiente) $w(x, t)$; escrevemos, então,

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t). \tag{12}$$

Como $v(x)$ é dado pela Eq. (11), o problema será resolvido se pudermos determinar $w(x, t)$. O problema de valores de contorno para $w(x, t)$ é obtido substituindo-se $u(x, t)$ nas Eqs. (1), (3) e (8) pela expressão na Eq. (12).

Da Eq. (1), temos

$$\alpha^2(v + w)_{xx} = (v + w)_t;$$

segue que

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t, \tag{13}$$

já que $v_{xx} = 0$ e $v_t = 0$. Analogamente, das Eqs. (12), (8) e (10),

$$\begin{aligned} w(0,t) &= u(0,t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(L,t) &= u(L,t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente, das Eqs. (12) e (3),

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x) = f(x) - v(x), \tag{15}$$

onde $v(x)$ é dado pela Eq. (11). Assim, a parte transiente da solução do problema original é encontrada resolvendo-se o problema que consiste nas Eqs. (13), (14) e (15). Este último problema é precisamente o discutido na Seção 10.5 considerando $f(x) - v(x)$ como a distribuição inicial de temperatura. Portanto,

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{16}$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{17}$$

Este é outro caso em que um problema mais difícil é resolvido reduzindo-o a um problema mais simples que já foi solucionado. A técnica de reduzir um problema com condições de contorno não homogêneas a um com condições de contorno homogêneas, através da subtração da solução estado estacionário, tem ampla aplicação.

EXEMPLO 1

Considere o problema de condução de calor

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < 30, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$u(0,t) = 20, \qquad u(30,t) = 50, \quad t > 0, \tag{19}$$

$$u(x,0) = 60 - 2x, \qquad 0 < x < 30. \tag{20}$$

Encontre a distribuição de temperatura estado estacionário e o problema de valores de contorno que determina a distribuição transiente.

A temperatura estado estacionário satisfaz $v''(x) = 0$ e as condições de contorno $v(0) = 20$ e $v(30) = 50$. Assim, $v(x) = 20 + x$. A solução transiente $w(x, t)$ satisfaz a equação do calor

$$w_{xx} = w_t, \tag{21}$$

as condições de contorno homogêneas

$$w(0,t) = 0, \qquad w(30,t) = 0, \tag{22}$$

e a condição inicial modificada

$$w(x,0) = 60 - 2x - (20 + x) = 40 - 3x. \tag{23}$$

Note que este problema é da forma (1), (2), (3) com $f(x) = 40 - 3x$, $\alpha^2 = 1$ e $L = 30$. Logo, a solução é dada pelas Eqs. (4) e (6).

A Figura 10.6.1 mostra os gráficos da distribuição inicial de temperatura $60 - 2x$, da distribuição final de temperatura $20 + x$ e da temperatura em dois instantes intermediários encontrados resolvendo-se as Eqs. (21), (22) e (23). Note que a temperatura intermediária satisfaz as condições de contorno (19) para qualquer $t > 0$. Quando t aumenta, o efeito das condições de contorno se move gradualmente das extremidades da barra para seu centro.

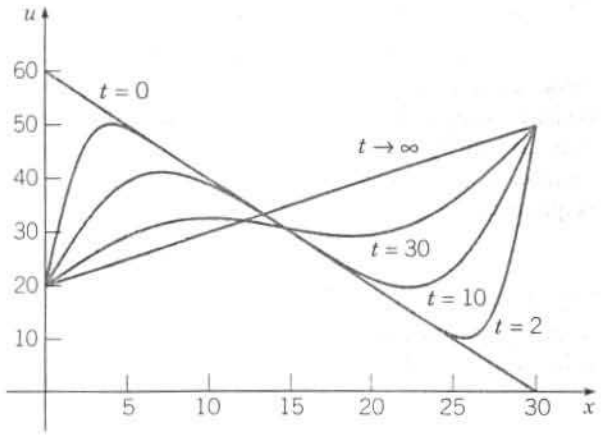


FIGURA 10.6.1 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução do calor do Exemplo 1.

Barra com Extremidades Isoladas. Um problema ligeiramente diferente acontece quando as extremidades da barra estão isoladas, de modo que não há transferência de calor através delas. De acordo com a Eq. (2) no Apêndice A, a taxa de fluxo de calor através de uma seção reta é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção x. Assim, no caso de não haver fluxo de calor, as condições de contorno são

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{24}$$

O problema posto pelas Eqs. (1), (3) e (24) também pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis. Se considerarmos

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{25}$$

e substituirmos esta expressão para u na Eq. (1), segue da Seção 10.5 que

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda, \tag{26}$$

onde λ é uma constante. Obtemos, então, novamente, duas equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{27}$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0. \tag{28}$$

Para qualquer valor de λ, um produto de soluções das Eqs. (27) e (28) é uma solução da equação diferencial parcial (1). Estamos interessados, no entanto, apenas nas soluções que satisfazem, também, as condições de contorno (24).

Substituindo $u(x,t)$ dada pela Eq. (25) na condição de contorno em $x = 0$, obtemos $X'(0)T(t) = 0$. Não podemos permitir que $T(t)$ seja nula para todo t, já que, nesse caso, $u(x,t)$ também seria nula para todo t. Logo, temos que ter

$$X'(0) = 0. \tag{29}$$

Procedendo da mesma maneira com a condição de contorno em $x = L$, vemos que

$$X'(L) = 0. \tag{30}$$

Logo, queremos resolver a Eq. (27) sujeita às condições de contorno (29) e (30). É possível mostrar que só existem soluções não triviais deste problema se λ for real. Um modo de fazer isso está indicado no Problema 18; outra maneira é apelar para uma teoria mais geral, que será discutida mais tarde, na Seção 11.2. Vamos supor que λ é real e considerar três casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Se $\lambda < 0$, é conveniente fazer $\lambda = -\mu^2$, onde μ é real e positivo. Então a Eq. (27) fica $X'' - \mu^2 X = 0$, e sua solução geral é

$$X(x) = k_1 \operatorname{senh} \mu x + k_2 \cosh \mu x. \tag{31}$$

Neste caso, as condições de contorno só podem ser satisfeitas escolhendo-se $k_1 = k_2 = 0$. Como isso não é aceitável, λ não pode ser negativo; em outras palavras, o problema (27), (29), (30) não tem autovalores negativos.

Se $\lambda = 0$, então a Eq. (27) fica $X'' = 0$ e, portanto,

$$X(x) = k_1 x + k_2. \tag{32}$$

As condições de contorno (29) e (30) implicam $k_1 = 0$, mas não determinam k_2. Logo, $\lambda = 0$ é um autovalor associado à autofunção $X(x) = 1$. Para $\lambda = 0$, segue da Eq. (28) que $T(t)$ também é constante, o que pode ser combinado com k_2. Portanto, para $\lambda = 0$ obtemos a solução constante $u(x, t) = k_2$.

Finalmente, se $\lambda > 0$, considere $\lambda = \mu^2$, onde μ é real e positivo. Então a Eq. (27) fica $X'' + \mu^2 X = 0$ e, em consequência,

$$X(x) = k_1 \operatorname{sen} \mu x + k_2 \cos \mu x. \tag{33}$$

A condição de contorno (29) implica $k_1 = 0$ e a condição de contorno (3) implica $\mu = n\pi/L$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, mas deixa k_2 arbitrário. Logo, o problema (27), (29), (30) tem uma sequência infinita de autovalores positivos $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, com autofunções associadas $X(x) = \cos(n\pi x/L)$. Para esses valores de λ as soluções $T(t)$ da Eq. (28) são proporcionais a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$.

Combinando todos esses resultados, temos as seguintes soluções fundamentais para o problema (1), (3), (24):

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= 1, \\ u_n(x, t) &= e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{34}$$

onde retiramos as constantes arbitrárias de proporcionalidade. Cada uma dessas funções satisfaz a equação diferencial (1) e as condições de contorno (24). Como tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno são homogêneas, qualquer combinação linear finita de soluções fundamentais as satisfaz. Vamos supor que isso também é verdade para uma combinação linear infinita convergente de soluções fundamentais. Então, para que a condição inicial (3) seja satisfeita, vamos supor que $u(x, t)$ tem a forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{c_0}{2} u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{35}$$

Os coeficientes c_n são determinados pela condição

$$u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{36}$$

Assim, os coeficientes desconhecidos na Eq. (35) têm que ser os coeficientes da série de Fourier em cossenos de período $2L$ de f. Portanto,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Com esta escolha dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$, a série (35) é solução do problema de condução de calor para uma barra com extremidades isoladas, Eqs. (1), (3), (24).

Vale a pena observar que a solução (35) pode também ser considerada como a soma de uma distribuição de temperatura estado estacionário (dada pela constante $c_0/2$), independente do tempo t, e uma distribuição transiente (dada pelo resto da série infinita) que tende a zero no limite quando t tende a infinito. O fato de que o estado estacionário é constante é consistente com a intuição de que o processo de condução de calor irá, gradualmente, uniformizar a distribuição de temperatura na barra enquanto não for permitido ao calor entrar nem escapar. A interpretação física do termo

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx \tag{38}$$

é que é o valor médio da distribuição de temperatura original.

EXEMPLO 2

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em uma barra metálica com 25 cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja distribuição inicial de temperatura é $u(x, 0) = x$ para $0 < x < 25$.

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução de calor (1), (3), (24) com $L = 25$. Logo, da Eq. (35), a solução é

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/625} \cos\frac{n\pi x}{25}, \tag{39}$$

onde os coeficientes são determinados pela Eq. (37). Temos

$$c_0 = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\,dx = 25 \tag{40}$$

e, para $n \geq 1$,

$$c_n = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\cos\frac{n\pi x}{25}\,dx$$

$$= 50(\cos n\pi - 1)/(n\pi)^2 = \begin{cases} -100/(n\pi)^2, & n \text{ ímpar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \tag{41}$$

Portanto,

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/625}\cos(n\pi x/25) \tag{42}$$

é a solução do problema dado.

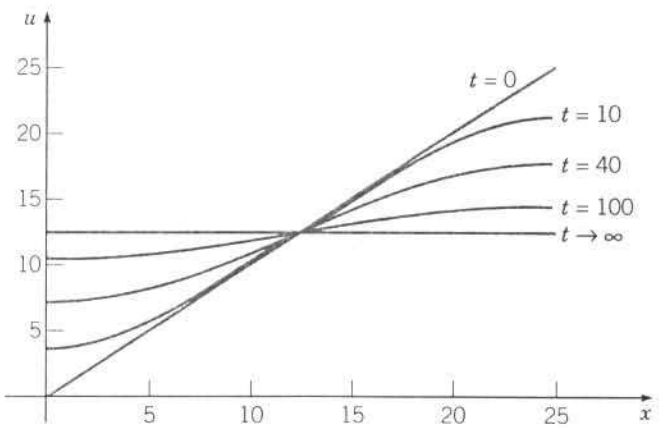


FIGURA 10.6.2 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução de calor do Exemplo 2.

Para $\alpha^2 = 1$, a Figura 10.6.2 mostra gráficos da distribuição de temperatura na barra em diversos instantes. Novamente, a convergência da série é tão rápida que basta um número relativamente pequeno de termos para gerar os gráficos.

Problemas Mais Gerais. O método de separação de variáveis também pode ser usado para resolver problemas de condução de calor com outras condições de contorno diferentes das dadas pelas Eqs. (8) e (24). Por exemplo, a extremidade esquerda da barra pode ser mantida a uma temperatura fixa T, enquanto a outra extremidade está isolada. Nesse caso, as condições de contorno ficam

$$u(0,t) = T, \qquad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0. \tag{43}$$

O primeiro passo para se resolver esse problema é reduzir as condições de contorno dadas a condições homogêneas, subtraindo-se a solução estado estacionário. O problema resultante é resolvido, essencialmente, pelo mesmo método usado nos problemas considerados anteriormente. No entanto, a extensão da função inicial f fora do intervalo $[0, L]$ é um pouco diferente das extensões consideradas até agora (veja o Problema 15).

Um tipo mais geral de condições de contorno ocorre quando o fluxo de calor nas extremidades da barra é proporcional à temperatura. Demonstra-se, no Apêndice A, que as condições de contorno nesse caso são da forma

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{44}$$

onde h_1 e h_2 são constantes não negativas. Se aplicarmos o método de separação de variáveis ao problema que consiste nas Eqs. (1), (3) e (44), veremos que $X(x)$ tem que ser solução de

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \qquad X'(L) + h_2 X(L) = 0, \tag{45}$$

onde λ é uma constante de separação. Mais uma vez, é possível mostrar que só existem soluções não triviais para determinados valores reais não negativos de λ, os autovalores, mas estes valores não são dados por uma fórmula simples (veja o Problema 20). Também é possível mostrar que as soluções correspondentes das Eqs. (45), as autofunções, satisfazem uma relação de ortogonalidade e que se pode satisfazer a condição inicial (3) superpondo-se as soluções das Eqs. (45). No entanto, a série resultante não está incluída nas discussões deste capítulo. Existe uma teoria mais geral que cobre tais problemas, esquematizada no Capítulo 11.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 8, encontre a solução estado estacionário da equação do calor $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ que satisfaz o conjunto dado de condições de contorno.

1. $u(0,t) = 10, \quad u(50,t) = 40$
2. $u(0,t) = 30, \quad u(40,t) = -20$
3. $u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$
4. $u_x(0,t) = 0, \quad u(L,t) = T$
5. $u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0$
6. $u(0,t) = T, \quad u_x(L,t) = 0$
7. $u_x(0,t) - u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = T$
8. $u(0,t) = T, \quad u_x(L,t) + u(L,t) = 0$
9. Considere uma barra de alumínio, com 20 cm de comprimento, inicialmente a uma temperatura uniforme de 25°C. Suponha que no instante $t = 0$ a extremidade $x = 0$ é esfriada a 0°C, enquanto a extremidade $x = 20$ é aquecida a 60°C, e ambas são mantidas, daí para frente, a essas temperaturas.
   (a) Encontre a distribuição de temperatura na barra em qualquer instante t.
   (b) Faça os gráficos da distribuição inicial de temperatura, da distribuição final (estado estacionário) e de duas distribuições em dois instantes representativos intermediários no mesmo conjunto de eixos.
   (c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 5$, 10 e 15.
   (d) Determine o intervalo de tempo necessário para que a temperatura em $x = 5$ cm alcance (e permaneça) em um intervalo de 1% em torno de seu valor estado estacionário.
10. (a) Suponha que as extremidades de uma barra de cobre com 100 cm de comprimento são mantidas a 0°C. Suponha que o centro da barra é aquecido a 100°C por uma fonte externa de calor e que esta situação é mantida até resultar em um estado estacionário. Encontre essa distribuição de temperatura estado estacionário.
    (b) Em um instante $t = 0$ [depois de atingido o estado estacionário do item (a)], suponha que a fonte externa é removida. No mesmo instante, suponha que a extremidade $x = 0$ é colocada em contato com um reservatório a 20°C, enquanto a outra extremidade permanece a 0°C. Encontre a temperatura em função da posição e do tempo.
    (c) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (d) A que valor limite tende a temperatura no centro da barra depois de um longo tempo? Depois de quanto tempo o centro da barra esfria, ficando a 1° de seu valor limite?
11. Considere uma barra com 30 cm de comprimento para a qual $\alpha^2 = 1$. Suponha que a distribuição inicial de temperatura é dada por $u(x,0) = x(60 - x)/30$ e que as condições de contorno são $u(0,t) = 30$ e $u(30,t) = 0$.
    (a) Encontre a temperatura na barra em função da posição e do tempo.
    (b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 12$. Observe que u inicialmente diminui, depois cresce por um tempo e, finalmente, diminui para alcançar seu valor estado estacionário. Explique, fisicamente, por que ocorre esse comportamento nesse ponto.
12. Considere uma barra uniforme de comprimento L a uma temperatura inicial dada por $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x/L)$, $0 \le x \le L$. Suponha que ambas as extremidades estão isoladas.
    (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$.
    (b) Qual é a temperatura estado estacionário quando $t \to \infty$?
    (c) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $L = 40$. Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (d) Descreva em poucas palavras como a temperatura na barra varia com o passar do tempo.

13. Considere uma barra com 40 cm de comprimento cuja temperatura inicial é dada por $u(x,0) = x(60-x)/30$. Suponha que $\alpha^2 = 1/4$ cm^2/s e que ambas as extremidades da barra estão isoladas.
    (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$.
    (b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (c) Determine a temperatura estado estacionário na barra.
    (d) Determine o intervalo de tempo necessário para que a temperatura em $x = 40$ fique a 1° de seu valor estado estacionário.

14. Considere uma barra com 30 cm de comprimento, feita de um material para o qual $\alpha^2 = 1$ e cujas extremidades estão isoladas. Suponha que a temperatura inicial é zero, exceto no intervalo $5 < x < 10$, onde é 25°C.
    (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$.
    (b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (c) Faça o gráfico de $u(4,t)$ e $u(11,t)$ em função de t. Observe que os pontos $x = 4$ e $x = 11$ estão localizados simetricamente em relação ao pulso inicial, embora os gráficos de suas respectivas temperaturas sejam bem diferentes. Explique fisicamente por que isso acontece.

15. Considere uma barra uniforme de comprimento L com distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$, $0 \le x \le L$. Suponha que a temperatura na extremidade $x = 0$ é mantida a 0°C, enquanto a extremidade $x = L$ está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela.
    (a) Mostre que as soluções fundamentais da equação diferencial parcial e das condições de contorno são
    $$u_n(x,t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4L^2} \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2L], \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$
    (b) Encontre uma expansão em série formal para a temperatura $u(x,t)$,
    $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t)$$
    que satisfaça, também, a condição inicial $u(x,0) = f(x)$.
    Sugestão: embora as soluções fundamentais envolvam apenas senos ímpares, ainda é possível representar f por uma série de Fourier em senos envolvendo apenas essas funções. Veja o Problema 39 da Seção 10.4.

16. Na barra do Problema 15, suponha que $L = 30$, que $\alpha^2 = 1$ e que a distribuição inicial de temperatura é $f(x) = 30 - x$ para $0 < x < 30$.
    (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$.
    (b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (c) Como muda a localização do ponto mais quente da barra x_m quando t aumenta? Desenhe o gráfico de x_m em função de t.
    (d) Faça o gráfico da temperatura máxima na barra em função de t.

17. Suponha que as condições são como nos Problemas 15 e 16, exceto que a condição de contorno em $x = 0$ é $u(0,t) = 40$.
    (a) Encontre a temperatura $u(x,t)$.
    (b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
    (c) Compare os gráficos obtidos neste problema com os do Problema 16. Explique como a mudança na condição de contorno em $x = 0$ causa as diferenças observadas no comportamento da temperatura na barra.

18. Considere o problema
    $$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0. \tag{i}$$
    Seja $\lambda = \mu^2$, onde $\mu = \nu + i\sigma$, com ν e σ reais. Mostre que, se $\sigma \neq 0$, então a única solução das Eqs. (i) é a solução trivial $X(x) = 0$.
    Sugestão: use um argumento semelhante ao do Problema 23 da Seção 10.1.

19. A extremidade direita de uma barra de comprimento a com condutividade térmica κ_1 e área de seção reta A_1 é juntada à extremidade esquerda de uma barra com condutividade térmica κ_2 e área de seção reta A_2. A barra composta tem comprimento total L. Suponha que a extremidade $x = 0$ é mantida à temperatura zero, enquanto a extremidade $x = L$ é mantida à temperatura T. Encontre a temperatura estado estacionário na barra composta, supondo que a temperatura e a taxa de fluxo de calor são contínuas em $x = a$.
    Sugestão: veja a Eq. (2) no Apêndice A.

20. Considere o problema

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, && 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + \gamma u(L,t) &= 0, && t > 0; \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le L. \end{aligned} \tag{i}$$

(a) Seja $u(x,t) = X(x)T(t)$ e mostre que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(L) + \gamma X(L) = 0, \tag{ii}$$

e

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0,$$

onde λ é a constante de separação.

(b) Suponha que λ é real e mostre que o problema (ii) não tem soluções não triviais se $\lambda \le 0$.

(c) Se $\lambda > 0$, seja $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$. Mostre que o problema (ii) só tem soluções não triviais se μ for solução da equação

$$\mu \cos \mu L + \gamma \operatorname{sen} \mu L = 0. \tag{iii}$$

(d) Reescreva a Eq. (iii) como $\tan(\mu L) = -\mu/\gamma$. Depois, desenhando os gráficos de $y = \tan(\mu L)$ e de $y = -\mu L/\gamma L$ para $\mu > 0$ no mesmo conjunto de eixos, mostre que a Eq. (iii) é satisfeita por uma infinidade de valores positivos para μ; denote esses valores por $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, ordenados em ordem crescente.

(e) Determine o conjunto de soluções fundamentais $u_n(x,t)$ correspondente aos valores μ_n encontrados no item (d).

Uma Fonte de Calor Externa. Considere o problema de condução de calor em uma barra em contato térmico com uma fonte ou um sumidouro externo de calor. Então, a equação de calor modificada é

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + s(x), \tag{i}$$

onde o termo $s(x)$ descreve o efeito do agente externo; $s(x)$ é positivo para uma fonte e negativo no caso de um sumidouro. Suponha que as condições de contorno são

$$u(0,t) = T_1, \qquad u(L,t) = T_2 \tag{ii}$$

e a condição inicial é

$$u(x,0) = f(x). \tag{iii}$$

Os Problemas de 21 a 23 tratam desse tipo de problema.

21. Escreva $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$, onde v e w são as partes estado estacionário e transiente, respectivamente, da solução. Enuncie os problemas de valores de contorno que $v(x)$ e $w(x,t)$ satisfazem, respectivamente. Observe que o problema para w é o problema de condução de calor fundamental discutido na Seção 10.5 com uma distribuição inicial de temperatura modificada.

22. (a) Suponha que $\alpha^2 = 1$ e que $s(x) = k$ na Eq. (i), uma constante. Encontre $v(x)$.

(b) Suponha que $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $L = 20$, $k = 1/5$ e que $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x,t)$. Depois faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de x para diversos valores de t; faça também o gráfico, no mesmo conjunto de eixos, da parte estacionária da solução, $v(x)$.

23. (a) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $s(x) = kx/L$ na Eq. (i), onde k é constante. Encontre $v(x)$.

(b) Suponha que $T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $L = 20$, $k = 1/2$ e que $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x,t)$. Depois faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de x para diversos valores de t; faça também o gráfico, no mesmo conjunto de eixos, da parte estacionária da solução, $v(x)$.

10.7 A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica

Uma segunda equação diferencial parcial que ocorre com frequência em matemática aplicada é a equação de onda.[10] Alguma forma desta equação, ou uma generalização, quase que inevitavelmente aparece em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contí-

[10]A solução da equação de onda foi um dos principais problemas matemáticos de meados do século XVIII. A equação de onda foi deduzida e estudada pela primeira vez por D'Alembert em 1746. Atraiu, também, a atenção de Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) e Lagrange (1759). Foram obtidas soluções de formas diferentes, e os méritos de cada uma e as relações entre elas foram discutidos, algumas vezes acaloradamente, em uma série de artigos durante mais de 25 anos. Os pontos principais em discussão tratavam da natureza de uma função e dos tipos de funções que podem ser representados por séries trigonométricas. Estas questões não foram resolvidas até o século XIX.

nuo. Por exemplo, estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas baseiam-se, todos, nessa equação.

Talvez a situação mais fácil de visualizar seja a investigação de vibrações mecânicas. Suponha que uma corda elástica de comprimento L esteja ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda (veja a Figura 10.7.1).

Pode-se pensar nesta corda elástica como sendo uma corda de violino, ou um esteio, ou, possivelmente, um cabo de força. Suponha que a corda é colocada em movimento (puxando-se, por exemplo), de modo que vibra em um plano vertical, e denote por $u(x, t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t. Se forem desprezados os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, e se a amplitude do movimento não for muito grande, então $u(x, t)$ satisfará a equação diferencial parcial

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \tag{1}$$

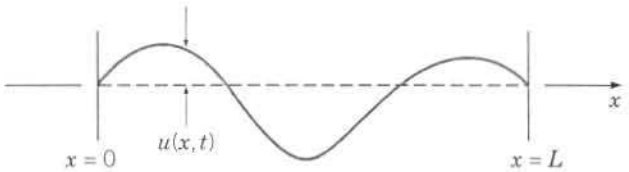


FIGURA 10.7.1 Uma corda vibrante.

no domínio $0 < x < L, t > 0$. A Eq. (1) é conhecida como a **equação de onda** unidimensional e está deduzida no Apêndice B ao final deste capítulo. O coeficiente constante a^2 que aparece na Eq. (1) é dado por

$$a^2 = T/\rho, \tag{2}$$

onde T é a tensão (força) na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda. Segue que a tem unidades de comprimento/tempo — ou seja, de velocidade. O Problema 14 mostra que a é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

Para descrever completamente o movimento da corda é necessário especificar, também, condições iniciais e de contorno adequadas para o deslocamento $u(x, t)$. Supõe-se que as extremidades permanecem fixas, logo as condições de contorno são

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

Como a equação diferencial (1) é de segunda ordem em relação a t, parece razoável fornecer duas condições iniciais. Elas são a posição inicial da corda,

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L \tag{4}$$

e sua velocidade inicial,

$$u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{5}$$

onde f e g são funções dadas. Para que as Eqs. (3), (4) e (5) sejam consistentes, é necessário, também, supor que

$$f(0) = f(L) = 0, \qquad g(0) = g(L) = 0. \tag{6}$$

O problema matemático, então, é determinar a solução da equação de onda (1) que satisfaz, também, as condições de contorno (3) e as condições iniciais (4) e (5). Como o problema de condução de calor das Seções 10.5 e 10.6, este é um problema de valor inicial na variável temporal t e um problema de valores de contorno na variável espacial x. De outro ponto de vista, também pode ser considerado como um problema de valores de contorno na faixa semi-infinita $0 < x < L, t > 0$ no plano xt (veja a Figura 10.7.2).

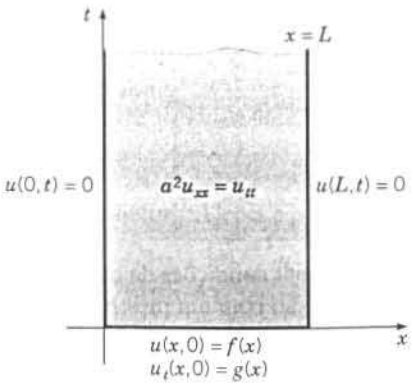


FIGURA 10.7.2 Problema de valores de contorno para a equação de onda.

É imposta uma condição em cada ponto dos lados semi-infinitos, e são impostas duas condições em cada ponto da base finita.

É importante compreender que a Eq. (1) modela um número grande de outros problemas ondulatórios, além das vibrações transversas de uma corda elástica. Por exemplo, basta interpretar a função u e a constante a apropriadamente para se ter problemas que tratam de ondas em um oceano, ondas acústicas ou eletromagnéticas na atmosfera, ou ondas elásticas em um corpo sólido. Se o problema tiver mais de uma dimensão espacial significativa, então a Eq. (1) tem que ser ligeiramente generalizada. A equação de onda a duas dimensões é

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \tag{7}$$

Esta equação apareceria, por exemplo, se considerássemos o movimento de uma superfície fina elástica, como a superfície de um tambor. Analogamente, em três dimensões a equação de ondas é

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{8}$$

Em conexão com essas duas últimas equações, as condições de contorno e iniciais também têm que ser generalizadas de maneira adequada.

Vamos resolver, agora, alguns problemas de valores de contorno típicos envolvendo a equação de onda unidimensional.

Corda Elástica com Deslocamento Inicial Não Nulo. Suponha primeiro que a corda é deslocada em relação a sua posição de equilíbrio e solta depois, no instante $t = 0$, com velocidade nula para vibrar livremente. Então, o deslocamento vertical $u(x, t)$ tem que satisfazer a equação de onda (1),

$$a^2u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

as condições de contorno (3),

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0;$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{9}$$

onde f é uma função dada que descreve a configuração da corda em $t = 0$.

O método de separação de variáveis pode ser usado para se obter a solução das Eqs. (1), (3) e (9). Supondo que

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{10}$$

e substituindo u na Eq. (1), obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda, \tag{11}$$

onde λ é uma constante de separação. Vemos, então, que $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{12}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{13}$$

Além disso, substituindo $u(x, t)$ nas condições de contorno (3) pela expressão na Eq. (10), vemos que $X(x)$ tem que satisfazer as condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{14}$$

Finalmente, usando a Eq. (10) na segunda das condições iniciais (9), vemos também que $T(t)$ tem que satisfazer a condição inicial

$$T'(0) = 0. \tag{15}$$

Nossa próxima tarefa é determinar $X(x)$, $T(t)$ e λ resolvendo a Eq. (12) sujeita às condições de contorno (14) e a Eq. (13) sujeita à condição inicial (15).

O problema de resolver a equação diferencial (12) sujeita às condições de contorno (14) é *precisamente o mesmo problema* que apareceu na Seção 10.5 em conexão com um problema de condução de calor. Podemos, então, usar os resultados obtidos ali e no final da Seção 10.1: o problema (12), (14) tem soluções não triviais se, e somente se, λ é um autovalor,

$$\lambda = n^2\pi^2/L^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

e $X(x)$ é proporcional às autofunções correspondentes $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$.

Usando os valores de λ dados pela Eq. (16) na Eq. (13), obtemos

$$T'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T = 0. \tag{17}$$

Portanto,

$$T(t) = k_1 \cos\frac{n\pi at}{L} + k_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}, \tag{18}$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias. A condição inicial (15) implica $k_2 = 0$, logo $T(t)$ tem que ser proporcional a $\cos(n\pi at/L)$.

Assim, as funções

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

satisfazem a equação diferencial parcial (1), as condições de contorno (3) e a segunda condição inicial em (9). Estas funções são as soluções fundamentais do problema dado.

Para satisfazer a condição inicial (não homogênea) (9) que falta, vamos considerar uma superposição das soluções fundamentais (19) com coeficientes escolhidos adequadamente. Supomos, então, que $u(x,t)$ tem a forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \tag{20}$$

onde as constantes c_n ainda têm que ser escolhidas. A condição inicial $u(x,0) = f(x)$ implica

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{21}$$

Em consequência, os coeficientes c_n têm que ser os coeficientes na série de Fourier em senos de f com período $2L$; portanto,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Logo, a solução formal do problema formado pelas Eqs. (1), (3), (9) é dada pela Eq. (20) com os coeficientes calculados pela Eq. (22).

Para um valor fixo de n, a expressão $\operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi at/L)$ na Eq. (19) é periódica no tempo com período $2L/na$; ela representa, portanto, um movimento vibratório da corda com esse período, ou com frequência $n\pi a/L$. As quantidades $n\pi a/L$ para $n = 1, 2, \ldots$, são as **frequências naturais** da corda — ou seja, frequências nas quais a corda vibra livremente. O fator $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar na frequência dada. Cada padrão de deslocamento é chamado **modo natural** de vibração e é periódico na variável espacial x; o período espacial $2L/n$ é chamado **comprimento de onda** do modo de frequência $n\pi a/L$. Assim, os autovalores $n^2\pi^2/L^2$ do problema (12), (14) são proporcionais aos quadrados das frequências naturais e as autofunções $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ dão os modos naturais. Os três primeiros modos naturais estão esboçados na Figura 10.7.3. O movimento total da corda, dado pela função $u(x,t)$ na Eq. (20), é, portanto, uma combinação dos modos naturais de vibração e, também, uma função periódica no tempo com período $2L/a$.

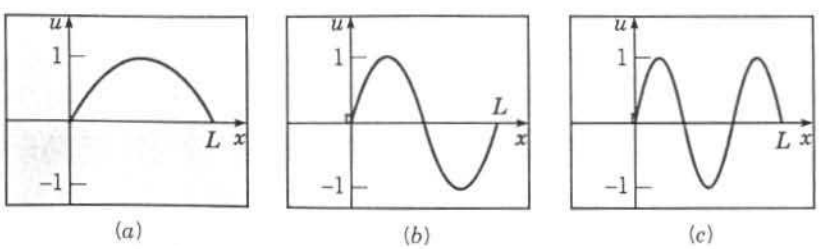


FIGURA 10.7.3 Os três primeiros modos fundamentais de vibração de uma corda elástica. (a) Frequência = $\pi a/L$, comprimento de onda = $2L$; (b) frequência = $2\pi a/L$, comprimento de onda = L; (c) frequência = $3\pi a/L$, comprimento de onda = $2L/3$.

EXEMPLO 1

Considere uma corda vibrante de comprimento $L = 30$ que satisfaz a equação de onda

$$4u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < 30, \quad t > 0. \tag{23}$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial da posição inicial

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \le x \le 10, \\ (30-x)/20, & 10 < x \le 30. \end{cases} \tag{24}$$

Encontre o deslocamento $u(x,t)$ da corda e descreva seu movimento durante um período.

A solução é dada pela Eq. (20) com $a = 2$ e $L = 30$, ou seja,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{30} \cos \frac{2n\pi t}{30}, \tag{25}$$

onde c_n é calculado pela Eq. (22). Usando a Eq. (24) na Eq. (22), obtemos

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{10} \frac{x}{10} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{30}\, dx + \frac{2}{30}\int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{30}\, dx. \tag{26}$$

Calculando as integrais na Eq. (26), encontramos

$$c_n = \frac{9}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{27}$$

A solução (25), (27) fornece o deslocamento da corda em qualquer ponto x em qualquer instante t. O movimento é periódico no tempo com período 30, de modo que basta analisar a solução para $0 \le t \le 30$.

A melhor maneira de visualizar a solução é por animação computacional, mostrando o comportamento dinâmico da corda vibrante. Indicamos, aqui, o movimento da corda nas Figuras 10.7.4, 10.7.5 e 10.7.6. A Figura 10.7.4 mostra gráficos de u em função de x para $t = 0; 4; 7{,}5; 11$ e 15. Observe que o deslocamento inicial máximo é positivo e ocorre em $x = 10$, enquanto $t = 15$, meio período mais tarde, o deslocamento máximo é negativo e ocorre em $x = 20$. A corda, então, refaz seu movimento e volta à configuração original em $t = 30$. A Figura 10.7.5 mostra o comportamento dos pontos $x = 10$, 15 e 20 através dos gráficos de u em função de t para esses valores fixos de x. Os gráficos confirmam que o movimento é, de fato, periódico com período 30. Note, também, que cada ponto interior na corda fica parado durante um terço de cada período. A Figura 10.7.6 mostra um gráfico tridimensional de u em função de x e de t, no qual fica aparente a natureza global da solução. É claro que as curvas nas Figuras 10.7.4 e 10.7.5 pertencem à superfície ilustrada na Figura 10.7.6.

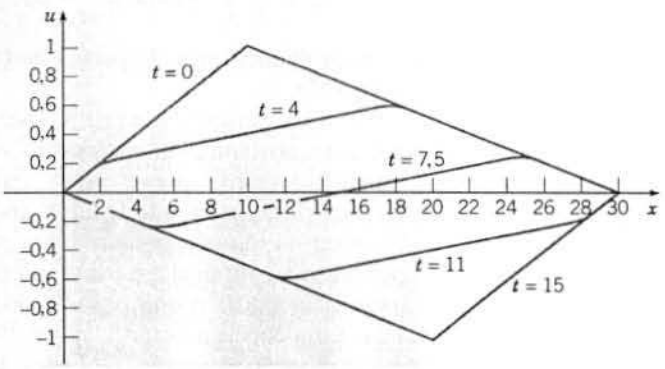


FIGURA 10.7.4 Gráficos de u em função de x para valores fixos de t para a corda no Exemplo 1.

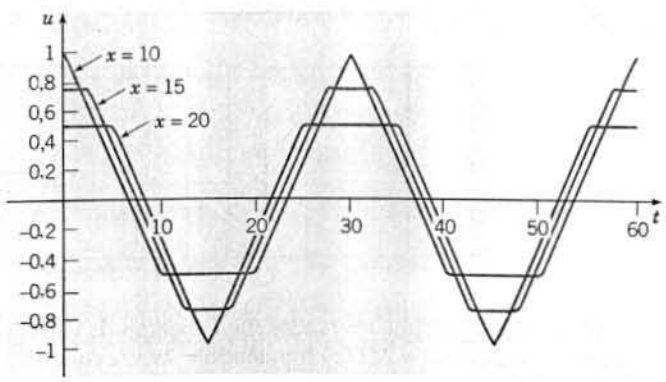


FIGURA 10.7.5 Gráficos de u em função de t para valores fixos de x para a corda no Exemplo 1.

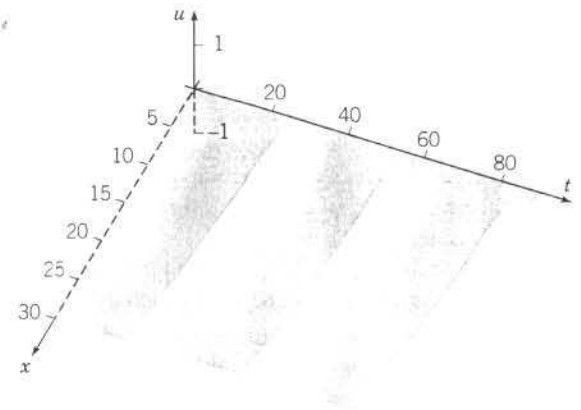


FIGURA 10.7.6 Gráfico de u em função de x e de t para a corda no Exemplo 1.

Justificativa da Solução. Como no problema de condução de calor considerado anteriormente, a Eq. (20) com os coeficientes c_n dados pela Eq. (22) é apenas uma solução *formal* das Eqs. (1), (3) e (9). Para garantir que a Eq. (20) representa *de fato* a solução do problema dado é necessário que se investigue mais a fundo. Como no problema de condução de calor, é tentador tentar mostrar isso diretamente substituindo $u(x, t)$ dado pela Eq. (20) nas Eqs. (1), (3) e (9). No entanto, ao se calcular formalmente u_{xx}, por exemplo, obtemos

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi at}{L};$$

devido à presença do fator n^2 no numerador, esta série pode não convergir. Isso não significa, necessariamente, que a série (20) para $u(x, t)$ esteja errada, mas apenas que ela não pode ser usada para calcular u_{xx} e u_{tt}. Uma diferença básica entre soluções da equação de onda e da equação do calor é que a última contém exponenciais com potências negativas que tendem a zero muito rapidamente quando n aumenta, o que garante a convergência da solução em série e de suas derivadas. Por outro lado, as soluções em série da equação de onda contêm termos oscilatórios que não decaem quando n aumenta.

Existe, no entanto, outra maneira de se estabelecer a validade da Eq. (20) indiretamente. Ao mesmo tempo, ganharemos informação adicional sobre a estrutura da solução. Vamos mostrar primeiro que a Eq. (20) é equivalente a

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[h(x-at) + h(x+at)\right], \tag{28}$$

onde h é a função obtida estendendo-se o dado inicial f a $(-L, 0)$ como uma função ímpar e a outros valores de x como uma função periódica de período $2L$, ou seja,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ -f(-x), & -L < x < 0; \end{cases} \tag{29}$$

$$h(x+2L) = h(x).$$

Para provar a Eq. (28), note que h tem série de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{30}$$

onde c_n é dado pela Eq. (22). Então, usando as identidades trigonométricas para uma soma ou diferença de senos, obtemos

$$h(x-at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} - \cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}\right),$$

$$h(x+at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} + \cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}\right),$$

e a Eq. (28) segue imediatamente adicionando-se as duas últimas equações. Da Eq. (28), vemos que $u(x, t)$ é contínua para $0 < x < L, t > 0$, desde que h seja contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$. Para isso, é necessário

que f seja contínua no intervalo original $[0, L]$. Analogamente, u é duas vezes continuamente diferenciável em relação a qualquer das duas variáveis em $0 < x < L, t > 0$, desde que h seja duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, \infty)$. Para isso, é necessário que f' e f'' sejam contínuas em $[0, L]$. Além disso, como h'' é a extensão ímpar de f'', precisamos também ter $f''(0) = f''(L) = 0$. No entanto, como a derivada de h é a extensão par de f', não são necessárias condições adicionais sobre f'. Se essas condições forem satisfeitas, então u_{xx} e u_{tt} poderão ser calculadas da Eq. (28), e é um exercício elementar mostrar que essas derivadas satisfazem a equação de onda. Alguns dos detalhes do argumento que acabamos de indicar estão dados nos Problemas 19 e 20.

Se algumas das condições de continuidade enunciadas no parágrafo precedente não forem satisfeitas, então u não vai ser diferenciável em alguns pontos da faixa semi-infinita $0 < x < L, t > 0$ e será, então, uma solução da equação de onda apenas em um sentido um tanto restrito. Uma consequência física importante desta observação é que se o dado inicial f tem alguma descontinuidade, ela será preservada na solução $u(x, t)$ durante todo o tempo. Em contraste, descontinuidades iniciais no problema de condução de calor são instantaneamente suavizadas (Seção 10.6). Suponha que o deslocamento inicial f tem um salto em $x = x_0$, $0 \le x_0 \le L$. Como h é uma extensão periódica de f, a mesma descontinuidade estará presente em $h(\xi)$ para $\xi = x_0 + 2nL$ e em $\xi = -x_0 + 2nL$, onde n é um inteiro arbitrário. Logo, $h(x - at)$ é descontínua quando $x - at = x_0 + 2nL$ ou quando $x - at = -x_0 + 2nL$. Para um x fixo em $[0, L]$, a descontinuidade que estava originalmente em x_0 vai reaparecer em $h(x - at)$ nos instantes $t = (x \pm x_0 - 2nL)/a$. Analogamente, $h(x + at)$ é descontínua nos pontos x nos instantes $t = (-x \pm x_0 - 2mL)/a$, onde m é um inteiro arbitrário. Olhando a Eq. (28), vemos que a solução $u(x, t)$ também é descontínua no ponto x dado em todos esses instantes. Como o problema físico é colocado para $t > 0$, só interessam os valores de m e n que correspondem a valores positivos de t.

Problema Geral para a Corda Elástica. Vamos modificar o problema considerado anteriormente, supondo que a corda é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade dada. Então, o deslocamento vertical $u(x, t)$ tem que satisfazer a equação de onda (1),

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

as condições de contorno (3)

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \ge 0;$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{31}$$

onde $g(x)$ é a velocidade inicial da corda no ponto x.

A solução deste novo problema pode ser obtida seguindo-se o procedimento descrito anteriormente para o problema (1), (3), (9). Separando as variáveis, vemos que o problema para $X(x)$ é exatamente igual ao anterior. Logo, mais uma vez, $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ e $X(x)$ é proporcional a $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$. A equação diferencial para $T(t)$ é novamente a Eq. (17), mas a condição inicial associada é, agora,

$$T(0) = 0, \tag{32}$$

correspondendo à primeira das condições iniciais (31). A solução geral da Eq. (17) é dada pela Eq. (18), mas, agora, a condição inicial (32) implica que $k_1 = 0$. Portanto, $T(t)$ agora é proporcional a $\operatorname{sen}(n\pi at/L)$ e as soluções fundamentais para o problema (1), (3), (31) são

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{33}$$

Cada uma das funções $u_n(x, t)$ satisfaz a equação de onda (1), as condições de contorno (3) e a primeira das condições iniciais (31). A consequência principal de se usar as condições iniciais (31) em vez de (9) é que o fator dependente do tempo em $u_n(x, t)$ envolve um seno, em vez de um cosseno.

Para satisfazer a condição inicial (não homogênea) que falta, vamos supor que $u(x, t)$ possa ser expressa como uma combinação linear das soluções fundamentais (33), ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}. \tag{34}$$

Para determinar os valores dos coeficientes k_n, diferenciamos a Eq. (34) em relação a t, igualamos t a zero e usamos a segunda condição inicial em (31); isso nos dá a equação

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = g(x). \tag{35}$$

Logo, as quantidades $(n\pi a/L)k_n$ são os coeficientes da série de Fourier em senos de período $2L$ para g. Portanto,

$$\frac{n\pi a}{L}k_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{36}$$

Assim, a Eq. (34), com os coeficientes dados pela Eq. (36), constitui uma solução formal para o problema formado pelas Eqs. (1), (3), (31). A validade desta solução formal pode ser estabelecida por argumentos semelhantes aos indicados anteriormente para a solução das Eqs. (1), (3), (9).

Finalmente, vamos considerar o problema que consiste na equação de onda (1), nas condições de contorno (3) e nas condições iniciais gerais (4), (5):

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L, \tag{37}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. Embora este problema possa ser resolvido por separação de variáveis, como nos casos discutidos anteriormente, é importante observar que ele também pode ser resolvido simplesmente somando-se as duas soluções obtidas antes. Para mostrar que isso é verdade, seja $v(x,t)$ a solução do problema (1), (3), (9) e seja $w(x,t)$ a solução do problema (1), (3), (31). Então, $v(x,t)$ é dada pelas Eqs. (20) e (22), enquanto $w(x,t)$ é dada pelas Eqs. (34) e (36). Seja, agora, $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$; que problema $u(x,t)$ satisfaz? Observe primeiro que

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = (a^2v_{xx} - v_{tt}) + (a^2w_{xx} - w_{tt}) = 0 + 0 = 0, \tag{38}$$

de modo que $u(x,t)$ satisfaz a equação de onda (1). A seguir, temos

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0, \qquad u(L,t) = v(L,t) + w(L,t) = 0 + 0 = 0, \tag{39}$$

e $u(x,t)$ satisfaz, também, as condições de contorno (3). Finalmente, temos

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x) \tag{40}$$

e

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x). \tag{41}$$

Logo, $u(x,t)$ satisfaz as condições iniciais gerais (37).

Podemos enunciar os resultados que acabamos de obter de outra maneira. Para resolver a equação de onda com as condições iniciais (37) você pode resolver os problemas um pouco mais simples com as condições iniciais (9) e (31), respectivamente, e depois somar estas duas soluções. Este é outro uso do princípio de superposição.

PROBLEMAS

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento sem velocidade inicial de uma posição inicial $u(x,0) = f(x)$. Em cada um dos Problemas de 1 a 4 faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x,t)$ para a posição inicial $f(x)$ dada.

(b) Faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.

(c) Faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.

(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.

(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$

3. $f(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com velocidade inicial $u_t(x,0) = g(x)$. Em cada um dos Problemas de 5 a 8 faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x,t)$ para a função $g(x)$ dada.
(b) Faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.
(c) Faça o gráfico de $u(x,t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

5. $g(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$

6. $g(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$

7. $g(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

8. $g(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

9. Se uma corda elástica tiver uma extremidade solta, a condição de contorno a ser satisfeita aí é $u_x = 0$. Encontre o deslocamento $u(x,t)$ de uma corda elástica de comprimento L, fixa em $x = 0$ e solta em $x = L$, colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$, onde f é uma função dada. *Sugestão:* mostre que as soluções fundamentais para este problema satisfazendo todas as condições, exceto a condição inicial não homogênea, são

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen} \lambda_n x \cos \lambda_n a t,$$

onde $\lambda_n = (2n-1)\pi/2L$, $n = 1, 2, \ldots$ Compare este problema com o Problema 15 da Seção 10.6; preste atenção especial na extensão do dado inicial fora do intervalo $[0, L]$.

10. Considere uma corda elástica de comprimento L. A extremidade $x = 0$ é mantida fixa, enquanto a extremidade $x = L$ está solta; assim, as condições de contorno são $u(0,t) = 0$ e $u_x(L,t) = 0$. A corda é colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x,0) = f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Calcule o deslocamento $u(x,t)$.
(b) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t. Preste atenção especial nos valores de t entre 3 e 7. Observe como a perturbação inicial é refletida em cada extremidade da corda.
(c) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo durante pelo menos um período.
(e) Descreva o movimento da corda em algumas frases.

11. Suponha que a corda no Problema 10 começa a partir da posição inicial $f(x) = 8x(L - x^2)/L^3$. Siga as instruções no Problema 10 para este novo problema.

12. Podem ser introduzidas variáveis adimensionais na equação de onda $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ da seguinte maneira:
(a) Seja $s = x/L$ e mostre que a equação de onda fica

$$a^2 u_{ss} = L^2 u_{tt}.$$

(b) Mostre que L/a tem dimensão de tempo e pode ser usada, portanto, como a unidade na escala de tempo. Defina $\tau = at/L$ e mostre que a equação de onda se reduz a

$$u_{ss} = u_{\tau\tau}.$$

Os Problemas 13 e 14 indicam a forma da solução geral da equação de onda e o significado físico da constante a.

13. (a) Mostre que a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

pode ser reduzida à forma $u_{\xi\eta} = 0$ pela mudança de variáveis $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.
(b) Mostre que $u(x,t)$ pode ser escrita como

$$u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at),$$

onde ϕ e ψ são funções arbitrárias.

14. (a) Faça o gráfico de $\phi(x - at)$ para $t = 0, 1/a, 2/a$ e t_0/a se $\phi(s) = \text{sen } s$. Note que para qualquer $t \neq 0$ o gráfico de $y = \phi(x - at)$ é igual ao de $y = \phi(x)$ quando $t = 0$, só que deslocado uma distância at no sentido positivo do eixo dos x. Logo, a representa a velocidade na qual uma perturbação se move ao longo da corda.

(b) Qual é a interpretação de $\phi(x + at)$?

15. Um fio de aço com 5 ft (em torno de 1,5 m) é esticado por uma tensão de 50 lb (em torno de 222 newtons). O fio tem densidade de massa de 0,026 lb/ft (em torno de 0,034 kg/m).

(a) Encontre a velocidade de propagação das ondas transversas no fio.

(b) Encontre as frequências naturais de vibração.

(c) Se for aumentada a tensão no fio, como vão variar as frequências naturais? Os modos naturais também mudam?

16. Considere a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que ϕ e ψ têm que satisfazer

$$\phi(x) + \psi(x) = f(x),$$

$$-\phi'(x) + \psi'(x) = 0.$$

(b) Resolva as equações do item (a) para ϕ e ψ, mostrando, assim, que

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[f(x - at) + f(x + at)\right].$$

Esta forma da solução foi obtida por D'Alembert em 1746.

Sugestão: note que a equação $\psi'(x) = \phi'(x)$ pode ser resolvida escolhendo-se $\psi(x) = \phi(x) + c$.

(c) Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Mostre que

$$f(x - at) = \begin{cases} 2, & -1 + at < x < 1 + at, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine também $f(x + at)$.

(d) Esboce o gráfico da solução encontrada no item (b) em $t = 0$, $t = 1/2a$, $t = 1/a$ e $t = 2/a$, obtendo os

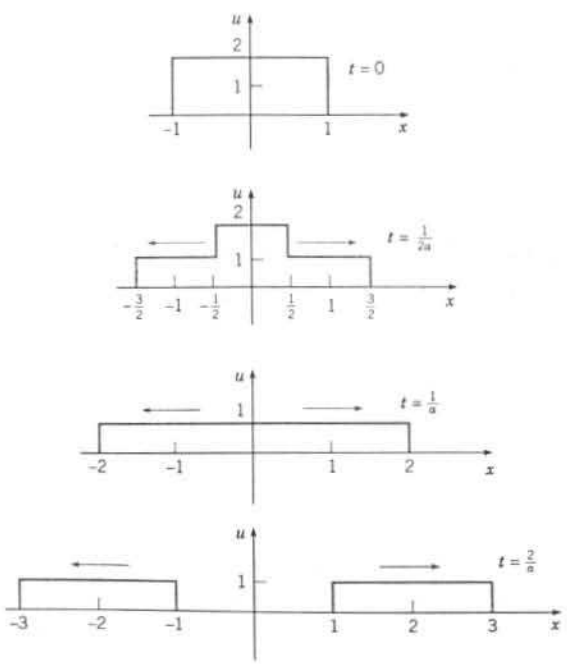


FIGURA 10.7.7 Propagação da perturbação inicial em um meio unidimensional infinito.

resultados ilustrados na Figura 10.7.7. Observe que um deslocamento inicial produz duas ondas movendo-se em sentidos opostos e afastando-se da localização inicial; cada onda consiste em metade do deslocamento inicial.

17. Considere a equação de onda

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que

$$\phi(x) + \psi(x) = 0,$$

$$-a\phi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$

(b) Use a primeira das equações no item (a) para mostrar que $\psi'(x) = -\phi'(x)$. Depois use a segunda equação para mostrar que $-2a\phi'(x) = g(x)$ e, portanto, que

$$\phi(x) = -\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + \phi(x_0),$$

onde x_0 é arbitrário. Finalmente, determine $\psi(x)$.

(c) Mostre que

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

18. Combinando os resultados dos Problemas 16 e 17, mostre que a solução do problema

$$a^2 u_{xx} = u_{tt},$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

é dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

Os Problemas 19 e 20 indicam como é possível mostrar que a solução formal (20), (22) das Eqs. (1), (3) e (9) é, de fato, a solução deste problema.

19. Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$, mostre que a solução (20) do problema formado pelas Eqs. (1), (3) e (9) pode ser colocada na forma (28).

20. Seja $h(\xi)$ o deslocamento inicial em $[0, L]$ estendido a $(-L, 0)$ como uma função ímpar e estendido ao resto da reta como uma função periódica de período $2L$. Supondo a continuidade de h e suas derivadas até segunda ordem, mostre por diferenciação direta que $u(x,t)$, dada pela Eq. (28), satisfaz a equação de onda (1) e as condições iniciais (9). Note, também, que, como a Eq. (20) satisfaz claramente as condições de contorno (3), o mesmo é verdadeiro para a Eq. (28). Comparando a Eq. (28) com a solução do problema correspondente para a corda infinita (Problema 16), vemos que elas têm a mesma forma, desde que os dados iniciais para a corda finita, definidos originalmente apenas no intervalo $[0, L]$, sejam estendidos da maneira indicada para todo o eixo dos x. Se isso for feito, a solução para a corda infinita também é aplicável para a corda finita.

21. O movimento de uma membrana circular elástica, como a membrana de um tambor, é determinado pela equação de onda bidimensional em coordenadas polares

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Supondo que $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

22. A energia total $E(t)$ da corda vibrante é dada em função do tempo por

$$E(t) = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2}\rho u_t^2(x,t) + \tfrac{1}{2}T u_x^2(x,t)\right] dx; \tag{i}$$

o primeiro termo é a energia cinética devida ao movimento da corda e o segundo é a energia potencial criada pelo deslocamento da corda de sua posição de equilíbrio.

Para o deslocamento $u(x,t)$ dado pela Eq. (20) — ou seja, para a solução do problema da corda com velocidade inicial nula — mostre que

$$E(t) = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^2. \tag{ii}$$

Note que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii) não depende de t. Logo, a energia total E é constante e, portanto, é *conservada* durante o movimento da corda.
Sugestão: use a equação de Parseval (Problema 37 da Seção 10.4 e Problema 17 da Seção 10.3) e lembre que $a^2 = T/\rho$.

23. **Ondas Dispersivas.** Considere a equação de onda modificada

$$a^{-2}u_{tt} + \gamma^2 u = u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{i}$$

com as condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{ii}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{iii}$$

(a) Mostre que a solução pode ser escrita como

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2}\, at\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

(b) Usando identidades trigonométricas, escreva a solução na forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}(x + a_n t) + \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L}(x - a_n t)\right].$$

Determine a_n, a velocidade de propagação da onda.

(c) Observe que a_n, encontrado no item (b), depende de n. Isso significa que componentes com comprimentos de onda diferentes (ou frequências) se propagam com velocidades diferentes, resultando em uma distorção da forma original da onda com o passar do tempo. Este fenômeno é chamado de **dispersão**. Encontre condições sob as quais a_n não depende de n — ou seja, não há dispersão.

24. Considere a situação no Problema 23 com $a^2 = 1$, $L = 10$ e

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & 4 \le x \le 5, \\ 6 - x, & 5 \le x \le 6, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine os coeficientes c_n na solução do Problema 23(a).

(b) Faça o gráfico de

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10} \quad \text{para} \quad 0 \le x \le 10,$$

escolhendo N suficientemente grande de modo que o gráfico mostre precisamente o gráfico de $f(x)$. Use este valor de N para os outros gráficos deste problema.

(c) Seja $\gamma = 0$. Faça o gráfico de $u(x, x)$ em função de x para $t = 60$.

(d) Seja $\gamma = 1/8$. Faça o gráfico de $u(x, x)$ em função de x para $t = 20, 40, 60$.

(e) Seja $\gamma = 1/4$. Faça o gráfico de $u(x, x)$ em função de x para $t = 20, 40, 60$.

10.8 Equação de Laplace

Uma das equações diferenciais parciais mais importantes que ocorrem em matemática aplicada está associada ao nome de Laplace:[11] em duas dimensões, a equação é

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

e, em três dimensões,

[11] A equação de Laplace recebeu este nome em honra a Pierre-Simon de Laplace, que a partir de 1782 estudou extensivamente suas soluções ao investigar a atração gravitacional de corpos arbitrários no espaço. No entanto, a equação apareceu pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2}$$

Por exemplo, em um problema de calor a duas dimensões espaciais a temperatura $u(x, y, t)$ tem que satisfazer a equação diferencial

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{3}$$

onde α^2 é a difusividade térmica. Se existir um estado estacionário, u só depende de x e y e a derivada em relação a t desaparece; nesse caso, a Eq. (3) se reduz à Eq. (1). Analogamente, para a solução estado estacionário do problema de condução de calor tridimensional a temperatura tem que satisfazer a equação de Laplace tridimensional. As Eqs. (1) e (2) também ocorrem em outros ramos da física matemática. Na consideração de campos eletrostáticos a função potencial elétrico em um meio dielétrico sem cargas elétricas tem que satisfazer a Eq. (1) ou a Eq. (2), dependendo do número de dimensões espaciais envolvidas. Analogamente, a função potencial de uma partícula livre no espaço, sob a ação apenas de forças gravitacionais, satisfaz a mesma equação. Por essa razão, a equação de Laplace também é conhecida como a **equação do potencial**. Outro exemplo aparece no estudo do movimento irrotacional estado estacionário (independente do tempo) de um fluido bidimensional incompressível não viscoso. Esse estudo está centrado em duas funções, conhecidas como função potencial velocidade e a função de fluxo, ambas das quais satisfazem a Eq. (1). Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da função de deformação, que também satisfaz a Eq. (1).

Como não existe dependência no tempo nos problemas aqui mencionados, não existem condições iniciais a serem satisfeitas pelas soluções da Eq. (1) ou da Eq. (2). Elas precisam, no entanto, satisfazer certas condições de contorno em uma curva ou superfície que marca a fronteira da região na qual a equação diferencial vai ser resolvida. Como a equação de Laplace é de segunda ordem, parece razoável esperar que sejam necessárias duas condições de contorno para determinar completamente a solução. Isso não ocorre, no entanto. Lembre-se de que no problema de condução de calor para a barra finita (Seções 10.5 e 10.6) foi necessário dar uma condição em cada extremidade da barra, ou seja, *uma condição em cada ponto da fronteira*. Generalizando esta observação para problemas multidimensionais, é natural então dar uma condição sobre a função u em cada ponto da fronteira da região onde procuramos uma solução para a Eq. (1) ou (2). A condição de contorno mais comum ocorre quando é especificado o valor de u em cada ponto na fronteira; em termos do problema de condução de calor, isso corresponde a descrever a temperatura na fronteira. Em alguns problemas é dado o valor da derivada, ou taxa de variação, de u na direção normal à fronteira; a condição sobre um corpo isolado termicamente, por exemplo, é desse tipo. É possível a ocorrência de condições de contorno mais complicadas; por exemplo, u pode ser especificado em parte da fronteira e sua derivada normal especificada no restante. O problema de encontrar uma solução da equação de Laplace com valores dados na fronteira é conhecido como um **problema de Dirichlet**, em homenagem a P. G. L. Dirichlet.[12] Por outro lado, se os valores da derivada normal são dados na fronteira, o problema é dito um **problema de Neumann**, em homenagem a K. G. Neumann.[13] Os problemas de Dirichlet e de Neumann também são conhecidos como o primeiro e o segundo problemas de valores de contorno da teoria do potencial, respectivamente.

Fisicamente, é razoável esperar que os tipos de condições de contorno mencionados sejam suficientes para determinar inteiramente a solução. De fato, é possível estabelecer a existência e a unicidade da solução da equação de Laplace sob as condições de contorno mencionadas, desde que a forma da fronteira e as funções que aparecem nas condições de contorno satisfaçam certas condições bem fracas. No entanto, as demonstrações desses teoremas, e até seus enunciados precisos, estão aquém do escopo deste livro. Nossa única preocupação será a de resolver alguns problemas típicos através do método de separação de variáveis e séries de Fourier.

Embora os problemas escolhidos como exemplos tenham interpretações físicas interessantes (em termos de potenciais eletrostáticos ou distribuições de temperatura estado estacionário, por exemplo), nosso objetivo principal é mostrar algumas das coisas que podem ocorrer durante a solução matemática. Vale a pena observar também, mais uma vez, que problemas mais complicados podem, algumas vezes, ser resolvidos expressando-se a solução como a soma de diversos problemas mais simples (veja os Problemas 3 e 4).

[12]Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) foi professor em Berlim e, depois da morte de Gauss, em Göttingen. Em 1829 ele deu o primeiro conjunto de condições suficientes para garantir a convergência de uma série de Fourier. A definição de *função* utilizada normalmente hoje em dia em cálculo elementar é a dada por Dirichlet em 1837. Embora mais conhecido por seus trabalhos em análise e equações diferenciais, Dirichlet foi também um dos mais importantes matemáticos do século XIX na área de teoria dos números.

[13]Karl Gottfried Neumann (1832-1925), professor em Leipzig, fez contribuições em equações diferenciais, equações integrais e variáveis complexas.

Problema de Dirichlet em um Retângulo. Considere o problema matemático de encontrar a função u que satisfaz a equação de Laplace (1),

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, e as condições de contorno

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ &u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = f(y), \qquad 0 \le y \le b, \end{aligned} \tag{4}$$

onde f é uma função dada em $0 \le y \le b$ (veja a Figura 10.8.1).

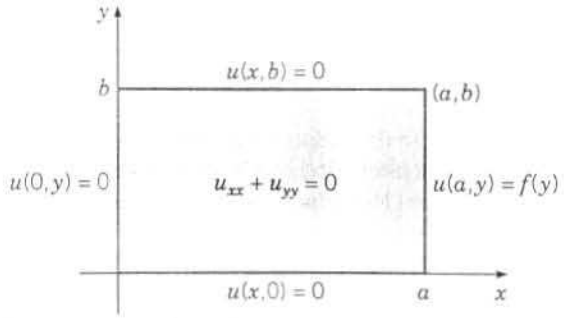


FIGURA 10.8.1 O problema de Dirichlet em um retângulo.

Para resolver este problema queremos construir um conjunto fundamental de soluções satisfazendo a equação diferencial parcial e as condições de contorno homogêneas; depois, vamos superpor essas soluções de modo a satisfazer a condição de contorno restante. Vamos supor que

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \tag{5}$$

e substituir u na Eq. (1) por esta expressão. Obtemos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

onde λ é a constante de separação. Obtemos assim duas equações diferenciais ordinárias

$$X'' - \lambda X = 0, \tag{6}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \tag{7}$$

Substituindo u dada pela Eq. (5) em cada uma das condições de contorno homogêneas, encontramos

$$X(0) = 0 \tag{8}$$

e

$$Y(0) = 0, \qquad Y(b) = 0. \tag{9}$$

Vamos determinar primeiro a solução da equação diferencial (7) sujeita às condições de contorno (9). Este problema é essencialmente idêntico ao encontrado anteriormente nas Seções 10.1, 10.5 e 10.7. Concluímos que existem soluções não triviais se e somente se λ for um autovalor, a saber,

$$\lambda = (n\pi/b)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

e $Y(y)$ for proporcional à autofunção correspondente $\operatorname{sen}(n\pi y/b)$. A seguir, vamos substituir λ dado pela Eq. (10) na Eq. (6) e resolver esta equação sujeita à condição de contorno (8). É conveniente escrever a solução geral da Eq. (6) na forma

$$X(x) = k_1 \cosh(n\pi x/b) + k_2 \operatorname{senh}(n\pi x/b), \tag{11}$$

de modo que a condição de contorno (8) implica que $k_1 = 0$. Logo, $X(x)$ tem que ser proporcional a $\operatorname{senh}(n\pi x/b)$. Obtemos, assim, as soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Essas funções satisfazem a equação diferencial (1) e as condições de contorno homogêneas para cada valor de n.

Para satisfazer a condição de contorno não homogênea em $x = a$ que falta, vamos supor, como de hábito, que podemos representar a solução $u(x, y)$ na forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}. \tag{13}$$

Os coeficientes c_n são determinados pela condição de contorno

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} = f(y). \tag{14}$$

Então as quantidades $c_n \operatorname{senh}(n\pi a/b)$ têm que ser os coeficientes da série de Fourier em senos de f de período $2b$ e são dadas por

$$c_n \operatorname{senh} \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{15}$$

Portanto, a solução da equação diferencial parcial (1) que satisfaz as condições de contorno (4) é dada pela Eq. (13) com os coeficientes c_n calculados pela Eq. (15).

Das Eqs. (13) e (15) vemos que a solução contém o fator $\operatorname{senh}(n\pi x/b)/\operatorname{senh}(n\pi a/b)$. Para estimar essa quantidade para n grande, podemos usar a aproximação $\operatorname{senh}\xi \cong e^{\xi}/2$, obtendo, assim,

$$\frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \cong \frac{\frac{1}{2}\exp(n\pi x/b)}{\frac{1}{2}\exp(n\pi a/b)} = \exp[-n\pi(a-x)/b]$$

Este fator, então, comporta-se como uma exponencial com potência negativa; em consequência, a série (13) converge bem rapidamente, a menos que $a - x$ seja muito pequeno.

EXEMPLO 1

Para ilustrar esses resultados, sejam $a = 3$, $b = 2$ e

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le 1, \\ 2 - y, & 1 \le y \le 2. \end{cases} \tag{16}$$

Calculando c_n da Eq. (15), vemos que

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2 \operatorname{senh}(3n\pi/2)}. \tag{17}$$

Logo, $u(x, y)$ é dado pela Eq. (13). Mantendo 20 termos na série, podemos fazer o gráfico de $u(x, y)$ em função de x e y, como mostra a Figura 10.8.2. Podemos, também, construir um gráfico contendo curvas de nível de $u(x, y)$; a Figura 10.8.3 ilustra tal gráfico, com um incremento de 0,1 entre curvas adjacentes.

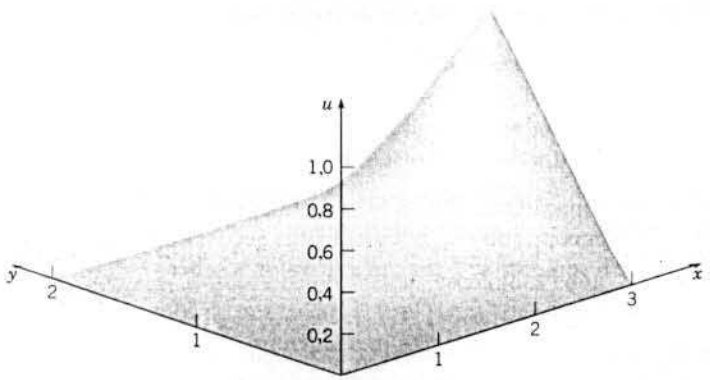


FIGURA 10.8.2 Gráfico de u em função de x e y para o Exemplo 1.

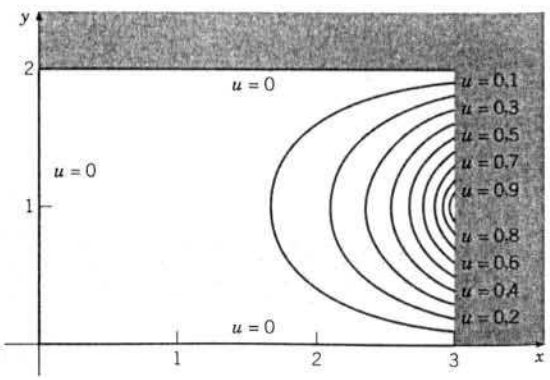


FIGURA 10.8.3 Curvas de nível de $u(x, y)$ para o Exemplo 1.

Problema de Dirichlet em um Círculo. Considere o problema consistindo na equação de Laplace em uma região circular $r < a$ sujeita à condição de contorno

$$u(a,\theta) = f(\theta), \tag{18}$$

onde f é uma função dada em $0 \le \theta < 2\pi$ (veja a Figura 10.8.4). Em coordenadas polares, a equação de Laplace fica

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{19}$$

Para completar o enunciado do problema, observamos que para que $u(r, \theta)$ esteja bem definida é necessário que u seja periódica em θ com período 2π. Além disso, enunciamos, explicitamente, que $u(r, \theta)$ tem que ser limitada para $r \leq a$, já que isso vai ser importante mais tarde.

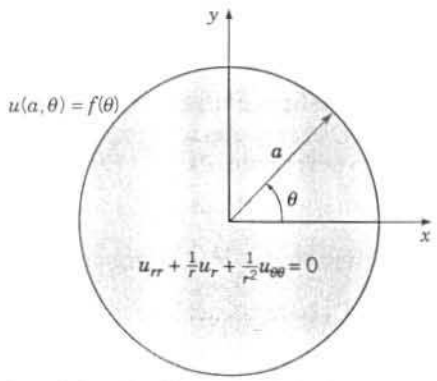


FIGURA 10.8.4 Problema de Dirichlet em um círculo.

Para aplicar o método de separação de variáveis a este problema, vamos supor que

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{20}$$

e substituir u na equação diferencial (19) por essa expressão. Isso nos dá

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0,$$

ou

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda, \tag{21}$$

onde λ é a constante de separação. Obtemos assim duas equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \tag{22}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{23}$$

Este problema não tem condições de contorno homogêneas; lembre, no entanto, que as soluções têm que ser limitadas e periódicas em θ com período 2π. É possível mostrar (Problema 9) que a condição de periodicidade implica que λ tem que ser real. Vamos considerar os casos em que λ é negativo, nulo e positivo.

Se $\lambda < 0$, fazemos $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então a Eq. (23) fica $\Theta'' - \mu^2\Theta = 0$ e, em consequência,

$$\Theta(\theta) = c_1e^{\mu\theta} + c_2e^{-\mu\theta}. \tag{24}$$

Logo, $\Theta(\theta)$ só pode ser periódica se $c_1 = c_2 = 0$, e concluímos que λ não pode ser negativo.

Se $\lambda = 0$, então a Eq. (23) fica $\Theta'' = 0$, logo,

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta. \tag{25}$$

Para que $\Theta(\theta)$ seja periódica, temos que ter $c_2 = 0$, de modo que $\Theta(\theta)$ é constante. Além disso, para $\lambda = 0$, a Eq. (22) fica

$$r^2R'' + rR' = 0. \tag{26}$$

Esta equação é do tipo de Euler e tem solução

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r. \tag{27}$$

O termo logarítmico não é aceitável, já que $u(r, \theta)$ tem que permanecer limitada quando $r \to 0$; portanto, $k_2 = 0$. Então, se $\lambda = 0$, concluímos que $u(r, \theta)$ tem que ser constante, ou seja, proporcional à solução

$$u_0(r, \theta) = 1. \tag{28}$$

Finalmente, se $\lambda > 0$, fazemos $\lambda = \mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, as Eqs. (22) e (23) ficam

$$r^2R'' + rR' - \mu^2R = 0 \tag{29}$$

e

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \tag{30}$$

respectivamente. A Eq. (29) é uma equação de Euler e tem solução

$$R(r) = k_1 r^{\mu} + k_2 r^{-\mu}, \tag{31}$$

enquanto a Eq. (30) tem solução

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen} \mu\theta + c_2 \cos \mu\theta \tag{32}$$

Para que Θ seja periódica com período 2π é necessário que μ seja um inteiro positivo n. Com $\mu = n$ a solução $r^{-\mu}$ na Eq. (31) tem que ser abandonada, já que ela se torna ilimitada quando $r \to 0$. Portanto, $k_2 = 0$ e as soluções pertinentes da Eq. (19) são

$$u_n(r,\theta) = r^n \cos n\theta, \qquad v_n(r.\theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Essas funções, junto com $u_0(r,\theta) = 1$, formam um conjunto fundamental de soluções para o problema em questão.

Como de hábito, vamos supor que u pode ser expressa como uma combinação linear das soluções fundamentais, ou seja,

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta). \tag{34}$$

Então, a condição de contorno (18) implica que

$$u(a,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta) = f(\theta) \tag{35}$$

para $0 \le \theta < 2\pi$. A função f pode ser estendida para fora desse intervalo de modo a ficar periódica com período 2π tendo, portanto, uma série de Fourier da forma (35). Como a função estendida tem período 2π, podemos calcular seus coeficientes de Fourier integrando em qualquer período da função. Em particular, é conveniente usar o intervalo original $(0, 2\pi)$; então,

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{36}$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Com essa escolha de coeficientes a Eq. (34) representa a solução do problema de valores de contorno formado pelas Eqs. (18) e (19). Note que neste problema precisamos dos termos em senos e em cossenos na solução. Isso ocorre porque os dados de contorno foram dados em $0 \le \theta < 2\pi$ e têm período 2π. Em consequência, precisamos da série de Fourier completa, em vez da série só em senos ou só em cossenos.

PROBLEMAS

1. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = g(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Para $a = 3$ e $b = 1$, faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de y e faça, também, o gráfico de u em função de y para diversos valores de x.

(d) Faça o gráfico tridimensional de u em função de x e de y. Desenhe, também, diversas curvas de nível de $u(x, y)$ no plano xy.

2. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

3. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: considere a possibilidade de somar as soluções de dois problemas, um com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(a, y) = f(y)$, e o outro com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(x, 0) = h(x)$.

(b) Encontre a solução se $h(x) = (x/a)^2$ e $f(y) = 1 - (y/b)$.

(c) Sejam $a = 2$ e $b = 2$. Faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de x, u em função de y, u em função de x e de y e curvas de nível.

4. Mostre como encontrar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = k(y), \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \qquad u(x, b) = g(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: veja o Problema 3.

5. Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

fora do círculo $r = a$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi,$$

sobre o círculo. Suponha que $u(r, \theta)$ está bem definida e é limitada para $r > a$.

6. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace na região semicircular $r < a, 0 < \theta < \pi$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada na região dada.

(b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

(c) Seja $a = 2$ e faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de r, u em função de θ, u em função de ambos, r e θ, e curvas de nível.

7. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a, 0 < \theta < \alpha$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \alpha) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \alpha.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada no setor.

8. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace na faixa semi-infinita $0 < x < a, y > 0$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad y > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le a$$

e a condição adicional de que $u(x, y) \to 0$ quando $y \to \infty$.

(b) Encontre a solução se $f(x) = x(a - x)$.

(c) Seja $a = 5$. Encontre o menor valor de y_0 para o qual $u(x, y) \le 0{,}1$ para todo $y \ge y_0$.

9. Mostre que a Eq. (23) só tem soluções periódicas se λ for real.

Sugestão: seja $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu = \nu + i\sigma$, com ν e σ reais.

10. Considere o problema de encontrar uma solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0, y) = 0, \qquad u_x(a, y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$
$$u_y(x, 0) = 0, \qquad u_y(x, b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

Este é um exemplo de um problema de Neumann.

(a) Mostre que a equação de Laplace e as condições de contorno homogêneas determinam o conjunto fundamental de soluções

$$u_0(x,y) = c_0,$$

$$u_n(x,y) = c_n \cosh(n\pi x/b)\cos(n\pi y/b), \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

(b) Através da superposição das soluções fundamentais do item (a) determine, formalmente, uma função u que satisfaça também a condição de contorno não homogênea $u_x(a,y) = f(y)$. Note que ao se calcular $u_x(a,y)$ o termo constante em $u(x,y)$ é eliminado e não há condição da qual se possa determinar c_0. Além disso, tem que ser possível representar f por uma série de Fourier em cossenos de período $2b$ sem termo constante. Isso significa que

$$\int_0^b f(y)\,dy = 0$$

é uma condição necessária para que o problema tenha solução. Finalmente, note que c_0 permanece arbitrário e, portanto, a solução está determinada a menos desta constante aditiva. Esta é uma propriedade de todos os problemas de Neumann.

11. Encontre uma solução $u(r,\theta)$ da equação de Laplace no interior do círculo $r = a$ que satisfaça a condição de contorno sobre o círculo

$$u_r(a,\theta) = g(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Note que este é um problema de Neumann e que sua solução está determinada a menos de uma constante aditiva. Enuncie uma condição necessária sobre $g(\theta)$ para que este problema possa ser resolvido pelo método de separação de variáveis (veja o Problema 10).

12. (a) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$

$$u_y(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = g(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

Note que este não é um problema de Dirichlet nem de Neumann, mas um problema misto, no qual u é dada em parte da fronteira e sua derivada normal é dada no resto.

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 1$. Fazendo gráficos apropriados, compare esta solução com a do Problema 1.

13. (a) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0,y) = 0, \qquad u(a,y) = f(y), \qquad 0 < y < b,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u_y(x,b) = 0, \qquad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: alguma hora vai ser necessário expandir $f(y)$ em uma série envolvendo $\operatorname{sen}(\pi y/2b)$, $\operatorname{sen}(3\pi y/2b)$, $\operatorname{sen}(5\pi y/2b)$, ... (veja o Problema 39 da Seção 10.4).

(b) Encontre a solução se $f(y) = y(2b - y)$.

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

14. (a) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a, 0 < y < b$ que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0,y) = 0, \qquad u_x(a,y) = 0, \qquad 0 < y < b,$$

$$u(x,0) = 0, \qquad u(x,b) = g(x), \qquad 0 \le x \le a.$$

(b) Encontre a solução se $g(x) = 1 + x^2(x-a)^2$.

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

15. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas r, θ e z e depois supondo que a solução é simétrica em relação ao eixo dos z (não depende de θ), obtemos a equação

$$u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0.$$

Supondo que $u(r,z) = R(r)Z(z)$, mostre que R e Z satisfazem as equações

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \qquad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

A equação para R é uma equação de Bessel de ordem zero com variável independente λr.

16. **Fluxo em um Aquífero.** Considere o fluxo de água em um meio poroso, como areia, em um aquífero. O fluxo é bombeado por uma cabeça hidráulica, uma medida da energia potencial da água acima do aquífero. Seja $R: 0 < x < a, 0 < z < b$ uma seção vertical do aquífero. Em um meio homogêneo uniforme, a cabeça hidráulica $u(x, z)$ satisfaz a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{zz} = 0 \quad \text{em } R. \tag{i}$$

Se a água não puder fluir através dos lados e do fundo de R, então as condições de contorno serão

$$u_x(0, z) = 0, \quad u_x(a, z) = 0, \qquad 0 \le z \le b \tag{ii}$$

$$u_z(x, 0) = 0, \qquad 0 \le x \le a. \tag{iii}$$

Finalmente, suponha que a condição de contorno em $z = b$ é

$$u(x, b) = b + \alpha x, \qquad 0 \le x \le a, \tag{iv}$$

onde α é a inclinação do aquífero.

(a) Resolva o problema de valores de contorno dado para $u(x, z)$.

(b) Sejam $a = 1000$, $b = 500$ e $\alpha = 0{,}1$. Desenhe curvas de nível da solução em R, ou seja, desenhe algumas curvas de nível de $u(x, z)$.

(c) A água flui ao longo de caminhos em R ortogonais às curvas de nível de $u(x, z)$ no sentido de u decrescente. Faça gráficos de alguns dos caminhos de fluxo.

APÊNDICE A

Dedução da Equação de Calor. Nesta seção vamos deduzir a equação diferencial que, pelo menos em uma primeira aproximação, governa a condução de calor em sólidos. É importante compreender que a análise matemática de uma situação ou um processo físico como este baseia-se, em última instância, em conhecimentos empíricos sobre o fenômeno em questão. O matemático tem que começar em algum lugar, e este lugar é dado pela experiência. Considere uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, de modo que o calor só pode fluir na direção do eixo. Foi demonstrado muitas vezes que se duas seções retas paralelas de mesma área A e temperaturas diferentes T_1 e T_2, respectivamente, estiverem separadas por uma pequena distância d, uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a mais fria. Além disso, essa quantidade de calor é diretamente proporcional à área A e à diferença de temperatura $|T_2 - T_1|$, e inversamente proporcional à distância de separação d. Logo,

$$\text{Quantidade de calor por unidade de tempo} = \kappa A|T_2 - T_1|/d, \tag{1}$$

onde o fator positivo de proporcionalidade κ é chamado de condutividade térmica e depende principalmente do material[14] de que é feita a barra. A relação (1) é chamada muitas vezes de lei da condução do calor de Fourier. Repetimos que a Eq. (1) é um resultado empírico, e não teórico, e que pode ser, como o foi muitas vezes, verificada por experimentos cuidadosos. Ela forma a base da teoria matemática de condução de calor.

Vamos considerar uma barra com seção reta uniforme, feita de material homogêneo, orientada de modo que o eixo dos x coincida com o eixo da barra (veja a Figura 10.A.1). Vamos denotar por $x = 0$ e $x = L$ as extremidades da barra.

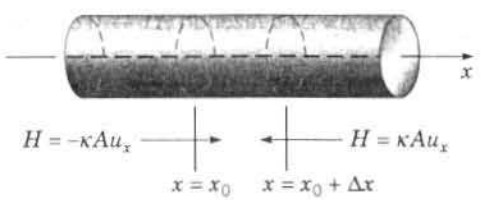


FIGURA 10.A.1 Condução de calor em um trecho da barra.

Vamos supor que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há fluxo de calor através deles. Vamos supor, também, que a temperatura u depende apenas da posição axial x e do tempo t, e não das coordenadas y e z. Em outras palavras, estamos supondo que a temperatura permanece

[14] De fato, κ também depende da temperatura, mas se o intervalo de temperatura não for grande demais será satisfatório supor κ independentemente da temperatura.

constante em qualquer seção reta da barra. Esta hipótese é satisfatória, em geral, quando as dimensões laterais da barra são pequenas comparadas a seu comprimento.

A equação diferencial que governa a temperatura na barra expressa um equilíbrio físico fundamental: a taxa segundo a qual o calor entra em qualquer parte da barra é igual à taxa segundo a qual o calor é absorvido naquela parte da barra. Os termos na equação são chamados de termo de fluxo e termo de absorção, respectivamente.

Vamos calcular primeiro o termo de fluxo. Considere uma parte da barra entre as seções retas $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$, onde x_0 é arbitrário e Δx é pequeno. A taxa instantânea de transferência de calor $H(x_0, t)$ da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0$ é dada por

$$H(x_0,t) = -\lim_{d\to 0} \kappa A \frac{u(x_0 + d/2, t) - u(x_0 - d/2, t)}{d}$$

$$= -\kappa A u_x(x_0, t). \tag{2}$$

O sinal de menos aparece nesta equação porque só vai haver fluxo positivo de calor da esquerda para a direita se a temperatura à esquerda de $x = x_0$ for maior do que a temperatura à direita; neste caso, $u_x(x_0, t)$ é negativa. De maneira semelhante, a taxa segundo a qual o calor passa da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$H(x_0 + \Delta x, t) = -\kappa A u_x(x_0 + \Delta x, t). \tag{3}$$

Então a taxa total segundo a qual o calor entra no trecho da barra entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$Q = H(x_0, t) - H(x_0 + \Delta x, t) = \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)], \tag{4}$$

e a quantidade de calor entrando nesse trecho da barra no intervalo de tempo Δt é

$$Q\Delta t = \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\,\Delta t. \tag{5}$$

Vamos calcular agora o termo de absorção. A variação média de temperatura Δu no intervalo de tempo Δt é diretamente proporcional à quantidade de calor $Q\,\Delta t$ introduzida e inversamente proporcional à massa Δm do trecho da barra. Logo,

$$\Delta u = \frac{1}{s}\frac{Q\Delta t}{\Delta m} = \frac{Q\Delta t}{s\rho A \Delta x}, \tag{6}$$

onde a constante de proporcionalidade s é conhecida como o calor específico do material da barra e ρ é sua massa específica.[15] A variação média de temperatura Δu no trecho da barra em consideração é igual à variação de temperatura em algum ponto intermediário $x = x_0 + \theta\,\Delta x$, onde $0 < \theta < 1$. Portanto, a Eq. (6) pode ser escrita como

$$u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t) = \frac{Q\Delta t}{s\rho A \Delta x}, \tag{7}$$

ou como

$$Q\Delta t = [u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t)]s\rho A\Delta x. \tag{8}$$

Para equilibrar os termos de fluxo e de absorção, igualamos as duas expressões para $Q\,\Delta t$:

$$\kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\Delta t = s\rho A[u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t)]\Delta x. \tag{9}$$

Dividindo a Eq. (9) por $\Delta x\,\Delta t$ e fazendo $\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, obtemos a equação de *calor* ou de *difusão*

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t. \tag{10}$$

A quantidade α^2, definida por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s \tag{11}$$

é chamada de ***difusividade térmica*** e é um parâmetro que depende apenas do material de que é feita a barra. As unidades de α^2 são (comprimento)^2/tempo. Valores típicos de α^2 são dados na Tabela 10.5.1.

Diversas condições relativamente simples podem ser impostas nas extremidades da barra. Por exemplo, a temperatura em uma extremidade pode ser mantida a um valor constante T. Isso pode ser feito colocando-se a extremidade da barra em contato com um reservatório suficientemente grande, de modo

[15] A dependência da massa específica e do calor específico na temperatura é relativamente pequena e será desprezada. Assim, tanto ρ quanto s serão considerados constantes.

que qualquer fluxo de calor que possa haver entre a barra e o reservatório não altera, sensivelmente, a temperatura do reservatório. Na extremidade onde isso é feito a condição de contorno é

$$u = T. \tag{12}$$

Outra condição de contorno simples ocorre se a extremidade está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela. Lembrando da expressão (2) para a quantidade de calor atravessando qualquer seção reta da barra, concluímos que a condição de isolamento significa que esta quantidade é nula. Logo,

$$u_x = 0 \tag{13}$$

é a condição de contorno em uma extremidade isolada.

Um tipo mais geral de condição de contorno ocorre se a taxa de fluxo de calor através da extremidade da barra é proporcional à temperatura ali. Vamos considerar a extremidade $x = 0$, onde a taxa de fluxo de calor da esquerda para a direita é dada por $-\kappa A u_x(0, t)$; veja a Eq. (2). Então a taxa do fluxo de calor saindo da barra (da direita para a esquerda) em $x = 0$ é $\kappa A u_x(0, t)$. Se essa quantidade for proporcional à temperatura $u(0, t)$, obtemos a condição de contorno

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{14}$$

onde h_1 é uma constante de proporcionalidade não negativa. Note que $h_1 = 0$ corresponde a uma extremidade isolada, enquanto $h_1 \to \infty$ corresponde a uma extremidade mantida à temperatura zero.

Se o fluxo de calor estiver ocorrendo na extremidade direita da barra ($x = L$), então, de maneira análoga, obtemos a condição de contorno

$$u_x(L, t) + h_2 u(L, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{15}$$

onde, novamente, h_2 é uma constante de proporcionalidade não negativa.

Então, para determinar completamente o fluxo de calor na barra é preciso ter a distribuição de temperatura em um instante fixo, geralmente considerado como o instante inicial $t = 0$. Essa condição inicial é da forma

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{16}$$

O problema então é determinar a solução da equação diferencial (10) sujeita a uma das condições de contorno de (12) a (15) em cada extremidade e à condição inicial (16) em $t = 0$.

Diversas generalizações da equação de calor (10) ocorrem na prática. Primeiro, o material da barra pode não ser uniforme e a seção reta pode não ser constante ao longo de toda a barra. Nesse caso, os parâmetros κ, ρ, s e A podem depender da variável axial x. Voltando para a Eq. (2), vemos que a taxa de transferência de calor da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0$ é dada, agora, por

$$H(x_0, t) = -\kappa(x_0) A(x_0) u_x(x_0, t) \tag{17}$$

com uma expressão análoga para $H(x_0 + \Delta x, t)$. Se introduzirmos essas quantidades na Eq. (4) e, finalmente, na Eq. (9), procedendo como antes, obtemos a equação diferencial parcial

$$(\kappa A u_x)_x = s\rho A u_t. \tag{18}$$

Vamos escrever, em geral, a Eq. (18) na forma

$$r(x) u_t = [p(x) u_x]_x, \tag{19}$$

onde $p(x) = \kappa(x) A(x)$ e $r(x) = s(x)\rho(x)A(x)$. Note que estas duas quantidades são intrinsecamente positivas.

Uma segunda generalização ocorre se existirem outras maneiras de entrar ou sair calor da barra. Suponha que existe uma *fonte* que adiciona calor à barra a uma taxa $G(x, t, u)$ por unidade de tempo por unidade de comprimento, onde $G(x, t, u) > 0$. Nesse caso, precisamos somar o termo $G(x, t, u)\,\Delta x\,\Delta t$ à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (9), o que nos leva à equação diferencial

$$r(x) u_t = [p(x) u_x]_x + G(x, t, u). \tag{20}$$

Se $G(x, t, u) < 0$, estamos falando de um *sumidouro* que remove calor da barra a uma taxa $G(x, t, u)$ por unidade de tempo por unidade de comprimento. Para tornar o problema tratável, precisamos restringir a forma da função G. Em particular, vamos supor que G é linear em u e que o coeficiente de u não depende de t. Temos, então,

$$G(x, t, u) = F(x, t) - q(x) u. \tag{21}$$

O sinal de menos na Eq. (21) foi introduzido para que determinadas equações, que vão aparecer mais tarde, tenham suas formas habituais. Substituindo a Eq. (21) na Eq. (20), obtemos

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t). \tag{22}$$

Esta equação é chamada, algumas vezes, equação de calor generalizada. Problemas de valores de contorno para a Eq. (22) serão discutidos no Capítulo 11.

Finalmente, se em vez de uma barra unidimensional considerarmos um corpo com mais de uma dimensão espacial significativa, então a temperatura será uma função de duas ou três variáveis espaciais, em vez de só depender de x. Podem-se fazer considerações semelhantes às que nos levaram à Eq. (10) para se deduzir a equação de calor em duas dimensões,

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{23}$$

ou em três dimensões,

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t. \tag{24}$$

As condições de contorno análogas às Eqs. (12) e (13) para problemas multidimensionais correspondem a uma distribuição de temperatura dada na fronteira ou a uma fronteira isolada. Analogamente, a distribuição inicial de temperatura será, em geral, uma função de x e de y para a Eq. (23) e uma função de x, y e z para a Eq. (24).

APÊNDICE B

Dedução da Equação de Onda. Neste apêndice vamos deduzir a equação de onda em uma dimensão espacial que descreve vibrações transversas de uma corda ou um cabo elástico; a corda elástica pode ser uma corda de violino, um esteio ou, possivelmente, um cabo de força. A mesma equação, no entanto, com as variáveis interpretadas adequadamente, ocorre em muitos outros problemas ondulatórios com apenas uma variável espacial significativa.

Considere uma corda perfeitamente elástica flexível bem esticada entre suportes fixos no mesmo nível horizontal (veja a Figura 10.B.1*a*). Suponha que a corda está no eixo dos x com suas extremidades em $x = 0$ e $x = L$. Se a corda for colocada em movimento em algum instante inicial $t = 0$ (sendo puxada, por exemplo) e depois é deixada sem ser perturbada, ela vibrará livremente em um plano vertical, desde que efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, sejam desprezados. Para determinar a equação diferencial que governa esse movimento vamos considerar as forças que agem em um pequeno trecho de comprimento Δx da corda, entre os pontos x e $x + \Delta x$ (veja a Figura 10.B.1*b*). Vamos supor que o movimento da corda é pequeno e, como consequência, cada ponto na corda só se move em uma reta vertical. Vamos denotar por $u(x, t)$ o deslocamento vertical no ponto x e instante t. Vamos denotar por $T(x, t)$ a tensão na corda, que sempre age na direção tangente, e por ρ a massa da corda por unidade de comprimento.

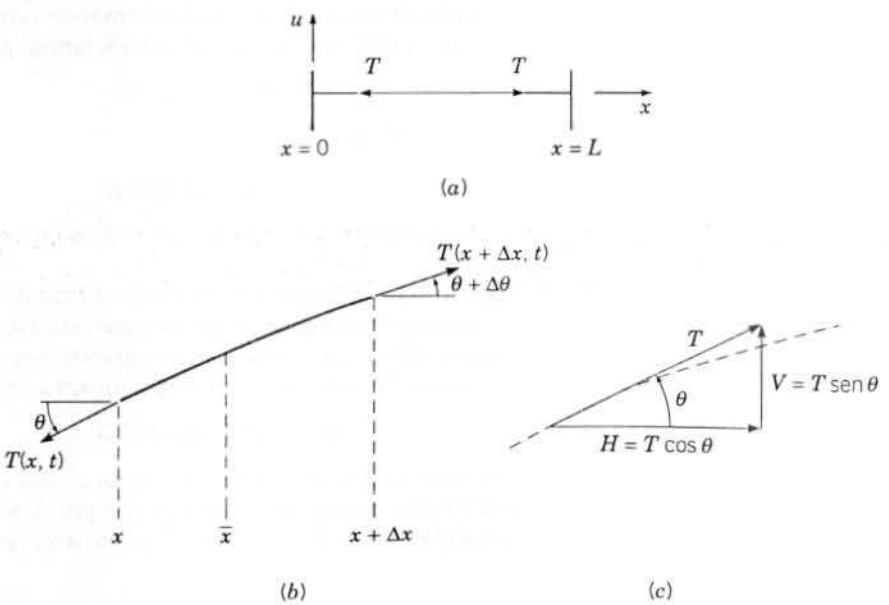


FIGURA 10.B.1 (a) Uma corda elástica sob tensão. (b) Um trecho da corda deslocada. (c) Resolução da tensão T em componentes.

A lei de Newton, aplicada ao elemento Δx da corda, diz que a força externa total, devido à tensão nas extremidades do elemento, tem que ser igual ao produto da massa do trecho pela aceleração de seu centro de massa. Como não há aceleração horizontal, as componentes horizontais têm que satisfazer

$$T(x + \Delta x, t)\cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\cos\theta = 0. \tag{1}$$

Denotando a componente horizontal da tensão (veja a Figura 10.B.1*c*) por H, a Eq. (1) diz que H é independente de x.

Por outro lado, as componentes verticais satisfazem

$$T(x + \Delta x, t)\,\mathrm{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho\,\Delta x\,u_{tt}(\bar{x}, t) \tag{2}$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada do centro de massa do trecho da corda em consideração. É claro que $\bar{x}$ está no intervalo $x < \bar{x} < x + \Delta x$. O peso da corda, que age verticalmente para baixo, é considerado desprezível e foi desprezado na Eq. (2).

Se a componente vertical de T for denotada por V, então a Eq. (2) pode ser escrita como

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t).$$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$ nos dá

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \tag{3}$$

Para expressar a Eq. (3) somente em função de u, note que

$$V(x, t) = H(t)\tan\theta = H(t)u_x(x, t).$$

Logo, a Eq. (3) fica

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt},$$

ou, como H é independente de x,

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}. \tag{4}$$

Para movimentos pequenos da corda, podemos substituir $H = T\cos\theta$ por T. Então a Eq. (4) fica com sua forma habitual,

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \tag{5}$$

onde

$$a^2 = T/\rho. \tag{6}$$

Vamos supor, ainda, que a^2 é constante, embora isso não seja necessário na nossa dedução, mesmo para movimentos pequenos. A Eq. (5) é chamada equação de onda em uma dimensão espacial. Como T tem unidades de força e ρ de massa/comprimento, a constante a tem unidades de velocidade. É possível identificar a como a velocidade segundo a qual uma pequena perturbação (onda) se move ao longo da corda. De acordo com a Eq. (6), a velocidade da onda a varia diretamente com a tensão na corda, mas é inversamente proporcional à densidade do material de que é feita a corda. Esses fatos estão de acordo com a experiência.

Como no caso da equação de calor, existem diversas generalizações da equação de onda (5). Uma equação importante, conhecida como a **equação do telégrafo**, tem a forma

$$v_{tt} + cv_t + kv = a^2 v_{xx} + F(x, t), \tag{7}$$

onde v e k são constantes não negativas. Os termos cv, kv e $F(x, t)$ correspondem, respectivamente, a uma força amortecedora viscosa, uma força restauradora elástica e a uma força externa. Observe a semelhança da Eq. (7), exceto pelo termo $a^2 v_{xx}$, com a equação para o sistema mola-massa deduzida na Seção 3.7; o termo adicional $a^2 v_{xx}$ aparece devido a forças elásticas internas.

A equação do telégrafo também governa o fluxo de tensão, ou corrente, em uma linha de transmissão (daí seu nome); neste caso os coeficientes estão relacionados a parâmetros elétricos na linha.

Para um sistema em vibração com mais de uma coordenada espacial significativa, pode ser necessário considerar a equação de onda em duas dimensões,

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \tag{8}$$

ou em três dimensões,

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{9}$$

REFERÊNCIAS

Os livros a seguir contêm informações adicionais sobre séries de Fourier:

Buck, R. C., and Buck, E. F., *Advanced Calculus* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1978).

Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals* (3rd ed.) (Cambridge: Cambridge University Press, 1930; New York: Dover, 1952).

Courant, R., and John, F., *Introduction to Calculus and Analysis* (New York: Wiley-Interscience, 1965; reprinted by Springer-Verlag, New York, 1989).

Kaplan, W., *Advanced Calculus* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2003).

Uma rápida biografia de Fourier e uma cópia anotada de seu artigo de 1807 estão contidas em

Grattan-Guinness, I., *Joseph Fourier 1768–1830* (Cambridge, MA: MIT Press, 1973).

Entre as referências úteis sobre equações diferenciais parciais e o método de separação de variáveis, estão incluídos:

Churchill, R. V., and Brown, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems* (6th ed.) (New York: McGraw-Hill, 2000).

Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations* (3rd ed.) (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1998).

Pinsky, M. A., *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications* (3rd ed.) (Boston: WCB/McGraw-Hill, 1998).

Powers, D. L., *Boundary Value Problems* (4th ed.) (San Diego: Academic Press, 1999).

Strauss, W. A., *Partial Differential Equations, an Introduction* (New York: Wiley, 1992).

Weinberger, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Wiley, 1965; New York: Dover, 1995).

CAPÍTULO

11

Problemas de Valores de Contorno e Teoria de Sturm–Liouville

Depois de separar as variáveis em uma equação diferencial parcial no Capítulo 10, encontramos diversas vezes a equação diferencial

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad 0 < x < L$$

com as condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

Este problema de valores de contorno é o protótipo de uma classe grande de problemas importantes em matemática aplicada. Esses problemas são conhecidos como problemas de valores de contorno de Sturm–Liouville. Neste capítulo, vamos discutir as propriedades mais importantes dos problemas de Sturm–Liouville e suas soluções; no processo, seremos capazes de generalizar um pouco o método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais.

11.1 A Ocorrência de Problema de Valores de Contorno em Fronteiras com Dois Pontos

No Capítulo 10, descrevemos o método de separação de variáveis como um modo de resolver alguns problemas envolvendo equações diferenciais parciais. O problema de condução de calor, consistindo na equação diferencial parcial

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

sujeita às condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2}$$

e à condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L \tag{3}$$

é um exemplo típico dos problemas considerados aqui. Uma parte crucial no processo de resolução de tais problemas é encontrar os autovalores e autofunções da equação diferencial

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad 0 < x < L \tag{4}$$

com condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0 \tag{5}$$

ou, talvez,

$$X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0. \tag{6}$$

As funções seno e cosseno que aparecem ao se resolver a Eq. (4) sujeita às condições de contorno (5) ou (6) são usadas para se expandir a distribuição inicial de temperatura $f(x)$ em uma série de Fourier.

Neste capítulo vamos estender e generalizar os resultados do Capítulo 10. Nosso objetivo principal é mostrar como o método de separação de variáveis pode ser usado para resolver problemas um pouco mais gerais do que os das Eqs. (1), (2) e (3). Estamos interessados em três tipos de generalizações.

Primeiro, queremos considerar equações diferenciais parciais mais gerais — por exemplo, a equação

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t). \tag{7}$$

Esta equação pode aparecer, como indicado no Apêndice A do Capítulo 10, no estudo da condução de calor em uma barra com propriedades variáveis na presença de fontes de calor. Se p e r forem constantes e se os termos da fonte $q(x)u$ e F forem nulos, então a Eq. (7) se reduz à Eq. (1). A equação diferencial parcial (7) também ocorre na investigação de outros fenômenos de caráter difusivo.

Uma segunda generalização é permitir condições de contorno mais gerais. Em particular, queremos considerar condições de contorno da forma

$$u_x(0,t) - h_1u(0,t) = 0. \qquad u_x(L,t) + h_2u(L,t) = 0. \tag{8}$$

Tais condições ocorrem quando a taxa de fluxo de calor através de uma extremidade da barra é proporcional à temperatura aí. Em geral, h_1 e h_2 são constantes não negativas mas, em alguns casos, podem ser negativas ou depender de t. As condições de contorno (2) são obtidas no limite quando $h_1 \to \infty$ e $h_2 \to \infty$. Outro caso limite importante, $h_1 = h_2 = 0$, nos dá condições de contorno correspondentes a extremidades isoladas.

A última generalização que discutiremos neste capítulo trata da geometria da região na qual o problema é dado. Os resultados do Capítulo 10 só são aplicáveis a uma classe relativamente restrita de problemas, basicamente aqueles nos quais a região de interesse é retangular ou, em alguns casos, circular. Mais adiante, neste capítulo, vamos considerar determinados problemas colocados em alguns outros tipos de regiões geométricas.

Vamos considerar a equação

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u \tag{9}$$

obtida igualando-se a zero o termo $F(x,t)$ na Eq. (7). Para separar as variáveis, vamos supor que

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{10}$$

e substituir u na Eq. (9). Obtemos

$$r(x)XT' = [p(x)X']'T - q(x)XT \tag{11}$$

ou, dividindo por $r(x)XT$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{[p(x)X']'}{r(x)X} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda. \tag{12}$$

Denotamos a constante de separação por $-\lambda$, antecipando o fato de que ela será real e negativa em geral. Da Eq. (12) obtemos as duas equações diferenciais ordinárias a seguir para X e T:

$$[p(x)X']' - q(x)X + \lambda r(x)X = 0, \tag{13}$$

$$T' + \lambda T = 0. \tag{14}$$

Substituindo u dado pela Eq. (10) nas Eqs. (8) e supondo que h_1 e h_2 são constantes, obtemos as condições de contorno

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(L) + h_2X(L) = 0. \tag{15}$$

Para prosseguir, precisamos resolver a Eq. (13) sujeita às condições de contorno (15). Embora este seja um problema de valores de contorno linear homogêneo com fronteira com dois pontos mais geral do que o que consiste na equação diferencial (4) e condições de contorno (5) ou (6), as soluções se comportam de maneira bem parecida. Para qualquer valor de λ, o problema (13), (15) tem a solução trivial $X(x) = 0$. Para determinados valores de λ, chamados de **autovalores**, existem outras soluções não triviais, chamadas de **autofunções**. Estas autofunções formam a base para soluções em série de diversos problemas em equações diferenciais parciais, tais como a equação de calor generalizada (9) sujeita às condições de contorno (8) e à condição inicial (3).

Neste capítulo vamos discutir algumas das propriedades de soluções de problemas de valores de contorno com fronteiras de dois pontos para equações diferenciais lineares de segunda ordem. Consideraremos algumas vezes a equação homogênea linear geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{16}$$

estudada no Capítulo 3. No entanto, em geral é melhor discutir equações nas quais os termos envolvendo a primeira e a segunda derivada estão relacionados como na Eq. (13). Sempre é possível transformar a equação geral (16) de modo que os termos contendo as derivadas apareçam como na Eq. (13) (veja o Problema 11).

Problemas de valores de contorno com equações diferenciais de ordem mais alta também podem ocorrer; neles, o número de condições de contorno tem que ser igual à ordem da equação diferencial. Como regra geral, a ordem da equação diferencial é par e metade das condições de contorno é dada em cada extremidade do intervalo. Também é possível uma única condição de contorno envolver valores da solução e/ou de suas derivadas nos dois pontos de fronteira; por exemplo,

$$y(0) - y(L) = 0. \tag{17}$$

O exemplo a seguir envolve uma condição de contorno da forma (15) e é, portanto, mais complicado que os problemas na Seção 10.1.

EXEMPLO 1

Encontre os autovalores e as autofunções correspondentes do problema de valores de contorno

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{18}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(1) + y(1) = 0. \tag{19}$$

Um exemplo de onde ocorre esse problema é a condução de calor em uma barra de comprimento unitário. A condição de contorno em $x = 0$ corresponde à temperatura nula aí. A condição de contorno em $x = 1$ corresponde à taxa de fluxo de calor ser proporcional à temperatura nesse ponto, e as unidades foram escolhidas de modo que a constante de proporcionalidade seja 1 (veja o Apêndice A do Capítulo 10).

A solução da equação diferencial pode ter diversas formas, dependendo de λ, de modo que é preciso considerar diversos casos. Primeiro, se $\lambda = 0$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 x + c_2. \tag{20}$$

As duas condições de contorno implicam

$$c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 = 0, \tag{21}$$

respectivamente. A única solução das Eqs. (21) é $c_1 = c_2 = 0$, de modo que o problema de valores de contorno original não tem solução não trivial nesse caso. Logo, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Se $\lambda > 0$, então a solução geral da equação diferencial (18) é

$$y = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \cos \sqrt{\lambda}\, x, \tag{22}$$

onde $\sqrt{\lambda} > 0$. A condição de contorno em $x = 0$ implica que $c_2 = 0$; da condição de contorno em $x = 1$, obtemos a equação

$$c_1(\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}) = 0.$$

Para uma solução não trivial y, precisamos ter $c_1 \neq 0$, logo λ tem que satisfazer

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0. \tag{23}$$

Note que se λ é tal que $\cos\sqrt{\lambda} = 0$, então $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \neq 0$ e a Eq. (23) não é satisfeita. Logo, podemos supor que $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$; dividindo a Eq. (23) por $\cos\sqrt{\lambda}$, obtemos

$$\sqrt{\lambda} = -\tan \sqrt{\lambda}. \tag{24}$$

As soluções da Eq. (24) podem ser determinadas numericamente. Elas também podem ser encontradas, aproximadamente, esboçando-se os gráficos de $f(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$ e de $g(\sqrt{\lambda}) = -\tan\sqrt{\lambda}$ para $\sqrt{\lambda} > 0$ no mesmo conjunto de eixos e identificando-se os pontos de interseção das duas curvas (veja a Figura 11.1.1). O ponto $\sqrt{\lambda} = 0$ está especificamente excluído deste argumento porque a solução (22) só é válida para $\sqrt{\lambda} \neq 0$. Apesar do fato de que as curvas se intersectam aí, $\lambda = 0$ não é um autovalor, como já vimos antes. As três primeiras soluções positivas da Eq. (24) são $\sqrt{\lambda_1} \cong 2{,}029$; $\sqrt{\lambda_2} \cong 4{,}913$; $\sqrt{\lambda_3} \cong 7{,}979$. Como pode ser visto da Figura 11.1.1, as outras raízes são dadas, com precisão razoável, por $\sqrt{\lambda_n} \cong (2n - 1)\pi/2$ para $n = 4, 5, \ldots$, e a precisão desta estimativa melhora quando n aumenta. Portanto, os autovalores são

$$\lambda_1 \cong 4{,}116, \qquad \lambda_2 \cong 24{,}14,$$
$$\lambda_3 \cong 63{,}66, \qquad \lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4 \quad \text{para } n = 4, 5, \ldots. \tag{25}$$

Finalmente, como $c_2 = 0$, a autofunção correspondente ao autovalor λ é

$$\phi_n(x, \lambda_n) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x; \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

onde a constante k_n permanece arbitrária.

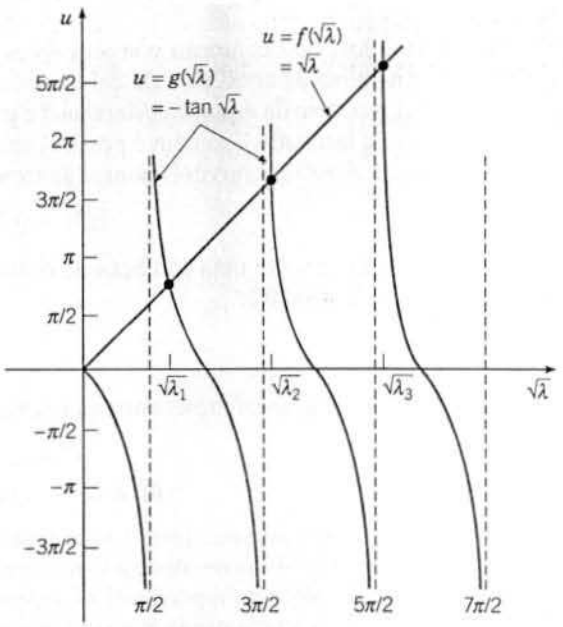


FIGURA 11.1.1 Solução gráfica de $\sqrt{\lambda} = -\tan\sqrt{\lambda}$.

Vamos considerar agora $\lambda < 0$. Neste caso é conveniente fazer $\lambda = -\mu$, onde $\mu > 0$. Então a Eq. (14) fica

$$y'' - \mu y = 0, \tag{27}$$

e sua solução geral é

$$y = c_1 \operatorname{senh} \sqrt{\mu}\, x + c_2 \cosh \sqrt{\mu}\, x, \tag{28}$$

onde $\sqrt{\mu} > 0$. Procedendo como no caso anterior, vemos que μ tem que satisfazer a equação

$$\sqrt{\mu} = -\tanh \sqrt{\mu}. \tag{29}$$

Da Figura 11.1.2 é claro que os gráficos de $f(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ e de $g(\sqrt{\mu}) = -\tanh\sqrt{\mu}$ só se intersectam na origem. Logo, não existem valores positivos de $\sqrt{\mu}$ que satisfazem a Eq. (29) e, portanto, o problema de valores de contorno (18), (19) não tem autovalores negativos.

Finalmente, é necessário considerar a possibilidade de que λ possa ser complexo. É possível mostrar, através de um cálculo direto, que o problema (18), (19) não tem autovalores complexos. No entanto, na Seção 11.2 vamos considerar em mais detalhes uma grande classe de problemas que incluem este exemplo. Uma das coisas que vamos mostrar é que todos os problemas nesta classe têm apenas autovalores reais. Portanto, vamos omitir a discussão da não existência de autovalores complexos aqui. Concluímos, então, que todos os autovalores e autofunções do problema (18), (19) são dados pelas Eqs. (25) e (26).

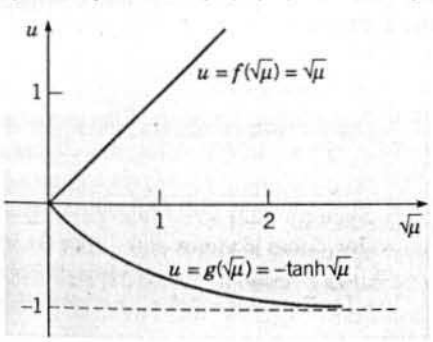


FIGURA 11.1.2 Solução gráfica de $\sqrt{\mu} = -\tanh\sqrt{\mu}$.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 6, diga se o problema de valores de contorno dado é homogêneo ou não homogêneo.

1. $y'' + 4y = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $[(1 + x^2)y']' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
4. $-y'' + x^2y = \lambda y, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$
5. $-[(1 + x^2)y']' = \lambda y + 1, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
6. $-y'' = \lambda(1 + x^2)y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + 3y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas de 7 a 10, suponha que todos os autovalores são reais.

(a) Determine a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores não nulos.

(b) Determine se $\lambda = 0$ é um autovalor.

(c) Encontre valores aproximados para λ_1 e λ_2, os dois autovalores não nulos de menor módulo.

(d) Estime λ_n para valores de n grandes.

7. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$
8. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
9. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
10. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. Considere a equação geral linear homogênea de segunda ordem

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \tag{i}$$

Procuramos um fator integrante $\mu(x)$ tal que, ao se multiplicar a Eq. (i) por $\mu(x)$, a equação resultante pode ser escrita na forma

$$[\mu(x)P(x)y']' + \mu(x)R(x)y = 0. \tag{ii}$$

(a) Igualando os coeficientes de y' nas Eqs. (i) e (ii), mostre que μ tem que ser uma solução de

$$P\mu' = (Q - P')\mu. \tag{iii}$$

(b) Resolva a Eq. (iii), mostrando, assim, que

$$\mu(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{P(s)}\, ds. \tag{iv}$$

Compare esse resultado com o do Problema 41 da Seção 3.2.

Em cada um dos Problemas de 12 a 15, use o método do Problema 11 para colocar a equação dada na forma $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

12. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$ equação de Hermite
13. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ equação de Bessel
14. $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0,$ equação de Laguerre
15. $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$ equação de Chebyshev
16. A equação

$$v_{tt} + cv_t + kv = a^2 v_{xx} + F(x,t), \tag{i}$$

onde $a^2 > 0, c \geq 0$ e $k \geq 0$ são constantes, é conhecida como a **equação do telégrafo**. Ela aparece no estudo de uma corda elástica sob tensão (veja o Apêndice B do Capítulo 10). A Eq. (i) também ocorre em outras aplicações. Supondo que $F(x,t) = 0$, seja $v(x,t) = X(x)T(t)$, separe as variáveis na Eq. (i) e deduza equações diferenciais ordinárias para X e T.

17. Considere o problema de valores de contorno

$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

(a) Defina uma nova variável dependente u pela relação $y = s(x)u$. Determine $s(x)$ de modo que a equação diferencial para u não tenha termo em u'.

(b) Resolva o problema de valores de contorno para u e determine, assim, os autovalores e autofunções do problema original. Suponha que todos os autovalores são reais.

(c) Resolva também o problema diretamente (sem definir u).

18. Considere o problema de valores de contorno

$$y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$$

(a) Determine, pelo menos aproximadamente, os autovalores reais e as autofunções associadas procedendo como no Problema 17(a, b).

(b) Resolva também o problema dado diretamente (sem introduzir uma variável nova).

Sugestão: no item (a), preste atenção tanto às condições de contorno quanto à equação diferencial.

As equações diferenciais nos Problemas 19 e 20 diferem das encontradas nos problemas antecedentes, uma vez que o parâmetro λ multiplica o termo contendo y', além do que contém y. Em cada um desses problemas, determine os autovalores reais e as autofunções associadas.

19. $y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

20. $x^2y'' - \lambda(xy' - y) = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y(2) - y'(2) = 0$

21. Considere o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 2y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

(a) Encontre a equação satisfeita pelos autovalores positivos.

(b) Mostre que existe uma sequência infinita de tais autovalores.

(c) Encontre λ_1 e λ_2. Depois mostre que $\lambda_n \cong [(2n + 1)\pi/2]^2$ para n grande.

(d) Encontre a equação satisfeita pelos autovalores negativos.

(e) Mostre que existe exatamente um autovalor negativo e encontre seu valor.

22. Considere o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad \alpha y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

onde α é uma constante dada.

(a) Mostre que para todos os valores de α existe uma sequência infinita de autovalores positivos.

(b) Se $\alpha < 1$, mostre que todos os autovalores (reais) são positivos. Mostre que o menor autovalor tende a zero quando α tende a 1 por valores mais baixos.

(c) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor se e somente se $\alpha = 1$.

(d) Se $\alpha > 1$, mostre que existe exatamente um autovalor negativo e que este autovalor diminui quando α aumenta.

23. Considere o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$$

Mostre que, se ϕ_m e ϕ_n são autofunções associadas aos autovalores λ_m e λ_n, respetivamente, com $\lambda_m \neq \lambda_n$, então

$$\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0.$$

Sugestão: note que

$$\phi_m'' + \lambda_m\phi_m = 0, \qquad \phi_n'' + \lambda_n\phi_n = 0.$$

Multiplique a primeira dessas equações por ϕ_n, a segunda por ϕ_m e integre de 0 a L usando integração por partes. Finalmente, subtraia uma equação da outra.

24. Vamos considerar agora um problema de autovalores de ordem mais alta. No estudo das vibrações transversas de uma barra elástica uniforme, chega-se à equação diferencial

$$y^{(4)} - \lambda y = 0,$$

onde y é o deslocamento transversal e $\lambda = m\omega^2/EI$; m é a massa por unidade de comprimento da barra, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo perpendicular ao plano de vibração que contém o centroide e ω é a frequência de vibração. Então, para uma barra cujas propriedades materiais e geométricas são dadas, os autovalores determinam as frequências naturais de vibração. As condições de contorno em cada extremidade são, em geral, de um dos seguintes tipos:

$y = y' = 0$, extremidade presa,

$y = y'' = 0$, extremidade apoiada ou com dobradiça,

$y'' = y''' = 0$, extremidade livre.

Para cada um dos três casos, encontre a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores desse problema de valores de contorno de quarta ordem. Determine λ_1 e λ_2, os dois autovalores de menor módulo. Suponha que os autovalores são reais e positivos.

(a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$

(b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y'(L) = 0$

(c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(L) = y'''(L) = 0$ (viga cantiléver)

25. Este problema ilustra o fato de que o autovalor pode aparecer tanto nas condições de contorno quanto na equação diferencial. Considere as vibrações longitudinais de uma barra elástica reta uniforme de comprimento L. Pode-se mostrar que o deslocamento axial $u(x, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$(E/\rho)u_{xx} = u_{tt}; \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{i}$$

onde E é o módulo de Young e ρ é a massa por unidade de volume. Se a extremidade em $x = 0$ estiver fixa, então a condição de contorno aí será

$$u(0, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{ii}$$

Suponha que a extremidade em $x = L$ está rigidamente presa a uma massa m, mas não tem outras restrições. Podemos obter a condição de contorno aí escrevendo a lei de Newton para a massa. Da teoria de elasticidade, pode-se mostrar que a força exercida na barra pela massa é dada por $-EAu_x(L, t)$. Logo, a condição de contorno é

$$EAu_x(L, t) + mu_{tt}(L, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{iii}$$

(a) Suponha que $u(x, t) = X(x)T(t)$. Mostre que $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem as equações diferenciais

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{iv}$$

$$T''' + \lambda(E/\rho)T = 0. \tag{v}$$

(b) Mostre que as condições de contorno são

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) - \gamma\lambda LX(L) = 0, \tag{vi}$$

onde $\gamma = m/\rho AL$ é um parâmetro adimensional que fornece a razão entre a massa presa e a massa da barra.

Sugestão: use a equação diferencial para $T(t)$ para simplificar a condição de contorno em $x = L$.

(c) Determine a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores reais das equações (iv) e (vi).

(d) Encontre os dois primeiros autovalores λ_1 e λ_2 se $\gamma = 0{,}5$.

11.2 Problemas de Valores de Contorno de Sturm–Liouville

Vamos considerar agora problemas de valores de contorno com fronteiras de dois pontos, do tipo obtido na Seção 11.1, separando as variáveis em um problema de condução de calor em uma barra com propriedades materiais variáveis e um termo de fonte proporcional à temperatura. Este tipo de problema ocorre em muitas outras aplicações.

Esses problemas de valores de contorno estão associados, em geral, aos nomes de Sturm e Liouville.[1] Eles consistem em uma equação diferencial da forma

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{1}$$

no intervalo $0 < x < 1$, junto com condições de contorno

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \tag{2}$$

[1]Charles-François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882), em uma série de artigos entre 1836 e 1837, estabeleceram diversas propriedades da classe de problemas de valores de contorno associados a seus nomes, inclusive os resultados enunciados nos Teoremas de 11.2.1 a 11.2.4. Sturm também é famoso por um teorema sobre o número de zeros reais de um polinômio e, além disso, tem muitos trabalhos em física e mecânica. Além de sua pesquisa em análise, álgebra e teoria dos números, Liouville foi o fundador e editor durante 39 anos do importante *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Um de seus resultados mais importantes foi a demonstração (em 1844) da existência de números transcendentais.

nas extremidades. Muitas vezes é conveniente introduzir o operador diferencial linear homogêneo L definido por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y. \tag{3}$$

Então, a equação diferencial (1) pode ser escrita como

$$L[y] = \lambda r(x)y. \tag{4}$$

Vamos supor que as funções p, p', q e r são contínuas no intervalo $0 \le x \le 1$ e que, além disso, $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todos os pontos $0 \le x \le 1$. Estas hipóteses são necessárias para tornar a teoria o mais simples possível e manter, ao mesmo tempo, uma generalidade razoável. Estas condições são satisfeitas, de fato, em muitos problemas importantes da física matemática. Por exemplo, a equação $y'' + \lambda y = 0$, que aparece repetidamente no capítulo anterior, é da forma (1) com $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$. As condições de contorno (2) são **separadas**, ou seja, cada uma envolve apenas um dos pontos de fronteira. Essas são as condições de contorno separadas mais gerais possíveis para uma equação diferencial de segunda ordem.

Antes de estabelecer algumas propriedades do problema de Sturm–Liouville (1), (2), precisamos obter uma identidade, conhecida como **identidade de Lagrange**, básica no estudo de problemas de valores de contorno lineares. Suponha que u e v são funções com derivadas segundas contínuas no intervalo $0 \le x \le 1$. Então,[2]

$$\int_0^1 L[u]v\,dx = \int_0^1 [-(pu')'v + quv]\,dx.$$

Integrando a integral à direita do sinal de igualdade duas vezes por partes, obtemos

$$\int_0^1 L[u]v\,dx = -p(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 + p(x)u(x)v'(x)\Big|_0^1 + \int_0^1 [-u(pv')' + uqv]\,dx$$

$$= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 + \int_0^1 uL[v]\,dx.$$

Logo, passando para o lado esquerdo do sinal da igualdade a integral à direita, temos

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = -p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_0^1, \tag{5}$$

que é a identidade de Lagrange.

Vamos supor, agora, que as funções u e v na Eq. (5) satisfazem, também, as condições de contorno (2). Então, supondo que $\alpha_2 \neq 0$ e que $\beta_2 \neq 0$, a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) fica

$$-p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_0^1$$

$$= -p(1)\left[u'(1)v(1) - u(1)v'(1)\right] + p(0)\left[u'(0)v(0) - u(0)v'(0)\right]$$

$$= -p(1)\left[-\frac{\beta_1}{\beta_2}u(1)v(1) + \frac{\beta_1}{\beta_2}u(1)v(1)\right] + p(0)\left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(0)v(0) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}u(0)v(0)\right]$$

$$= 0.$$

O mesmo resultado vale se α_2 ou β_2 for nulo; a demonstração neste caso é ainda mais simples e fica a cargo do leitor. Assim, se o operador diferencial L for definido pela Eq. (3) e se as funções u e v satisfizerem as condições de contorno (2), a identidade de Lagrange se reduzirá a

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = 0. \tag{6}$$

Vamos escrever a Eq. (6) de maneira ligeiramente diferente. Definimos, na Eq. (4) da Seção 10.2, o produto interno (u, v) de duas funções reais u e v em um intervalo dado; usando o intervalo $0 \le x \le 1$, temos

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx. \tag{7}$$

Com esta notação, a Eq. (6) fica

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = 0. \tag{8}$$

[2]Para simplificar, algumas vezes vamos usar a notação $\int_0^1 f\,dx$, em vez de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Para provar o Teorema 11.2.1, mais à frente vamos precisar trabalhar com funções complexas. Por analogia com a definição na Seção 7.2 para vetores, definimos o produto interno de duas funções complexas em $0 \le x \le 1$ como

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\overline{v}(x)\,dx, \tag{9}$$

onde $\overline{v}$ é o complexo conjugado de v. É claro que a Eq. (9) fica igual à Eq. (7) se $u(x)$ e $v(x)$ forem reais. É importante saber que a Eq. (8) permanece válida sob as condições enunciadas se u e v forem funções complexas e o produto interno (9) for usado. Para ver isso, podemos começar com a quantidade $\int_0^1 L[u]\overline{v}\,dx$ e seguir os passos que levam à Eq. (6) usando o fato de que $p(x), q(x), \alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são todos reais (veja o Problema 22).

Vamos considerar algumas das implicações da Eq. (8) para o problema de Sturm–Liouville (1), (2). Vamos supor, sem demonstração,[3] que este problema tem, de fato, autovalores e autofunções. Nos Teoremas de 11.2.1 a 11.2.4, a seguir, enunciamos diversas de suas propriedades importantes, embora relativamente elementares. Cada uma dessas propriedades é ilustrada para o problema de Sturm–Liouville básico

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \tag{10}$$

cujos autovalores são $\lambda_n = n^2\pi^2$, com autofunções associadas $\phi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$.

Teorema 11.2.1 Todos os autovalores do problema de Sturm–Liouville (1), (2) são reais.

Para provar este teorema, vamos supor que λ é um autovalor (possivelmente complexo) do problema (1), (2) e que ϕ é uma autofunção associada, também possivelmente complexa. Vamos escrever $\lambda = \mu + iv$ e $\phi(x) = U(x) + iV(x)$, onde $\mu, v, U(x)$ e $V(x)$ são reais. Então, fazendo $u = \phi$ e $v = \phi$ na Eq. (8), temos

$$(L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi]). \tag{11}$$

Sabemos, no entanto, que $L[\phi] = \lambda r\phi$, de modo que a Eq. (11) fica

$$(\lambda r\phi, \phi) = (\phi, \lambda r\phi). \tag{12}$$

Usando a definição (9) do produto interno para escrever a Eq. (12) por extenso, obtemos

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\overline{\phi}(x)\,dx = \int_0^1 \phi(x)\overline{\lambda}\overline{r}(x)\overline{\phi}(x)\,dx. \tag{13}$$

Como $r(x)$ é real, a Eq. (13) se reduz a

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 r(x)\phi(x)\overline{\phi}(x)\,dx = 0,$$

ou

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \int_0^1 r(x)[U^2(x) + V^2(x)]\,dx = 0. \tag{14}$$

O integrando na Eq. (14) não é negativo nem identicamente nulo. Como o integrando é contínuo, segue que a integral é positiva. Portanto, o fator $\lambda - \overline{\lambda} = 2iv$ tem que ser nulo. Logo, $v = 0$ e λ é real, o que prova o teorema.

Uma consequência importante do Teorema 11.2.1 é que, para se encontrar autovalores e autofunções de um problema de valores de contorno de Sturm–Liouville basta procurar autovalores reais. Lembre-se de que foi isso que fizemos no Capítulo 10. Também é possível mostrar que as autofunções do problema de valores de contorno (1), (2) são reais. Uma demonstração está esboçada no Problema 23.

Teorema 11.2.2 Se ϕ_1 e ϕ_2 são duas autofunções do problema de Sturm–Liouville (1), (2) associadas aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, e se $\lambda_1 \ne \lambda_2$, então

$$\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

[3] A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, nos livros de Sagan (Capítulo 5) ou Birkhoff e Rota (Capítulo 10).

Este teorema expressa a propriedade de **ortogonalidade** das autofunções em relação à função peso r. Para provar o teorema, observamos que ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem as equações diferenciais

$$L[\phi_1] = \lambda_1 r\phi_1 \tag{16}$$

e

$$L[\phi_2] = \lambda_2 r\phi_2, \tag{17}$$

respectivamente. Fazendo $u = \phi_1$, $v = \phi_2$ e substituindo $L[u]$ e $L[v]$ na Eq. (8), obtemos

$$(\lambda_1 r\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \lambda_2 r\phi_2) = 0,$$

ou, usando a Eq. (9),

$$\lambda_1 \int_0^1 r(x)\phi_1(x)\overline{\phi}_2(x)\,dx - \overline{\lambda}_2 \int_0^1 \phi_1(x)\overline{r}(x)\overline{\phi}_2(x)\,dx = 0.$$

Como λ_2, $r(x)$ e $\phi_2(x)$ são reais, esta equação fica

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \tag{18}$$

Mas, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, logo ϕ_1 e ϕ_2 têm que satisfazer a Eq. (15), e o teorema está demonstrado.

Teorema 11.2.3 Os autovalores do problema de Sturm–Liouville (1), (2) são todos simples, ou seja, cada autovalor está associado a somente uma autofunção linearmente independente. Os autovalores formam uma sequência infinita e podem ser colocados em ordem crescente, de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

Além disso, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

A demonstração deste teorema é um pouco mais avançada do que a dos dois teoremas antecedentes, e será omitida. No entanto, a demonstração de que os autovalores são simples está indicada no Problema 20.

Observamos novamente que todas as propriedades enunciadas nos Teoremas de 11.2.1 a 11.2.3 são exemplificadas pelos autovalores $\lambda_n = n^2\pi^2$ e autofunções $\phi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ do problema exemplo (10). É claro que os autovalores são reais. As autofunções satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi x\,dx = 0, \qquad m \neq n, \tag{19}$$

estabelecidas na Seção 10.2 por integração direta. Além disso, os autovalores podem ser ordenados de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ e $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Finalmente, cada autovalor está associado a uma única autofunção linearmente independente.

Vamos supor que os autovalores do problema de Sturm–Liouville (1), (2) estão ordenados como indicado no Teorema 11.2.3. Existe uma autofunção ϕ_n associada a cada autovalor λ_n, determinada a menos de uma constante multiplicativa. É conveniente, muitas vezes, escolher a constante arbitrária que multiplica cada autofunção de modo a satisfazer a condição

$$\int_0^1 r(x)\phi_n^2(x)\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

A Eq. (20) é uma condição de normalização, e as autofunções que satisfazem essa condição são ditas **normalizadas**. De fato, neste caso elas formam um **conjunto ortonormal** (em relação à função peso r), pois satisfazem, também, a relação de ortogonalidade (15). Algumas vezes é útil combinar as Eqs. (15) e (20) em uma única equação. Para isso, definimos o símbolo δ_{mn}, conhecido como a função delta de Kronecker,[4] por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 1, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{21}$$

Usando a delta de Kronecker, podemos escrever as Eqs. (15) e (20) como

$$\int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn}. \tag{22}$$

[4]Leopold Kronecker (1823-1891), um aluno de Dirichlet, esteve associado à Universidade de Berlim a maior parte de sua vida, embora (já que era independentemente rico) só tenha tido posição como professor a partir de 1883. Trabalhou em teoria dos números, funções elípticas, álgebra e suas inter-relações.

EXEMPLO 1 Determine as autofunções normalizadas do problema (10):

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Os autovalores deste problema são $\lambda_1 = \pi^2, \lambda_2 = 4\pi^2, \ldots, \lambda_n = n^2\pi^2, \ldots$ e as autofunções associadas são $k_1 \operatorname{sen} \pi x$, $k_2 \operatorname{sen} 2\pi x, \ldots, k_n \operatorname{sen} n\pi x, \ldots$, respectivamente. Nesse caso a função peso é $r(x) = 1$. Para satisfazer a Eq. (20), precisamos escolher k_n tal que

$$\int_0^1 (k_n \operatorname{sen} n\pi x)^2 \, dx = 1 \tag{23}$$

para cada valor de n. Como

$$k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x \, dx = k_n^2 \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2n\pi x\right) dx = \tfrac{1}{2}k_n^2,$$

a Eq. (23) é satisfeita se k_n for escolhido como sendo $\sqrt{2}$ para cada valor de n. Logo, as autofunções normalizadas do problema de valores de contorno dado são

$$\phi_n(x) = \sqrt{2} \operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

EXEMPLO 2 Determine as autofunções normalizadas do problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0. \tag{25}$$

No Exemplo 1 da Seção 11.1 vimos que os autovalores λ_n satisfazem a equação

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} = 0 \tag{26}$$

e que as autofunções associadas são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{27}$$

onde k_n é arbitrária. Podemos determinar k_n da condição de normalização (20). Como $r(x) = 1$ neste problema, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi_n^2(x) \, dx &= k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 \sqrt{\lambda_n}\, x \, dx \\
&= k_n^2 \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\sqrt{\lambda_n}\, x\right) dx = k_n^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}\, x}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= k_n^2 \frac{2\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}} = k_n^2 \frac{\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}} \\
&= k_n^2 \frac{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}}{2},
\end{aligned}$$

onde usamos a Eq. (26) no último passo. Logo, para normalizar as autofunções ϕ_n, precisamos escolher

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

As autofunções normalizadas do problema dado são

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x}{(1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})^{1/2}}; \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Vamos considerar agora o problema de expandir uma função f dada em uma série de autofunções do problema de Sturm–Liouville (1), (2). Já vimos exemplos de tais expansões nas Seções de 10.2 a 10.4. Por exemplo, mostramos que se f é contínua, tem derivada seccionalmente contínua em $0 \le x \le 1$ e satisfaz as condições de contorno $f(0) = f(1) = 0$, então f pode ser expandida em uma série de Fourier da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x. \tag{30}$$

As funções $\operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, são precisamente as autofunções do problema de valores de contorno (10). Os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx \tag{31}$$

e a série (30) converge para cada x em $0 \le x \le 1$. De maneira análoga, f pode ser expandida em uma série de Fourier em cossenos usando-se as autofunções $\cos n\pi x, n = 0, 1, 2, \ldots$, do problema de valores de contorno $y'' + \lambda y = 0, y'(0) = 0, y'(1) = 0$.

Suponha que uma função f dada, satisfazendo condições convenientes, pode ser expandida em uma série infinita de autofunções do problema de Sturm–Liouville mais geral (1), (2). Se isso puder ser feito, então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{32}$$

onde as funções $\phi_n(x)$ satisfazem as Eqs. (1) e (2) e, também, a condição de ortogonalidade (22). Para calcular os coeficientes na série (32), multiplicamos a Eq. (32) por $r(x)\phi_m(x)$, onde m é um inteiro positivo fixo, e integramos de $x = 0$ a $x = 1$. Supondo que a série pode ser integrada termo a termo, obtemos

$$\int_0^1 r(x)f(x)\phi_m(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn}. \tag{33}$$

Logo, usando a definição de δ_{mn}, temos

$$c_m = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_m(x)\,dx = (f, r\phi_m), \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{34}$$

Assim, os coeficientes na série (32) foram determinados formalmente. A Eq. (34) tem a mesma estrutura que as fórmulas de Euler–Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier, e a série em autofunções (32) também tem propriedades de convergência semelhantes às das séries de Fourier. O teorema a seguir é análogo ao Teorema 10.3.1.

Teorema 11.2.4 Sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas do problema de Sturm–Liouville (1), (2):

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0,$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0.$$

Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas em $0 \le x \le 1$. Então a série (32), com os coeficientes c_n dados pela Eq. (34), converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em cada ponto do intervalo aberto $0 < x < 1$.

Se f satisfizer outras condições além dessas, será possível estabelecer uma conclusão mais forte. Suponha que além das hipóteses do Teorema 11.2.4 a função f é contínua em $0 \le x \le 1$. Se $\alpha_2 = 0$ na primeira das Eqs. (2) [de modo que $\phi_n(0) = 0$], suponha que $f(0) = 0$. Analogamente, se $\beta_2 = 0$ na segunda das Eqs. (2), suponha que $f(1) = 0$. Caso contrário, não há necessidade de se supor nenhuma condição de contorno para f. Então, a série (32) converge para $f(x)$ em todos os pontos do intervalo fechado $0 \le x \le 1$.

EXEMPLO 3 Expanda a função

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{35}$$

em termos das autofunções normalizadas $\phi_n(x)$ do problema (25).

Vimos, no Exemplo 2, que as autofunções normalizadas são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{36}$$

onde k_n é dada pela Eq. (28) e λ_n satisfaz a Eq. (26). Para encontrar a expansão para f em termos das autofunções ϕ_n, escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{37}$$

onde os coeficientes são dados pela Eq. (34). Logo,

$$c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx = k_n \int_0^1 x \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, x\,dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$c_n = k_n \left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} \right) = k_n \frac{2\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n},$$

onde usamos a Eq. (26) na última passagem. Substituindo k_n dada pela Eq. (28), obtemos

$$c_n = \frac{2\sqrt{2}\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \tag{38}$$

Portanto,

$$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \tag{39}$$

Observe que embora a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (39) seja uma série em senos, não está incluída na discussão sobre séries de Fourier na Seção 10.4.

Problemas Autoadjuntos. Problemas de valores de contorno de Sturm–Liouville têm importância própria, mas podem ser vistos também como pertencentes a uma classe muito maior de problemas que têm muitas das mesmas propriedades. Por exemplo, existem muitas semelhanças entre problemas de Sturm–Liouville e o sistema algébrico

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{40}$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é real e simétrica ou autoadjunta. Comparando os resultados mencionados na Seção 7.3 com os desta seção, observamos que em ambos os casos os autovalores são reais e as autofunções ou autovetores formam um conjunto ortogonal. Além disso, as autofunções ou autovetores podem ser usados como uma base para se expressar uma função ou vetor essencialmente arbitrário, respectivamente, como uma soma. A diferença mais importante é que a matriz tem apenas um número finito de autovalores e autovetores, enquanto um problema de Sturm–Liouville tem uma infinidade. É interessante, e de importância fundamental em matemática, que esses problemas aparentemente diferentes — o problema matricial (40) e o problema de Sturm–Liouville (1), (2) — que aparecem de maneiras diferentes, são, de fato, parte de uma única teoria subjacente. Normalmente, referimo-nos a essa teoria como a teoria dos operadores lineares, e ela faz parte da área de análise funcional.

Vamos mostrar agora algumas generalizações para os problemas de Sturm–Liouville que ainda preservam os principais resultados dos Teoremas 11.2.1 a 11.2.4 — a existência de uma sequência de autovalores reais que tendem a infinito, a ortogonalidade das autofunções e a possibilidade de se expandir uma função arbitrária em uma série de autofunções. Estas generalizações dependem da validade da relação crucial (8).

Vamos considerar o problema de valores de contorno que consiste na equação diferencial

$$L[y] = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \tag{41}$$

onde

$$L[y] = P_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y, \tag{42}$$

e n condições de contorno lineares homogêneas nas extremidades do intervalo. Se a Eq. (8) for válida para um par de funções suficientemente diferenciáveis que satisfaçam as condições de contorno, então o problema dado é dito **autoadjunto**. É importante notar que a Eq. (8) envolve restrições tanto sobre a equação diferencial quanto sobre as condições de contorno. O operador diferencial L tem que ser tal que o mesmo operador apareça em ambos os termos da Eq. (8). Para isso, é preciso que L tenha ordem par. Além disso, um operador de segunda ordem tem que ter a forma (3), um operador de quarta ordem tem que ter a forma

$$L[y] = [p(x)y'']'' - [q(x)y']' + s(x)y, \tag{43}$$

e operadores de ordem mais alta têm que ter uma estrutura análoga. Além disso, as condições de contorno têm que ser tais de modo a eliminar os termos de fronteira que aparecem durante a integração por partes usada para se deduzir a Eq. (8). Por exemplo, em um problema de segunda ordem isso é verdadeiro para as condições de contorno separadas (2) e também em outros casos, um dos quais é dado no Exemplo 4 a seguir.

Vamos supor que temos um problema de valores de contorno autoadjunto para a Eq. (41), onde $L[y]$ é dado pela Eq. (43). Vamos supor que p, q, r e s são contínuas em $0 \le x \le 1$ e que as derivadas de p e q indicadas na Eq. (43) também são contínuas. Se, além disso, $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em $0 \le x \le 1$, então vai existir uma sequência infinita de autovalores tendendo a $+\infty$, com autofunções ortogonais em relação à função peso r e uma função arbitrária poderá ser expandida em uma série de autofunções. No entanto, as autofunções podem não ser simples para esses problemas mais gerais.

Vamos considerar agora a relação entre problemas de Sturm–Liouville e séries de Fourier. Observamos, anteriormente, que as séries de Fourier em senos e em cossenos podem ser obtidas usando-se as autofunções de determinados problemas de Sturm–Liouville envolvendo a equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$.

Isso levanta uma pergunta: podemos obter uma série de Fourier completa, incluindo os termos tanto em senos como em cossenos, escolhendo-se um conjunto apropriado de condições de contorno? A resposta é dada pelo exemplo a seguir, que serve para ilustrar, também, a ocorrência de condições de contorno não separadas.

EXEMPLO 4

Encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{44}$$

$$y(-L) - y(L) = 0, \qquad y'(-L) - y'(L) = 0. \tag{45}$$

Este não é um problema de Sturm–Liouville, já que as condições de contorno não são separadas. As condições de contorno (45) são chamadas **condições de contorno periódicas**, já que elas forçam que y e y' tenham os mesmos valores em $x = L$ e $x = -L$. De qualquer modo, a demonstração de que o problema (44), (45) é auto-adjunto é direta. Um cálculo simples estabelece que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor e com autofunção associada $\phi_0(x) = 1$. Além disso, existem autovalores adicionais $\lambda_1 = (\pi/L)^2, \lambda_2 = (2\pi/L)^2, \ldots, \lambda_n = (n\pi/L)^2, \ldots$ A cada um desses autovalores não nulos correspondem *duas* autofunções linearmente independentes; por exemplo, associadas a λ_n, existem duas autofunções $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ e $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Isto ilustra o fato de que os autovalores podem não ser simples quando as condições de contorno não são separadas. Além disso, se procurarmos expandir uma função dada de período $2L$ em uma série de autofunções do problema (44), (45), obteremos a série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

que é, simplesmente, a série de Fourier de f.

Não vamos considerar mais problemas com condições de contorno não separadas, nem trataremos de problemas de ordem maior do que a segunda, exceto em poucos problemas. Existe, no entanto, outro tipo de generalização que queremos discutir. É o caso em que os coeficientes p, q e r na Eq. (1) não satisfazem condições de continuidade e positividade tão estritas como as enunciadas no início desta seção. Tais problemas são chamados de problema de Sturm–Liouville singulares e serão tratados na Seção 11.4.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 5, determine as autofunções normalizadas do problema dado.

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$; veja a Seção 11.1, Problema 8.
5. $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$; veja a Seção 11.1, Problema 17.

Em cada um dos Problemas de 6 a 9, encontre a expansão em autofunções $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ da função dada, usando as autofunções normalizadas do Problema 1.

6. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
7. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
8. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Em cada um dos Problemas de 10 a 13, encontre a expansão em autofunções $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x)$ da função dada usando as autofunções normalizadas do Problema 4.

10. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
11. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
12. $f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le 1$
13. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Em cada um dos Problemas de 14 a 18, determine se o problema de valores de contorno dado é autoadjunto.

14. $y'' + y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
15. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0$
16. $y'' + y = \lambda y, \quad y(0) - y'(1) = 0, \quad y'(0) - y(1) = 0$
17. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = \lambda(1 + x^2)y, \quad y(0) - y'(1) = 0, \quad y'(0) + 2y(1) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$

19. Mostre que se as funções u e v satisfazem as Eqs. (2) e se $\alpha_2 = 0$, ou $\beta_2 = 0$, ou ambos, então,

$$p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_0^1 = 0.$$

20. Neste problema, esboçamos uma demonstração para a primeira parte do Teorema 11.2.3; que os autovalores do problema de Sturm–Liouville (1), (2) são simples. A demonstração é por absurdo.
    (a) Suponha que um autovalor dado λ não é simples. Então existem duas autofunções ϕ_1 e ϕ_2 associadas linearmente independentes, ou seja, uma não é múltipla da outra.
    (b) Calcule o wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ e use as condições de contorno (2) para mostrar que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$.
    (c) Use o Teorema 3.2.6 para chegar a uma contradição, o que estabelece que os autovalores têm que ser simples, como enunciado no Teorema 11.2.3.

21. Considere o problema de Sturm–Liouville

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y,$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0,$$

onde p, q e r satisfazem as condições enunciadas no texto.
    (a) Mostre que, se λ for um autovalor e se ϕ for uma autofunção associada, então

$$\lambda \int_0^1 r\phi^2\,dx = \int_0^1 (p\phi'^2 + q\phi^2)\,dx + \frac{\beta_1}{\beta_2}p(1)\phi^2(1) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}p(0)\phi^2(0).$$

    desde que $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$. Como este resultado tem que ser modificado se $\alpha_2 = 0$ ou $\beta_2 = 0$?
    (b) Mostre que, se $q(x) \geq 0$ e, se β_1/β_2 e $-\alpha_1/\alpha_2$ não forem negativos, então o autovalor λ será maior ou igual a zero.
    (c) Sob as condições do item (b), mostre que o autovalor λ é estritamente positivo a menos que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ e $q(x) = 0$ para todo x em $0 \leq x \leq 1$.

22. Deduza a Eq. (8) usando o produto interno (9) e supondo que u e v são funções complexas.

    Sugestão: considere a quantidade $\int_0^1 L[u]\bar{v}\,dx$, separe u e v em suas partes reais e imaginárias e proceda como no texto.

23. Neste problema, esboçamos uma demonstração de que as autofunções do problema de Sturm–Liouville (1), (2) são reais.
    (a) Sejam λ um autovalor e ϕ uma autofunção associada. Suponha que $\phi(x) = U(x) + iV(x)$ e mostre que U e V são também autofunções associadas a λ.
    (b) Usando o Teorema 11.2.3, ou o resultado do Problema 20, mostre que U e V são linearmente dependentes.
    (c) Mostre que ϕ tem que ser real, a menos de uma constante multiplicativa que pode ser complexa.

24. Considere o problema

$$x^2y'' = \lambda(xy' - y), \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Note que λ aparece como um coeficiente de y', além do próprio y. É possível estender a definição de problema autoadjunto para este tipo de problema e mostrar que este problema particular não é autoadjunto. Mostre que o problema tem autovalores, mas que nenhum deles é real. Isso ilustra que, em geral, problemas que não são autoadjuntos podem ter autovalores que não são reais.

Deformação de uma Coluna Elástica. Na investigação da deformação de uma coluna elástica de comprimento L sob uma força axial P (Figura 11.2.1*a*), somos levados à equação diferencial

$$y^{(4)} + \lambda y'' = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{i}$$

O parâmetro λ é igual a P/EI, onde E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo que passa pelo centroide e é perpendicular ao plano xy. As condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ dependem de como as extremidades da coluna estão apoiadas. Condições de contorno típicas são

$$y = y' = 0, \qquad \text{extremidade fixa;}$$

$$y = y'' = 0, \qquad \text{extremidade apoiada (com dobradiça).}$$

A barra ilustrada na Figura 11.2.1*a* está simplesmente apoiada em $x = 0$ e presa em $x = L$. Deseja-se determinar os autovalores e autofunções da Eq. (i) sujeita a condições de contorno adequadas. Em particular, o menor autovalor λ_1 dá a força que faz com que a coluna se deforme ou possa ficar em uma posição de equilíbrio curva, como ilustrado na Figura 11.2.1*b*. A autofunção associada descreve a configuração da coluna deformada. Note

que a equação diferencial (i) não está coberta pela teoria descrita nesta seção. É possível mostrar, no entanto, que em cada um dos casos dados aqui todos os autovalores são reais e positivos. Os Problemas 25 e 26 tratam de problemas sobre deformação de colunas.

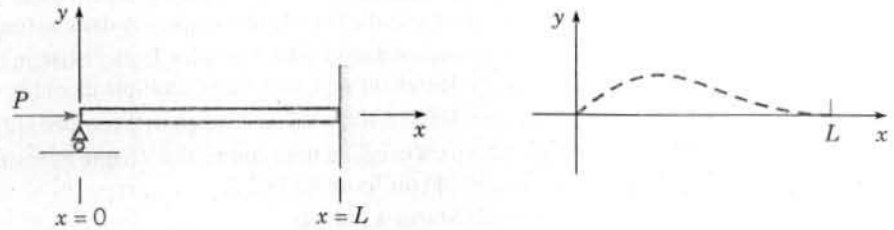


FIGURA 11.2.1 (*a*) Uma coluna sendo comprimida. (*b*) Forma da coluna deformada.

25. Para cada uma das condições de contorno a seguir, encontre o menor autovalor (a força de deformação) de $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$ e encontre também a autofunção associada (a forma da coluna deformada).
    (a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$
    (b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y'(L) = 0$
    (c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(L) = y'(L) = 0$

26. Em alguns problemas de deformação, o parâmetro autovalor aparece nas condições de contorno, além da equação diferencial. Tal caso ocorre quando a coluna está presa em uma das extremidades e a outra extremidade está livre. Neste caso, a equação diferencial $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$ tem que ser resolvida sujeita às condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) + \lambda y'(L) = 0.$$

Encontre o menor autovalor e a autofunção associada.

27. Substâncias dissolvidas em um aquífero são transportadas por dois mecanismos separados. O processo pelo qual um soluto é transportado pelo grande movimento do fluxo da água subterrânea é chamado de **advecção**. Além disso, o soluto é espalhado pelas flutuações em escala pequena na velocidade da água subterrânea ao longo de caminhos tortuosos do fluxo dentro de poros individuais, um processo chamado de **dispersão mecânica**. A forma unidimensional da equação de advecção-dispersão para uma substância dissolvida não reativa em um meio poroso isotrópico homogêneo saturado sob um fluxo uniforme regular é

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{i}$$

onde $c(x, t)$ é a concentração do soluto, v é a velocidade linear média da água subterrânea, D é o coeficiente da dispersão hidrodinâmica e L é o comprimento do aquífero. Suponha que as condições de contorno são

$$c(0, t) = 0, \quad c_x(L, t) = 0, \quad t > 0 \tag{ii}$$

e que a condição inicial é

$$c(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L, \tag{iii}$$

onde $f(x)$ é a concentração inicial dada do soluto.

(a) Suponha que $c(x, t) = X(x)T(t)$, use o método de separação de variáveis e encontre as equações satisfeitas por $X(x)$ e $T(t)$, respectivamente. Mostre que o problema para $X(x)$ pode ser escrito na forma de Sturm–Liouville

$$[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \quad 0 < x < L, \tag{iv}$$

$$X(0) = 0, \quad X'(L) = 0, \tag{v}$$

onde $p(x) = r(x) = \exp(-vx/D)$. Logo, os autovalores são reais e as autofunções são ortogonais em relação à função peso $r(x)$.

(b) Seja $\mu^2 = \lambda - (v^2/4D^2)$. Mostre que as autofunções são

$$X_n(x) = e^{vx/2D} \operatorname{sen} \mu_n x, \tag{vi}$$

onde μ_n satisfaz a equação

$$\tan \mu L = -2D\mu/v. \tag{vii}$$

(c) Mostre graficamente que a Eq. (vii) tem uma sequência infinita de raízes positivas e que $\mu_n \cong (2n-1)\pi/2L$ para n grande.

(d) Mostre que

$$\int_0^L r(x)X_n^2(x)\,dx = \frac{L}{2} + \frac{v}{4D\mu_n^2}\operatorname{sen}^2 \mu_n L.$$

(e) Encontre uma solução formal do problema (i), (ii), (iii) em termos de uma série de autofunções $X_n(x)$.

(f) Sejam $v = 1$, $D = 0{,}5$, $L = 10$ e $f(x) = \delta(x-3)$, onde δ é a função delta[5] de Dirac. Usando a solução encontrada no item (e), faça o gráfico de $c(x,t)$ em função de x para diversos valores de t, tais como $t = 0{,}5$; 1; 3; 6 e 10. Faça também o gráfico de $c(x,t)$ em função de t para diversos valores de x. Note que o número de termos necessários para se obter um gráfico preciso depende fortemente dos valores de t e de x.

(g) Descreva em poucas palavras como a solução evolui com o tempo.

28. Um rastreador não reativo em uma concentração c_0 está sendo continuamente introduzido em um fluxo regular na extremidade rio acima de uma coluna de comprimento L cheia de um meio granular homogêneo. Supondo que a concentração do rastreador na coluna é inicialmente nula, o problema de valores de contorno que modela o processo é

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$c(0,t) = c_0, \qquad c_x(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$c(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L,$$

onde $c(x,t)$, v e D são como no Problema 27.

(a) Suponha que $c(x,t) = c_0 + u(x,t)$ e encontre o problema de valores de contorno satisfeito por $u(x,t)$.

(b) Procedendo como no Problema 27, encontre $u(x,t)$ em termos de uma expansão em autofunções.

(c) Sejam $v = 1$, $D = 0{,}5$, $c_0 = 1$ e $L = 10$. Faça gráficos de $c(x,t)$ em função de x para diversos valores de t e também em função de t para diversos valores de x.

(d) Descreva em poucas palavras como a solução evolui com o tempo. Por exemplo, quanto tempo leva para a solução praticamente coincidir com a solução estado estacionário?

11.3 Problemas de Valores de Contorno Não Homogêneos

Nesta seção vamos discutir como resolver problemas de valores de contorno não homogêneos tanto para equações diferenciais ordinárias quanto para parciais. A maior parte de nossa atenção estará direcionada para problemas onde só a equação diferencial não é homogênea, enquanto as condições de contorno são homogêneas. Vamos supor que a solução pode ser expandida em uma série em autofunções de um problema relacionado homogêneo e vamos determinar depois os coeficientes nesta série, de modo que o problema não homogêneo seja satisfeito. Vamos descrever este método primeiro para problemas de valores de contorno para equações diferenciais lineares ordinárias de segunda ordem. Depois, vamos ilustrar sua utilização em equações diferenciais parciais resolvendo um problema de condução de calor em uma barra com propriedades variáveis e na presença de fontes de calor.

Problemas de Sturm–Liouville não Homogêneos. Considere o problema de valores de contorno que consiste na equação diferencial não homogênea

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \tag{1}$$

onde μ é uma constante dada e f é uma função dada em $0 \le x \le 1$, e nas condições de contorno

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0. \tag{2}$$

Como na Seção 11.2, vamos supor que p, p', q e r são contínuas em $0 \le x \le 1$ e que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ aí. Vamos resolver o problema (1), (2) usando as autofunções do problema homogêneo associado que consiste na equação diferencial

$$L[y] = \lambda r(x)y \tag{3}$$

[5] Veja a Seção 6.5, especialmente a Eq. (16) daquela seção.

e nas condições de contorno (2). Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ os autovalores deste problema e sejam ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas associadas.

Vamos supor que a solução $y = \phi(x)$ do problema não homogêneo (1), (2) pode ser expressa como uma série da forma

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x). \tag{4}$$

Da Eq. (34) da Seção 11.2, sabemos que

$$b_n = \int_0^1 r(x)\phi(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

No entanto, como não conhecemos $\phi(x)$ não podemos usar a Eq. (5) para calcular b_n. Em vez disso, vamos tentar determinar b_n de modo que o problema (1), (2) seja satisfeito e depois usar a Eq. (4) para encontrar $\phi(x)$. Note que ϕ dado pela Eq. (4) sempre satisfaz as condições de contorno (2), já que cada ϕ_n satisfaz.

Vamos considerar, agora, a equação diferencial que ϕ tem que satisfazer. Ela é simplesmente a Eq. (1) com ϕ no lugar de y:

$$L[\phi](x) = \mu r(x)\phi(x) + f(x). \tag{6}$$

Vamos substituir a série (4) na equação diferencial (6) e tentar determinar b_n de modo que a equação diferencial seja satisfeita. O termo à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (6) fica

$$L[\phi](x) = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n L[\phi_n](x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x)\phi_n(x), \tag{7}$$

onde supusemos que podemos trocar a ordem das operações de soma e de diferenciação.

Note que a função r aparece na Eq. (7) e, também, no termo $\mu r(x)\phi(x)$ na Eq. (6). Isso sugere reescrever o termo não homogêneo na Eq. (6) como $r(x)[f(x)/r(x)]$, de modo que $r(x)$ apareça, também, multiplicando esse termo. Se a função f/r satisfaz as condições do Teorema 11.2.4, então

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \tag{8}$$

onde, usando a Eq. (5) com f/r no lugar de ϕ,

$$c_n = \int_0^1 r(x)\frac{f(x)}{r(x)}\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Usando as Eqs. (4), (7) e (8) para substituir $\phi(x)$, $L[\phi](x)$ e $f(x)$, respectivamente, na Eq. (6), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x)\phi_n(x) = \mu r(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x) + r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x).$$

Depois de juntar os termos e cancelar o fator comum não nulo $r(x)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(\lambda_n - \mu)b_n - c_n]\phi_n(x) = 0. \tag{10}$$

Se a Eq. (10) for satisfeita para todo x no intervalo $0 \le x \le 1$, então o coeficiente de $\phi_n(x)$ terá que ser zero para todo n; veja o Problema 14 para uma demonstração deste fato. Logo,

$$(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Precisamos agora considerar dois casos principais, um dos quais tem dois subcasos.

Suponha, primeiro, que $\mu \neq \lambda_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, ou seja, μ é diferente de todos os autovalores do problema homogêneo correspondente. Então

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{12}$$

e

$$y = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x). \tag{13}$$

A Eq. (13), com c_n dado pela Eq. (9), é uma solução formal do problema de valores de contorno não homogêneo (1), (2). Nosso argumento não prova que a série (13) converge. No entanto, qualquer solução do problema de valores de contorno (1), (2) satisfaz claramente as condições do Teorema 11.2.4; de fato, satisfaz as condições mais fortes dadas no parágrafo que segue o teorema citado. É razoável, portanto, esperar que a série (13) convirja em cada ponto, e este fato pode ser estabelecido desde que, por exemplo, f seja contínua.

Vamos supor agora que μ é igual a um dos autovalores do problema homogêneo correspondente, por exemplo, $\mu = \lambda_m$; então, a situação é muito diferente. Neste caso, para $n = m$, a Eq. (11) tem a forma $0 \cdot b_m - c_m = 0$. Novamente, precisamos considerar dois casos.

Se $\mu = \lambda_m$ e $c_m \neq 0$, então é impossível resolver a Eq. (11) para b_m e o problema não homogêneo (1), (2) não tem solução.

Se $\mu = \lambda_m$ e $c_m = 0$, então a Eq. (11) é satisfeita independentemente do valor de b_m; em outras palavras, b_m permanece arbitrário. Neste caso, o problema de valores de contorno (1), (2) tem solução, mas ela não é única, já que contém um múltiplo arbitrário da autofunção ϕ_m.

Como c_m é dado pela Eq. (9), a condição $c_m = 0$ significa que

$$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx = 0. \tag{14}$$

Logo, se $\mu = \lambda_m$, o problema de valores de contorno não homogêneo (1), (2) só pode ser resolvido se f for ortogonal à autofunção associada ao autovalor λ_m.

Os resultados que acabamos de obter formalmente estão resumidos no teorema a seguir.

Teorema 11.3.1 O problema de valores de contorno não homogêneo (1), (2) tem uma única solução para cada f contínua sempre que μ for diferente de todos os autovalores do problema homogêneo associado; a solução é dada pela Eq. (13), e a série converge para todo x em $0 \leq x \leq 1$. Se μ for igual a um autovalor λ_m do problema homogêneo associado, então o problema de valores de contorno não homogêneo não tem solução, a menos que f seja ortogonal a ϕ_m, ou seja, a menos que a condição (14) seja válida. Neste caso, a solução não é única e contém um múltiplo arbitrário de $\phi_m(x)$.

A parte principal do Teorema 11.3.1 é enunciada, algumas vezes, da seguinte forma:

Teorema 11.3.2 Para um dado valor de μ, ou o problema não homogêneo (1), (2) tem uma única solução para cada f contínua (se μ for diferente de todos os autovalores λ_m do problema homogêneo associado), ou então o problema homogêneo (3), (2) tem uma solução não trivial (a autofunção associada a λ_m).

Essa última forma do teorema é conhecida como a alternativa de Fredholm.[6] Este é um dos teoremas básicos da análise matemática, e ocorre em muitos contextos diferentes. Você pode conhecê-lo em conexão com conjuntos de equações algébricas lineares, onde a propriedade de o determinante da matriz de coeficientes ser ou não nulo substitui as afirmações sobre μ e λ_m. Veja a discussão na Seção 7.3.

EXEMPLO 1

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = -x, \tag{15}$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0. \tag{16}$$

Este problema particular pode ser resolvido diretamente de maneira elementar e tem solução

$$y = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x}{\operatorname{sen}\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}} - \frac{x}{2}. \tag{17}$$

[6] O matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), professor na Universidade de Estocolmo, estabeleceu a teoria moderna de equações integrais em um artigo fundamental publicado em 1903. O trabalho de Fredholm enfatizou as semelhanças entre equações integrais e sistemas de equações algébricas lineares. Existem, também, muitas relações entre equações diferenciais e equações integrais; por exemplo, veja a Seção 2.8 e o Problema 22 da Seção 6.6.

O método de solução descrito a seguir ilustra o uso de expansão em autofunções, um método que pode ser usado em muitos problemas que não podem ser resolvidos por procedimentos elementares.

Começamos colocando a Eq. (15) na forma

$$-y'' = 2y + x \tag{18}$$

de modo a ficar com a mesma forma que a Eq. (1). Procuramos a solução do problema dado como uma série em termos das autofunções normalizadas ϕ_n do problema homogêneo associado

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{19}$$

Estas autofunções foram encontradas no Exemplo 2 da Seção 11.2 e são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{20}$$

onde

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}}\right)^{1/2} \tag{21}$$

e λ_n satisfaz

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} = 0. \tag{22}$$

Lembre que vimos, no Exemplo 1 da Seção 11.1, que

$$\lambda_1 \cong 4{,}116, \qquad \lambda_2 \cong 24{,}14,$$

$$\lambda_3 \cong 63{,}66, \qquad \lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4 \quad \text{para } n = 4, 5, \ldots.$$

Supondo que y é dado pela Eq. (4),

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x),$$

segue que os coeficientes b_n são dados pela Eq. (12),

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - 2},$$

onde os c_n são os coeficientes da expansão do termo não homogêneo $f(x) = x$ na Eq. (18) em função das autofunções ϕ_n. Esses coeficientes foram encontrados no Exemplo 3 da Seção 11.2 e são

$$c_n = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n (1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \tag{23}$$

Juntando tudo, obtemos finalmente a solução

$$y = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n (\lambda_n - 2)(1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x. \tag{24}$$

Embora as Eqs. (17) e (24) pareçam muito diferentes, elas são, de fato, duas expressões diferentes para a mesma função. Isso segue da unicidade no Teorema 11.3.1 ou 11.3.2, já que $\lambda = 2$ não é autovalor do problema homogêneo (19). Por outro lado, pode-se mostrar a equivalência das Eqs. (17) e (24) expandindo-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) em termos das autofunções $\phi_n(x)$. Para esse problema é claro que a fórmula (17) é uma expressão mais conveniente para a solução do que a Eq. (24). No entanto, enfatizamos mais uma vez que em outros problemas podemos não ser capazes de obter a solução, exceto por métodos envolvendo séries (ou métodos numéricos).

Problemas de Condução de Calor Não Homogêneos. Para mostrar como a expansão em autofunções pode ser usada para se resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais, vamos considerar a equação do calor generalizada

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t) \tag{25}$$

com as condições de contorno

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0 \tag{26}$$

e a condição inicial

$$u(x,0) = f(x). \tag{27}$$

Este problema foi discutido, anteriormente, no Apêndice A do Capítulo 10 e na Seção 11.1. Nesta última seção fizemos $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação homogênea obtida, supondo que $F(x,t) = 0$, e mostramos que $X(x)$ tem que ser solução do problema de valores de contorno

$$-[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X, \tag{28}$$

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(1) + h_2X(1) = 0. \tag{29}$$

Se supusermos que p, q e r satisfazem as condições adequadas de continuidade e que $p(x)$ e $r(x)$ são sempre positivas, o problema (28), (29) é um problema de Sturm–Liouville, como discutido na Seção 11.2. Assim, obtemos uma sequência de autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ e autofunções normalizadas associadas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$.

Vamos resolver o problema de valores de contorno não homogêneo dado (25), (26), (27) supondo que $u(x, t)$ pode ser expresso como uma série de autofunções

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x), \tag{30}$$

e mostrando depois como determinar os coeficientes $b_n(t)$. O procedimento é basicamente o mesmo utilizado no problema (1), (2) considerado antes, embora seja mais complicado sob certos aspectos. Por exemplo, os coeficientes b_n agora dependem de t, já que, caso contrário, u só dependeria de x. Note que as condições de contorno (26) são automaticamente satisfeitas por uma expressão da forma (30), pois cada $\phi_n(x)$ satisfaz as condições de contorno (29).

Vamos substituir u na Eq. (25) pela expressão na Eq. (30). Dos dois primeiros termos na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (25) obtemos, formalmente,

$$[p(x)u_x]_x - q(x)u = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n'(x)\right] - q(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\{[p(x)\phi_n'(x)]' - q(x)\phi_n(x)\}. \tag{31}$$

Como $[p(x)\phi_n'(x)]' - q(x)\phi_n(x) = -\lambda_n r(x)\phi_n(x)$, obtemos, finalmente,

$$[p(x)u_x]_x - q(x)u = -r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x). \tag{32}$$

Vamos considerar, agora, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (25). Temos

$$r(x)u_t = r(x)\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$$

$$= r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x). \tag{33}$$

Temos também que expressar o termo não homogêneo na Eq. (25) com uma série de autofunções. Mais uma vez, é conveniente considerar a razão $F(x, t)/r(x)$ e escrever

$$\frac{F(x,t)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\phi_n(x), \tag{34}$$

onde os coeficientes são dados por

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 r(x)\frac{F(x,t)}{r(x)}\phi_n(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 F(x,t)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{35}$$

Como $F(x, t)$ é dado, podemos considerar as funções $\gamma_n(t)$ como sendo conhecidas.

Juntando todos esses resultados, substituímos as Eqs. (32), (33) e (34) na Eq. (25) e vemos que

$$r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x) = -r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x) + r(x)\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n(t)\phi_n(x). \tag{36}$$

Para simplificar a Eq. (36), cancelamos o fator $r(x)$ de todos os termos e escrevemos tudo dentro de um somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) - \gamma_n(t)\right]\phi_n(x) = 0. \tag{37}$$

Mais uma vez, para que a Eq. (37) seja válida para todo x em $0 < x < 1$ é preciso que a quantidade dentro dos colchetes seja nula para todo n (veja, novamente, o Problema 14). Logo, $b_n(t)$ é uma solução da equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{38}$$

onde γ_n é dado pela Eq. (35). Para determinar completamente $b_n(t)$, precisamos de uma condição inicial

$$b_n(0) = B_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

para a Eq. (38). Obtemos isso da condição inicial (27). Fazendo $t = 0$ na Eq. (30) e usando a Eq. (27), temos

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\phi_n(x) = f(x). \tag{40}$$

Logo, os valores iniciais B_n são os coeficientes da expansão em autofunções de $f(x)$. Portanto,

$$B_n = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{41}$$

Note que tudo que está à direita do sinal de igualdade na Eq. (41) é conhecido, de modo que podemos considerar B_n como conhecido.

O problema de valor inicial (38), (39) pode ser resolvido pelos métodos da Seção 2.1. O fator integrante é $\mu(t) = \exp(\lambda_n t)$, e segue que

$$b_n(t) = B_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}\gamma_n(s)\,ds, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{42}$$

Os detalhes deste cálculo são deixados para o leitor. Note que o primeiro termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (42) depende da função f através do coeficiente B_n, enquanto o segundo depende do termo não homogêneo F através dos coeficientes $\gamma_n(s)$.

Assim, uma solução explícita do problema de valores de contorno (25), (26), (27) é dada pela Eq. (30),

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x),$$

onde os coeficientes $b_n(t)$ são determinados pela Eq. (42). As quantidades B_n e $\gamma_n(s)$ na Eq. (42) são dadas, por sua vez, pelas Eqs. (41) e (35), respectivamente.

Resumindo, para usar esse método para resolver um problema de valores de contorno como o dado pelas Eqs. (25), (26), (27), precisamos:

1. Encontrar os autovalores λ_n e as autofunções normalizadas ϕ_n do problema homogêneo (28), (29).
2. Calcular os coeficientes B_n e $\gamma_n(s)$ das Eqs. (41) e (35), respectivamente.
3. Calcular a integral em (42) para determinar $b_n(t)$.
4. Somar a série infinita (30).

Como alguns ou todos esses passos podem ser difíceis, o processo inteiro pode ser bastante complicado. Uma característica que facilita é que com frequência a série (30) converge rapidamente, caso em que bastam alguns poucos termos para se obter uma aproximação adequada da solução.

EXEMPLO 2

Encontre a solução do problema de condução de calor

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t}, \tag{43}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) + u(1,t) = 0, \tag{44}$$

$$u(x,0) = 0. \tag{45}$$

Novamente, vamos usar as autofunções normalizadas ϕ_n do problema (19) e supor que a solução u é dada pela Eq. (30)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x).$$

Os coeficientes b_n são determinados da equação diferencial

$$b_n' + \lambda_n b_n = \gamma_n(t), \tag{46}$$

onde λ_n é o n-ésimo autovalor do problema (19) e $\gamma_n(t)$ é o n-ésimo coeficiente na expansão do termo não homogêneo xe^{-t} em termos das autofunções ϕ_n. Temos, então,

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 xe^{-t}\phi_n(x)\,dx = e^{-t}\int_0^1 x\phi_n(x)\,dx$$

$$= c_n e^{-t}, \tag{47}$$

onde $c_n = \int_0^1 x\phi_n(x)\,dx$ é dado pela Eq. (23). A condição inicial para a Eq. (46) é

$$b_n(0) = 0 \tag{48}$$

já que a distribuição inicial de temperatura (45) é zero em toda parte. A solução do problema de valor inicial (46), (48) é

$$b_n(t) = e^{-\lambda_n t}\int_0^t e^{\lambda_n s}c_n e^{-s}\,ds = c_n e^{-\lambda_n t}\,\frac{e^{(\lambda_n - 1)t} - 1}{\lambda_n - 1}$$

$$= \frac{c_n}{\lambda_n - 1}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}). \tag{49}$$

Logo, a solução do problema de condução de calor (43), (44), (45) é dada por

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n})\,(e^{-t} - e^{-\lambda_n t})\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \tag{50}$$

A solução dada pela Eq. (50) é exata, mas complicada. Para avaliar se é possível obter uma aproximação satisfatória da solução usando-se apenas uns poucos termos desta série precisamos estimar sua velocidade de convergência. Primeiro, dividimos a série na Eq. (50) em duas partes:

$$u(x,t) = 4e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \tag{51}$$

Lembre, do Exemplo 1 na Seção 11.1, que os autovalores λ_n são aproximadamente proporcionais a n^2. Na primeira série da Eq. (51) os fatores trigonométricos são todos limitados quando $n \to \infty$; portanto, essa série converge de maneira semelhante às séries $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-4}$. Logo, são necessários, no máximo, dois ou três termos para se obter uma excelente aproximação para esta parte da solução. A segunda série contém o fator adicional $e^{-\lambda_n t}$, de modo que converge mais rápido ainda para $t > 0$; todos os termos depois do primeiro são desprezíveis, quase que certamente.

Outras Generalizações. Expansões em autofunções podem ser usadas para se resolver uma variedade muito maior de problemas do que a discussão precedente e os exemplos podem sugerir. Por exemplo, condições de contorno não homogêneas independentes do tempo podem ser tratadas de maneira semelhante ao que foi feito na Seção 10.6. Para reduzir o problema a um com condições de contorno homogêneas, subtraímos de u uma função v escolhida de modo que satisfaça as condições de contorno dadas. Então a diferença $w = u - v$ satisfaz um problema com condições de contorno homogêneas, mas com um termo não homogêneo e uma condição inicial modificados. Este problema pode ser resolvido pelo procedimento descrito nesta seção.

Uma dificuldade em potencial no uso de expansão em autofunções é que é preciso encontrar as autofunções normalizadas do problema homogêneo associado. Para uma equação diferencial com coeficientes variáveis isso pode ser difícil, senão impossível. Em tais casos é possível, algumas vezes, usar outras funções, como autofunções de um problema mais simples que satisfaça as mesmas condições de contorno. Por exemplo, se as condições de contorno forem

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \tag{52}$$

pode ser conveniente substituir as funções $\phi_n(x)$ na Eq. (30) por sen $n\pi x$. Essas funções satisfazem, pelo menos, as condições de contorno, embora em geral não sejam soluções da equação diferencial homogênea associada. A seguir, expandimos o termo não homogêneo $F(x,t)$ em uma série da forma (34), com $\phi_n(x)$ substituído, novamente, por sen $n\pi x$, e depois substituímos tanto u quanto F na Eq. (25). Juntando os coeficientes de sen $n\pi x$ para cada n, temos um conjunto infinito de equações diferenciais lineares de primeira ordem para determinar $b_1(t)$, $b_2(t)$, ... A diferença essencial entre este caso e o considerado anteriormente é que agora as equações para as funções $b_n(t)$ estão *acopladas*. Assim, elas não podem ser resolvidas uma a uma como antes, mas têm que ser tratadas simultaneamente. Na prática, o sistema infinito é substituído por um sistema finito aproximado, do qual são calculadas aproximações com um número finito de coeficientes.

Problemas de valores de contorno para equações de ordem mais alta do que segunda ordem podem ser resolvidos, muitas vezes, por expansão em autofunções. Em alguns casos o procedimento segue, quase que exatamente, o procedimento para equações de segunda ordem. No entanto, também podem aparecer complicações variadas.

Finalmente, enfatizamos que a discussão nesta seção foi puramente formal. Argumentos separados, algumas vezes bastante elaborados, são necessários para se estabelecer a convergência da expansão em autofunções ou justificar alguns dos passos usados, como a diferenciação termo a termo da série de autofunções.

Existem, também, outros métodos bem diferentes para se resolver problemas de valores de contorno não homogêneos. Um desses leva a uma solução expressa como uma integral definida, em vez de uma série infinita. Esta abordagem envolve certas funções conhecidas como funções de Green e, para equações diferenciais ordinárias, é o assunto dos Problemas de 28 a 36.

PROBLEMAS

Em cada um dos Problemas de 1 a 5, resolva o problema dado usando expansão em autofunções.

1. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$ veja a Seção 11.2, Problema 7.
3. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$ veja a Seção 11.2, Problema 3.
4. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0;$ veja a Seção 11.2, Problema 11.
5. $y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas de 6 a 9, determine uma expansão formal em série de autofunções para a solução do problema dado. Suponha que f satisfaz as condições do Teorema 11.3.1. Diga para quais valores de μ a solução existe.

6. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
7. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
9. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$

Em cada um dos Problemas de 10 a 13, determine se existe algum valor da constante a para o qual o problema tem solução. Encontre a solução para cada um desses valores.

10. $y'' + \pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. $y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
12. $y'' + \pi^2 y = a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
13. $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
14. Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas da equação diferencial (3) sujeita às condições de contorno (2). Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ convergir para $f(x)$, onde $f(x) = 0$ para todo x em $0 \le x \le 1$, mostre que $c_n = 0$ para todo n.

   Sugestão: multiplique por $r(x)\phi_m(x)$, integre e use a propriedade de ortogonalidade das autofunções.
15. Seja L um operador diferencial linear de segunda ordem. Mostre que a solução $y = \phi(x)$ do problema

$$L[y] = f(x),$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = a, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = b$$

pode ser escrita como $y = u + v$, onde $u = \phi_1(x)$ e $v = \phi_2(x)$ são soluções dos problemas

$$L[u] = 0,$$

$$\alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = a, \qquad \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = b$$

e

$$L[v] = f(x),$$

$$\alpha_1 v(0) + \alpha_2 v'(0) = 0, \qquad \beta_1 v(1) + \beta_2 v'(1) = 0,$$

respectivamente.
16. Mostre que o problema

$$y'' + \pi^2 y = \pi^2 x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$

tem solução

$$y = c_1 \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x + x.$$

Mostre também que esta solução não pode ser obtida separando-se o problema como sugerido no Problema 15, já que neste caso nenhum dos dois subproblemas pode ser resolvido.

17. Considere o problema

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(0) = a, \quad y(1) = b.$$

Suponha que $y = u + v$, onde v é qualquer função duas vezes diferenciável satisfazendo as condições de contorno (mas não, necessariamente, a equação diferencial). Mostre que u é uma solução do problema

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = g(x), \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$

onde $g(x) = -[v'' + p(x)v' + q(x)v]$ e é conhecida uma vez escolhida v. Assim, a não homogeneidade pode ser transferida das condições de contorno para a equação diferencial. Encontre uma função v para este problema.

18. Usando o método do Problema 17, transforme o problema

$$y'' + 2y = 2 - 4x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) + y'(1) = -2$$

em um novo problema no qual as condições de contorno são homogêneas. Resolva este último problema observando o Exemplo 1 do texto.

Em cada um dos Problemas de 19 a 22, use expansão em autofunções para encontrar a solução do problema de valores de contorno dado.

19. $u_t = u_{xx} - x, \qquad u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x/2)$;
veja o Problema 2.

20. $u_t = u_{xx} + e^{-t}, \qquad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 1 - x$;
veja a Seção 11.2, Problemas 10 e 12.

21. $u_t = u_{xx} + 1 - |1 - 2x|, \qquad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$;
veja o Problema 5.

22. $u_t = u_{xx} + e^{-t}(1 - x), \qquad u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$;
veja a Seção 11.2, Problemas 6 e 7.

23. Considere o problema de valores de contorno

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x),$$
$$u(0,t) = T_1, \qquad u(1,t) = T_2, \qquad u(x,0) = f(x).$$

(a) Seja $v(x)$ uma solução do problema

$$[p(x)v']' - q(x)v = -F(x), \qquad v(0) = T_1, \quad v(1) = T_2.$$

Se $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, encontre o problema de valores de contorno satisfeito por w. Note que este problema pode ser resolvido pelo método desta seção.

(b) Generalize o procedimento do item (a) para o caso em que u satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0,t) - h_1u(0,t) = T_1, \qquad u_x(1,t) + h_2u(1,t) = T_2.$$

Em cada um dos Problemas 24 e 25, use o método indicado no Problema 23 para resolver o problema de valores de contorno dado.

24. $u_t = u_{xx} - 2,$
$u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0,$
$u(x,0) = x^2 - 2x + 2$

25. $u_t = u_{xx} - \pi^2 \cos \pi x,$
$u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1,$
$u(x,0) = \cos(3\pi x/2) - \cos \pi x$

26. O método de expansão em autofunções é útil, muitas vezes, para problemas não homogêneos relacionados com a equação de onda ou suas generalizações. Considere o problema

$$r(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t), \tag{i}$$

$$u_x(0,t) - h_1u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) + h_2u(1,t) = 0, \tag{ii}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x). \tag{iii}$$

Este problema pode aparecer em conexão com generalizações da equação do telégrafo (Problema 16 na Seção 11.1) ou vibrações longitudinais de uma barra elástica (Problema 25 na Seção 11.1).

(a) Faça $u(x,t) = X(x)T(t)$ na equação homogênea correspondente à Eq. (i) e mostre que $X(x)$ satisfaz as Eqs. (28) e (29) do texto. Denote por λ_n e $\phi_n(x)$ os autovalores e as autofunções normalizadas desse problema.

(b) Suponha que $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$, e mostre que $b_n(t)$ tem que satisfazer o problema de valor inicial

$$b_n''(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad b_n(0) = \alpha_n, \quad b_n'(0) = \beta_n,$$

onde α_n, β_n e $\gamma_n(t)$ são os coeficientes das expansões de $f(x)$, $g(x)$ e $F(x,t)/r(x)$, respectivamente, em termos das autofunções $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$

27. Neste problema, vamos explorar um pouco mais a analogia entre problemas de Sturm–Liouville de valores de contorno e matrizes autoadjuntas. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz autoadjunta $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e autovetores ortogonais associados $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$.

Considere o sistema não homogêneo de equações

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

onde μ é um número real dado e $\mathbf{b}$ é um vetor dado. Vamos mostrar um modo de resolver a Eq. (i) que é análogo ao método apresentado no texto para se resolver as Eqs. (1) e (2).

(a) Mostre que $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \xi^{(i)}$, onde $b_i = (\mathbf{b}, \xi^{(i)})$.

(b) Suponha que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi^{(i)}$ e mostre que, para que a Eq. (i) seja satisfeita, é necessário que $a_i = b_i/(\lambda_i - \mu)$. Logo,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{b}, \xi^{(i)})}{\lambda_i - \mu} \xi^{(i)}. \tag{ii}$$

desde que μ não seja um dos autovalores de $\mathbf{A}$, $\mu \neq \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Compare este resultado com a Eq. (13).

Funções de Green.[7] Considere o sistema não homogêneo de equações algébricas

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz autoadjunta $n \times n$, μ é um número real dado e $\mathbf{b}$ é um vetor dado. Em vez de usar uma expansão em autovetores como no Problema 27, podemos resolver a Eq. (i) calculando a matriz inversa $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}$, que vai existir se μ não for um autovalor de $\mathbf{A}$. Então

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}. \tag{ii}$$

Os Problemas de 28 a 36 indicam um modo de se resolver problemas de valores de contorno não homogêneos análogo à utilização da matriz inversa para um sistema de equações algébricas lineares. A função de Green tem um papel semelhante à inversa da matriz de coeficientes. Este método leva a soluções expressas em forma de integral definida, em vez de série infinita. Exceto no Problema 35, vamos supor, por simplicidade, que $\mu = 0$.

28. (a) Mostre pelo método de variação dos parâmetros que a solução geral da equação diferencial

$$-y'' = f(x)$$

pode ser escrita na forma

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x - s) f(s)\, ds,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

(b) Suponha que $y = \phi(x)$ também satisfaz as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Mostre que, nesse caso,

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \int_0^1 (1 - s) f(s)\, ds.$$

(c) Mostre que, sob as condições dos itens (a) e (b), $\phi(x)$ pode ser escrita na forma

$$\phi(x) = \int_0^x s(1 - x) f(s)\, ds + \int_x^1 x(1 - s) f(s)\, ds.$$

[7] As funções de Green levam este nome em homenagem ao inglês George Green (1793-1841). Ele foi quase que inteiramente autodidata em matemática e fez contribuições significativas em eletricidade e magnetismo, mecânica dos fluidos e equações diferenciais parciais. Seu trabalho mais importante foi um ensaio sobre eletricidade e magnetismo, publicado privadamente em 1828. Nesse artigo Green foi o primeiro a reconhecer a importância das funções potenciais. Introduziu as funções conhecidas hoje como funções de Green para resolver problemas de valores de contorno, e desenvolveu teoremas sobre transformações integrais, dos quais o teorema de Green no plano é um caso particular. No entanto, esses resultados não se tornaram conhecidos em larga escala até que o ensaio de Green fosse republicado na década de 1850 através dos esforços de William Thomson (Lord Kelvin).

(d) Definindo

$$G(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & 0 \le s \le x, \\ x(1-s), & x \le s \le 1, \end{cases}$$

mostre que a solução pode ser escrita na forma

$$\phi(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds.$$

A função $G(x, s)$ que aparece no integrando é uma função de Green. A utilidade da função de Green está no fato de que ela é independente do termo não homogêneo na equação diferencial. Assim, uma vez determinada a função de Green, a solução do problema de valores de contorno é determinada por uma única integração para qualquer termo não homogêneo $f(x)$. Além disso, note que não há necessidade de se determinar constantes arbitrárias, já que $\phi(x)$ como dada pela fórmula integral envolvendo a função de Green satisfaz automaticamente as condições de contorno.

29. Por um procedimento semelhante ao do Problema 28, mostre que a solução do problema de valores de contorno

$$-(y'' + y) = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

é

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds,$$

onde

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} s \operatorname{sen}(1-x)}{\operatorname{sen} 1}, & 0 \le s \le x, \\ \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(1-s)}{\operatorname{sen} 1}, & x \le s \le 1. \end{cases}$$

30. É possível mostrar que o problema de Sturm–Liouville

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = f(x), \tag{i}$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \tag{ii}$$

tem uma solução em termos da função de Green

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds, \tag{iii}$$

desde que $\lambda = 0$ não seja um autovalor de $L[y] = \lambda y$ sujeita às condições de contorno (ii). Além disso, $G(x, s)$ é dada por

$$G(x,s) = \begin{cases} -y_1(s)y_2(x)/p(x)W(y_1,y_2)(x), & 0 \le s \le x, \\ -y_1(x)y_2(s)/p(x)W(y_1,y_2)(x), & x \le s \le 1, \end{cases} \tag{iv}$$

onde y_1 é uma solução de $L[y] = 0$ satisfazendo a condição de contorno em $x = 0$, y_2 é uma solução de $L[y] = 0$ satisfazendo a condição de contorno em $x = 1$ e $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2.

(a) Verifique que a função de Green obtida no Problema 28 é dada pela fórmula (iv).

(b) Verifique que a função de Green obtida no Problema 29 é dada pela fórmula (iv).

(c) Prove que $p(x)W(y_1, y_2)(x)$ é uma constante mostrando que sua derivada é nula.

(d) Usando a Eq. (iv) e o resultado do item (c), mostre que $G(x, s) = G(s, x)$.

(e) Verifique que $y = \phi(x)$ na Eq. (iii), com $G(x, s)$ dada pela Eq. (iv), satisfaz a equação diferencial (i) e as condições de contorno (ii).

Em cada um dos Problemas de 31 a 34, resolva o problema de valores de contorno dado determinando a função de Green apropriada e expressando a solução como uma integral definida. Use as equações de (i) a (iv) do Problema 30.

31. $-y'' = f(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

32. $-y'' = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$

33. $-(y'' + y) = f(x), \qquad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$

34. $-y'' = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

35. Considere o problema de valores de contorno

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \tag{i}$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0. \tag{ii}$$

De acordo com o texto, a solução $y = \phi(x)$ é dada pela Eq. (13), onde c_n é definido pela Eq. (9), desde que μ não seja um autovalor do problema homogêneo associado. Neste caso, é possível mostrar também que a solução é dada por uma função de Green integral da forma

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s, \mu) f(s)\, ds. \tag{iii}$$

Note que, neste problema, a função de Green também depende do parâmetro μ.

(a) Mostre que, para que essas duas expressões para $\phi(x)$ sejam equivalentes, é preciso que

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(s)}{\lambda_i - \mu}, \tag{iv}$$

onde λ_i e ϕ_i são os autovalores e autofunções, respectivamente, das Eqs. (3), (2) do texto. Novamente, vemos da Eq. (iv) que μ não pode ser igual a nenhum autovalor λ_i.

(b) Deduza a Eq. (iv) diretamente supondo que $G(x, s, \mu)$ tem uma expansão em autofunções da forma

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x, \mu)\phi_i(s). \tag{v}$$

Determine $a_i(x, \mu)$ multiplicando a Eq. (v) por $r(s)\phi_i(s)$ e integrando em relação a s de $s = 0$ a $s = 1$.

Sugestão: mostre primeiro que λ_i e ϕ_i satisfazem a equação

$$\phi_i(x) = (\lambda_i - \mu) \int_0^1 G(x, s, \mu) r(s)\phi_i(s)\, ds. \tag{vi}$$

36. Considere o problema de valores de contorno

$$-d^2y/ds^2 = \delta(s - x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

onde s é a variável independente, $s = x$ é um ponto definido no intervalo $0 < s < 1$ e δ é a função δ de Dirac (veja a Seção 6.5). Mostre que a solução deste problema é a função de Green $G(x, s)$ obtida no Problema 28.

Ao resolver o problema dado, note que $\delta(s - x) = 0$ nos intervalos $0 \le s < x$ e $x < s \le 1$. Note, ainda, que $-dy/ds$ dá um salto de tamanho 1 quando s passa pelo valor x.

Este problema ilustra uma propriedade geral, a saber, que a função de Green $G(x, s)$ pode ser identificada como a resposta no ponto s de um impulso unitário no ponto x. Um termo não homogêneo mais geral f em $0 \le x \le 1$ pode ser visto como uma distribuição contínua de impulsos de tamanho $f(x)$ no ponto x. A solução do problema de valores de contorno não homogêneo como uma integral envolvendo a função de Green pode ser interpretada, então, como o resultado da superposição de respostas ao conjunto de impulsos representados pelo termo não homogêneo $f(x)$.

11.4 Problemas de Sturm–Liouville Singulares

Nas seções precedentes deste capítulo consideramos problemas de Sturm–Liouville de valores de contorno: a equação diferencial

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

junto com condições de contorno da forma

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \tag{2}$$

$$\beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0. \tag{3}$$

Até agora sempre supusemos que o problema era regular, ou seja, que p era diferenciável, q e r contínuas e $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todos os pontos do intervalo *fechado*. No entanto, existem também equações de interesse físico nas quais algumas dessas condições não são satisfeitas.

Por exemplo, suponha que queremos estudar a equação de Bessel de ordem ν no intervalo $0 < x < 1$. Esta equação é escrita, algumas vezes, na forma[8]

[8] A substituição $t = \sqrt{\lambda}\, x$ reduz a Eq. (4) à forma padrão $t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$.

$$-(xy')' + \frac{\nu^2}{x}y = \lambda xy \tag{4}$$

de modo que $p(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$ e $r(x) = x$. Logo, $p(0) = 0$, $r(0) = 0$ e $q(x)$ é ilimitada e, portanto, descontínua quando $x \to 0$. No entanto, as condições impostas nos problemas de Sturm–Liouville regulares são satisfeitas nos outros pontos do intervalo.

Analogamente, para a equação de Legendre temos

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y, \qquad -1 < x < 1, \tag{5}$$

onde $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$. Aqui, as condições sobre p, q e r são satisfeitas no intervalo $0 \le x \le 1$, exceto em $x = 1$, onde p se anula.

Usamos o termo problema de Sturm–Liouville singular para nos referir a uma determinada classe de problemas de valores de contorno para a equação diferencial (1) nos quais as funções p, q e r satisfazem as condições enunciadas anteriormente no intervalo aberto $0 < x < 1$, mas pelo menos uma dessas funções deixa de satisfazer uma ou mais dessas condições em um (ou ambos) dos extremos do intervalo. Vamos descrever em maiores detalhes, mais tarde nesta seção, condições de contorno separadas adequadas. Problemas singulares podem ocorrer, também, se o intervalo for ilimitado, por exemplo, $0 \le x < \infty$. Não consideraremos este último tipo de problema singular neste livro.

Como exemplo de um problema singular em um intervalo finito, considere a equação

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0, \tag{6}$$

ou

$$-(xy')' = \lambda xy, \tag{7}$$

no intervalo $0 < x < 1$, e suponha que $\lambda > 0$. Esta equação aparece no estudo das vibrações livres de uma membrana circular elástica e será mais discutida na Seção 11.5. Se definirmos uma nova variável independente t por $t = \sqrt{\lambda}\,x$, então

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda}\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Logo, a Eq. (6) fica

$$\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\lambda\frac{d^2y}{dt^2} + \sqrt{\lambda}\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{t}{\sqrt{\lambda}}y = 0,$$

ou, cancelando o fator comum $\sqrt{\lambda}$ em cada parcela,

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0. \tag{8}$$

A Eq. (8) é a equação de Bessel de ordem zero (veja a Seção 5.7). A solução geral da Eq. (8) para $t > 0$ é

$$y = c_1J_0(t) + c_2Y_0(t);$$

portanto, a solução geral da Eq. (7) para $x > 0$ é

$$y = c_1J_0(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2Y_0(\sqrt{\lambda}\,x), \tag{9}$$

onde J_0 e Y_0 denotam as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem zero. Das Eqs. (7) e (13) da Seção 5.7, temos

$$J_0(\sqrt{\lambda}\,x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\lambda^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad x > 0, \tag{10}$$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}\,x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2}\right)J_0(\sqrt{\lambda}\,x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m\lambda^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0, \tag{11}$$

onde $H_m = 1 + (1/2) + \ldots + (1/m)$ e $\gamma = \lim_{m\to\infty}(H_m - \ln m)$. Os gráficos de $y = J_0(x)$ e $y = Y_0(x)$ são dados na Figura 5.7.2.

Suponha que procuramos uma solução da Eq. (7) que satisfaça também as condições de contorno

$$y(0) = 0, \tag{12}$$

$$y(1) = 0, \tag{13}$$

típicas do que encontramos em outros problemas neste capítulo. Como $J_0(0) = 1$ e $Y_0(x) \to -\infty$ quando $x \to 0$, a condição $y(0) = 0$ só pode ser satisfeita escolhendo-se $c_1 = c_2 = 0$ na Eq. (9). Assim, o problema de valores de contorno (7), (12), (13) só tem a solução trivial.

Uma interpretação deste resultado é que a condição de contorno (12) em $x = 0$ é restritiva demais para a equação diferencial (7). Isso ilustra a situação geral, a saber, que é preciso considerar um tipo de condição de contorno modificada em um ponto singular da fronteira. No problema em consideração, suponha que pedimos apenas que a solução (9) e sua derivada permaneçam limitadas. Em outras palavras, definimos como condição de contorno em $x = 0$ a condição

$$y, y' \text{ limitadas quando } x \to 0. \tag{14}$$

Esta condição pode ser satisfeita escolhendo-se $c_2 = 0$ na Eq. (9), de modo a eliminar a solução não limitada Y_0. A segunda condição de contorno, $y(1) = 0$, fornece, então,

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{15}$$

É possível mostrar[9] que a Eq. (15) tem um conjunto infinito de raízes positivas discretas, que fornecem os autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ do problema dado. As autofunções associadas são

$$\phi_n(x) = J_0\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \tag{16}$$

determinadas a menos de uma constante multiplicativa. O problema de valores de contorno (7), (13), (14) é um exemplo de um problema de Sturm–Liouville singular. Este exemplo ilustra o fato de que se as condições de contorno são relaxadas de maneira apropriada, então um problema de Sturm–Liouville singular pode ter uma sequência infinita de autovalores e autofunções, como no caso de um problema de Sturm–Liouville regular.

Devido à sua importância nas aplicações, vale a pena investigar problemas de Sturm–Liouville singulares um pouco mais. As duas questões principais que importam são:

1. Precisamente qual tipo de condições de contorno pode ser permitido em um problema de Sturm–Liouville singular?
2. Até que ponto os autovalores e autofunções de um problema de Sturm–Liouville singular têm as mesmas propriedades que um problema regular? Em particular, os autovalores são reais, as autofunções são ortogonais e uma função dada pode ser expandida em uma série de autofunções?

Ambos esses pontos podem ser respondidos através de um estudo da identidade

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = 0, \tag{17}$$

que teve um papel essencial no desenvolvimento da teoria de problemas de Sturm–Liouville regulares. Vamos, então, investigar as condições sob as quais esta relação é válida para problemas singulares, onde a integral (17) pode ser uma integral imprópria. Para ser específico, vamos considerar a equação diferencial (1) e supor que $x = 0$ é um ponto singular de fronteira e $x = 1$, não. A condição de contorno (3) é imposta no ponto regular $x = 1$, mas vamos deixar sem especificar, por enquanto, a condição de contorno em $x = 0$. De fato, nosso objetivo principal é determinar quais os tipos de condições de contorno que podem ser permitidos em um ponto singular da fronteira para que a Eq. (17) continue válida.

Como o problema de valores de contorno que está sendo investigado é singular em $x = 0$, escolhemos $\epsilon > 0$ e consideramos a integral $\int_\epsilon^1 L[u]v\, dx$, em vez de $\int_0^1 L[u]v\, dx$, como na Seção 11.2. Depois vamos fazer ϵ tender a zero. Supondo que u e v têm, pelo menos, duas derivadas contínuas em $\epsilon \le x \le 1$ e integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\int_\epsilon^1 \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = -p(x)\left[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)\right]\Big|_\epsilon^1. \tag{18}$$

O termo de fronteira em $x = 1$ é eliminado, novamente, se u e v satisfazem a condição de contorno (3), e assim

[9] A função J_0 está bem tabulada; as raízes da Eq. (15) podem ser encontradas em diversas tabelas, por exemplo, as contidas em Jahnke e Emde, ou em Abramowitz e Stegun. Você também pode usar um sistema de álgebra computacional para calculá-las rapidamente. As três primeiras raízes da Eq. (15) são $\sqrt{\lambda} = 2{,}405$, $5{,}520$ e $8{,}654$, respectivamente, com quatro algarismos significativos; $\sqrt{\lambda_n} \cong (n - \frac{1}{4})\pi$ para n grande.

$$\int_{\epsilon}^{1} \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = p(\epsilon)\left[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)\right]. \tag{19}$$

Tomando o limite quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\int_{0}^{1} \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0} p(\epsilon)\left[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)\right]. \tag{20}$$

Logo, a Eq. (17) é válida se, e somente se, além das hipóteses enunciadas anteriormente, tivermos

$$\lim_{\epsilon \to 0} p(\epsilon)\left[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)\right] = 0 \tag{21}$$

para todo par de funções u e v na classe em consideração. A Eq. (21) é, portanto, o critério que determina quais as condições de contorno permitidas em $x = 0$, se este for um ponto singular de fronteira. Uma condição semelhante é colocada em $x = 1$ se este for um ponto singular, a saber,

$$\lim_{\epsilon \to 0} p(1-\epsilon)\left[u'(1-\epsilon)v(1-\epsilon) - u(1-\epsilon)v'(1-\epsilon)\right] = 0. \tag{22}$$

Resumindo, como na Seção 11.2, um problema de valores de contorno singular para a Eq. (1) é dito **autoadjunto** se a Eq. (17) for válida, possivelmente como uma integral imprópria, para cada par de funções u e v com as seguintes propriedades: duas vezes continuamente diferenciáveis no intervalo aberto $0 < x < 1$, satisfazendo uma condição de contorno da forma (2) em cada ponto regular de fronteira e satisfazendo uma condição de contorno suficiente para garantir a Eq. (21), se $x = 0$ for um ponto singular de fronteira, ou a Eq. (22), se $x = 1$ for um ponto singular de fronteira. Se pelo menos um ponto de fronteira é singular, então a equação diferencial (1), junto com as duas condições de contorno do tipo que acabamos de descrever, forma um **problema de Sturm–Liouville singular**.

Por exemplo, para a Eq. (7) temos $p(x) = x$. Se ambas as funções u e v satisfazem a condição de contorno (14) em $x = 0$, é claro que a Eq. (21) é válida. Logo, o problema de valores de contorno singular, que consiste na equação diferencial (7), na condição de contorno (14) em $x = 0$ e em qualquer condição de contorno da forma (3) em $x = 1$, é autoadjunto.

A diferença mais gritante entre problemas de Sturm–Liouville regulares e singulares é que em um problema singular os autovalores podem não ser discretos. Em outras palavras, o problema pode ter soluções não triviais para todo valor de λ, ou para todo valor de λ em algum intervalo. Em tais casos, diz-se que o problema tem **espectro contínuo**. Pode acontecer que um problema singular tenha uma mistura de autovalores discretos e espectro contínuo. Finalmente, é possível que exista apenas um conjunto discreto de autovalores, como no caso regular discutido na Seção 11.2. Este é o caso, por exemplo, do problema que consiste nas Eqs. (7), (13), (14). Em geral, pode ser difícil determinar o que ocorre, de fato, em um problema dado.

Uma discussão sistemática de problemas de Sturm–Liouville singulares é bastante sofisticada[10] e requer uma extensão considerável dos métodos apresentados neste livro. Vamos nos restringir a alguns exemplos relacionados a aplicações físicas; em cada um desses exemplos, sabe-se que existe um conjunto infinito de autovalores discretos.

Se um problema de Sturm–Liouville singular tem apenas um conjunto discreto de autovalores e autofunções, então a Eq. (17) pode ser usada, como na Seção 11.2, para provar que os autovalores de tal problema são reais e que as autofunções são ortogonais em relação à função peso r. A expansão de uma função dada em uma série de autofunções segue, então, como na Seção 11.2.

Tais expansões são úteis, como no caso regular, para se resolver problemas de valores de contorno não homogêneos. O procedimento é bastante semelhante ao descrito na Seção 11.3. Alguns exemplos para equações diferenciais ordinárias estão indicados nos Problemas de 1 a 4, e alguns problemas para equações diferenciais parciais aparecem na Seção 11.5.

Por exemplo, as autofunções $\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x)$ do problema de Sturm–Liouville singular

$$-(xy')' = \lambda xy, \qquad 0 < x < 1,$$
$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0$$

satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{0}^{1} x\phi_m(x)\phi_n(x)\, dx = 0, \qquad m \neq n \tag{23}$$

[10]Veja, por exemplo, o Capítulo 5 do livro de Yosida listado nas referências no final deste capítulo.

em relação à função peso $r(x) = x$. Então, se f é uma função dada, supomos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x). \tag{24}$$

Multiplicando a Eq. (24) por $xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)$ e integrando termo a termo de $x = 0$ a $x = 1$, obtemos

$$\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x)\, dx. \tag{25}$$

Devido à condição de ortogonalidade (23), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (25) contém um único termo; logo,

$$c_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, dx}{\displaystyle\int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_m}\, x)\, dx}, \tag{26}$$

o que determina os coeficientes na série (24).

A convergência da série (24) é obtida por uma extensão do Teorema 11.2.4 para cobrir este caso. Pode-se mostrar, também, que este teorema é válido para outros conjuntos de funções de Bessel, soluções de problemas de valores de contorno apropriados, para os polinômios de Legendre e para soluções de outros problemas de Sturm–Liouville singulares de interesse considerável.

É preciso enfatizar que os problemas singulares mencionados aqui não são, necessariamente, típicos. Em geral, problemas de valores de contorno singulares são caracterizados por espectro contínuo, em vez de conjuntos de autovalores discretos. O conjunto correspondente de autofunções é, portanto, não enumerável, e não existem expansões em série do tipo descrito no Teorema 11.2.4. Elas são substituídas por representações integrais apropriadas.

PROBLEMAS

1. Encontre uma solução formal para o problema de valores de contorno não homogêneo

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \le x \le 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo associado.

Sugestão: use uma expansão em série semelhante às utilizadas na Seção 11.3.

2. Considere o problema de valores de contorno

$$-(xy')' = \lambda xy,$$

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0.$$

(a) Mostre que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor deste problema com autofunção associada $\phi_0(x) = 1$. Se $\lambda > 0$, mostre, formalmente, que as autofunções são dadas por $\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\, x)$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ é a n-ésima raiz positiva (em ordem crescente) da equação $J_0'(\sqrt{\lambda}) = 0$. É possível mostrar que existe uma sequência infinita de tais raízes.

(b) Mostre que, se $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, então

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\, dx = 0, \qquad m \ne n.$$

(c) Encontre uma solução formal para o problema não homogêneo

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0,$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \le x \le 1$ e μ não é um autovalor do sistema homogêneo associado.

3. Considere o problema

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \lambda xy,$$

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

onde k é um inteiro positivo.

(a) Usando a substituição $t = \sqrt{\lambda}x$, mostre que a equação diferencial dada se reduz a uma equação de Bessel de ordem k (veja o Problema 9 da Seção 5.7). Uma solução é $J_k(t)$; uma segunda solução linearmente independente, denotada por $Y_k(t)$, é ilimitada quando $t \to 0$.

(b) Mostre, formalmente, que os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ do problema dado são os quadrados dos zeros positivos de $J_k(\sqrt{\lambda})$ e que as autofunções correspondentes são $\phi_n(x) = J_k(\sqrt{\lambda_n}x)$. É possível mostrar que existe uma sequência infinita de tais zeros.

(c) Mostre que as autofunções $\phi_n(x)$ satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(d) Determine os coeficientes na expansão formal em série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

(e) Encontre uma solução formal do problema não homogêneo

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \mu xy + f(x),$$
$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

onde f é uma função contínua dada no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo associado.

4. Considere a equação de Legendre (veja os Problemas de 22 a 24 da Seção 5.3)

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y$$

sujeita às condições de contorno

$$y(0) = 0, \qquad y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 1.$$

As autofunções deste problema são os polinômios de Legendre de grau ímpar $\phi_1(x) = P_1(x) = x, \phi_2 = P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \ldots, \phi_n(x) = P_{2n-1}(x), \ldots$, correspondendo aos autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4 \cdot 3, \ldots, \lambda_n = 2n(2n-1), \ldots$.

(a) Mostre que

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(b) Encontre uma solução formal do problema não homogêneo

$$-[(1 - x^2)y']' = \mu y + f(x),$$
$$y(0) = 0, \qquad y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 1,$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo associado.

5. A equação

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0 \tag{i}$$

é a equação de Chebyshev; veja o Problema 10 da Seção 5.3.

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser escrita na forma

$$-[(1 - x^2)^{1/2}y']' = \lambda(1 - x^2)^{-1/2}y, \qquad -1 < x < 1. \tag{ii}$$

(b) Considere as condições de contorno

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to -1, \qquad y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 1. \tag{iii}$$

Mostre que o problema de valores de contorno (ii), (iii) é autoadjunto.

(c) Pode-se mostrar que o problema de valores de contorno (ii), (iii) tem os autovalores $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \ldots, \lambda_n = n^2, \ldots$ As autofunções correspondentes são os polinômios de Chebyshev $T_n(x)$: $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 1 - 2x^2, \ldots$ Mostre que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{(1 - x^2)^{1/2}}\,dx = 0, \qquad m \neq n. \tag{iv}$$

Note que esta é uma integral imprópria convergente.

11.5 Observações Adicionais sobre o Método de Separação de Variáveis: Uma Expansão em Funções de Bessel

Estamos interessados, neste capítulo, em estender o método de separação de variáveis desenvolvido no Capítulo 10 para uma classe maior de problemas — aqueles que envolvem equações diferenciais mais

gerais, condições de contorno mais gerais ou regiões geométricas diferentes. Indicamos, na Seção 11.3, como tratar uma classe mais geral de equações diferenciais ou de condições de contorno. Vamos nos concentrar, aqui, em problemas colocados em diversas regiões geométricas, com ênfase naqueles que nos levam a problemas de Sturm–Liouville singulares quando as variáveis são separadas.

Devido à sua simplicidade relativa, assim como à importância física considerável de muitos problemas onde ele é aplicável, o método de separação de variáveis merece seu lugar importante na teoria e em aplicações de equações diferenciais parciais. No entanto, este método tem determinadas limitações que não devem ser esquecidas. Em primeiro lugar, o problema tem que ser linear, de modo que o princípio de superposição possa ser usado para se construir soluções adicionais, formando-se combinações lineares das soluções fundamentais de um problema homogêneo apropriado.

De um ponto de vista prático, precisamos, também, ser capazes de resolver as equações diferenciais ordinárias obtidas após a separação das variáveis de um modo razoavelmente conveniente. Em alguns problemas onde, em princípio, o método de separação de variáveis poderia ser aplicado, seu valor prático torna-se muito limitado devido à falta de informação sobre as soluções das equações diferenciais ordinárias que aparecem.

Além disso, a geometria da região envolvida no problema fica sujeita a restrições bastante severas. Por um lado, é preciso usar um sistema de coordenadas no qual as variáveis possam ser separadas e a equação diferencial parcial possa ser substituída por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Para a equação de Laplace, existe cerca de uma dúzia de tais sistemas de coordenadas; apenas as coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas devem ser familiares à maioria dos leitores deste livro. Por outro lado, a fronteira da região de interesse tem que ser formada por curvas ou superfícies onde uma das variáveis permanece constante. Assim, em um nível elementar estamos limitados a regiões limitadas por retas ou arcos circulares em duas dimensões, ou por planos, cilindros circulares, cones circulares ou esferas em três dimensões.

Em problemas tridimensionais, a separação de variáveis no operador de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ leva à equação $X'' + \lambda X = 0$ em coordenadas retangulares, à equação de Bessel em coordenadas cilíndricas e à equação de Legendre em coordenadas esféricas. Esse fato é responsável, em grande parte, pelo estudo intensivo que foi feito dessas equações e das funções definidas por elas. Vale a pena observar, também, que duas das três situações mais importantes levam a problemas de Sturm–Liouville singulares, em vez de regulares. Os problemas singulares não são, portanto, excepcionais e podem ter interesse maior do que os regulares. O resto desta seção é dedicado a um exemplo envolvendo a expansão de uma função dada em uma série de funções de Bessel.

Vibrações de uma Membrana Elástica Circular. Na Seção 10.7 [Eq. (7)] observamos que as vibrações transversais de uma membrana elástica fina são governadas pela equação de ondas a duas dimensões

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \tag{1}$$

Para estudar o movimento de uma membrana circular, é conveniente escrever a Eq. (1) em coordenadas polares:

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_{tt}. \tag{2}$$

Vamos supor que a membrana tem raio unitário, que está presa em toda a circunferência e que, inicialmente, ocupa uma posição deslocada da posição de repouso, independente da variável angular θ, de onde é solta no instante $t = 0$. Devido à simetria circular da condição inicial e da condição de contorno, é natural supor que u também é independente de θ, ou seja, que u é uma função, apenas, de r e t. Nesse caso, a equação diferencial (2) fica

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0. \tag{3}$$

A condição de contorno em $r = 1$ é

$$u(1, t) = 0, \qquad t \geq 0, \tag{4}$$

e as condições iniciais são

$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1, \tag{5}$$

$$u_t(r, 0) = 0, \qquad 0 \leq r \leq 1, \tag{6}$$

onde $f(r)$ descreve a configuração inicial da membrana. Por consistência, precisamos também que $f(1) = 0$. Finalmente, enunciamos explicitamente a condição que u é limitada em $0 \le r \le 1$.

Supondo que $u(r, t) = R(r)T(t)$ e substituindo na Eq. (3), obtemos

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda^2. \tag{7}$$

Antecipamos que a constante de separação tem que ser negativa, escrevendo-a como $-\lambda^2$ com $\lambda > 0$.[11] A Eq. (7) nos leva, então, às seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2 r^2 R = 0, \tag{8}$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0. \tag{9}$$

Logo, da Eq. (9),

$$T(t) = k_1 \operatorname{sen}\lambda at + k_2 \cos \lambda at. \tag{10}$$

Definindo uma nova variável independente $\xi = \lambda r$ na Eq. (8), obtemos

$$\xi^2 \frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + \xi^2 R = 0, \tag{11}$$

que é a equação de Bessel de ordem zero. Portanto,

$$R = c_1 J_0(\xi) + c_2 Y_0(\xi), \tag{12}$$

onde J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem zero (veja a Seção 11.4). Em função de r, temos

$$R = c_1 J_0(\lambda r) + c_2 Y_0(\lambda r). \tag{13}$$

A condição de limitação que $u(r, t)$ tem que satisfazer implica que R tem que permanecer limitada quando $r \to 0$. Como $Y_0(\lambda r) \to \infty$ quando $r \to 0$, precisamos escolher $c_2 = 0$. A condição de contorno (4) implica, então, que

$$J_0(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Em consequência, os valores permitidos para a constante de separação são obtidos das raízes da equação transcendental (14). Lembre da Seção 11.4 que $J_0(\lambda)$ tem um conjunto discreto infinito de zeros positivos, que denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \ldots$ em ordem crescente. Além disso, as funções $J_0(\lambda_n r)$ são as autofunções de um problema de Sturm–Liouville singular e podem ser usadas como base para uma expansão em série da função dada f. As soluções fundamentais deste problema, satisfazendo a equação diferencial parcial (3), a condição de contorno (4) e a condição de limitação, são

$$u_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen}\lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$v_n(r, t) = J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Vamos supor, agora, que $u(r, t)$ pode ser expressa como uma combinação linear infinita das soluções fundamentais (15), (16):

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n u_n(r, t) + c_n v_n(r, t)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[k_n J_0(\lambda_n r) \operatorname{sen} \lambda_n at + c_n J_0(\lambda_n r) \cos \lambda_n at\right]. \end{aligned} \tag{17}$$

As condições iniciais implicam que

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r) \tag{18}$$

e que

$$u_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a k_n J_0(\lambda_n r) = 0. \tag{19}$$

[11] Denotando a constante de separação por $-\lambda^2$, em vez de, simplesmente, $-\lambda$, evitamos muitos radicais na discussão a seguir.

Da Eq. (26) da Seção 11.4, obtemos

$$k_n = 0, \qquad c_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)\,dr}{\displaystyle\int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\,dr}; \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Logo, a solução da equação diferencial parcial (3) que satisfaz a condição de contorno (4) e as condições iniciais (5) e (6) é dada por

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)\,\cos\lambda_n at \tag{21}$$

com os coeficientes c_n definidos pela Eq. (20).

PROBLEMAS

1. Considere a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ no paralelogramo cujos vértices são (0, 0), (2, 0), (3, 2) e (1, 2). Suponha que a condição de contorno no lado $y = 2$ é $u(x, 2) = f(x)$ para $1 \le x \le 3$ e que, nos três outros lados, $u = 0$ (veja a Figura 11.5.1).

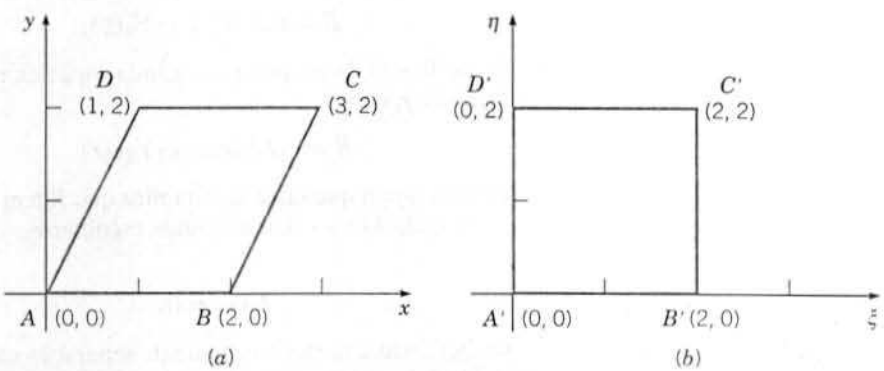


FIGURA 11.5.1 A região no Problema 1.

   (a) Mostre que não existem soluções não triviais da equação diferencial parcial da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ que satisfaçam, também, as condições de contorno homogêneas.

   (b) Sejam $\xi = x - \frac{1}{2}y$, $\eta = y$. Mostre que o paralelogramo dado no plano xy é transformado no quadrado $0 \le \xi \le 2, 0 \le \eta \le 2$ no plano $\xi\eta$. Mostre que a equação diferencial é transformada em

$$\tfrac{5}{4}u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$

   Como as condições de contorno são transformadas?

   (c) Mostre que, no plano $\xi\eta$, a equação diferencial não tem soluções da forma

$$u(\xi, \eta) = U(\xi)V(\eta).$$

   Assim, no plano xy, a forma da fronteira impede que se encontre uma solução pelo método de separação de variáveis, enquanto no plano $\xi\eta$, a região é aceitável, mas as variáveis da equação diferencial não podem mais ser separadas.

2. Encontre o deslocamento $u(r, t)$ de uma membrana circular elástica de raio 1 em vibração satisfazendo a condição de contorno

$$u(1, t) = 0, \qquad t \ge 0,$$

   e as condições iniciais

$$u(r, 0) = 0, \qquad u_t(r, 0) = g(r), \qquad 0 \le r \le 1,$$

   onde $g(1) = 0$.

   Sugestão: a equação diferencial a ser satisfeita é a Eq. (3) desta seção.

3. Encontre o deslocamento $u(r, t)$ de uma membrana circular elástica de raio 1 em vibração satisfazendo a condição de contorno

$$u(1,t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

e as condições iniciais

$$u(r,0) = f(r), \qquad u_t(r,0) = g(r), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$

onde $f(1) = g(1) = 0$.

4. A equação de onda em coordenadas polares é

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Mostre que, se $u(r,\theta,t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, então R, Θ e T satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$T'' + \lambda^2a^2T = 0.$$

5. Em coordenadas cilíndricas r, θ, z, definidas por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = z,$$

a equação de Laplace fica

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$

(a) Mostre que se $u(r,\theta,z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, então R, Θ e Z satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$Z'' - \lambda^2Z = 0.$$

(b) Mostre que, se $u(r,\theta,z)$ é independente de θ, então a primeira equação no item (a) fica

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R = 0,$$

a segunda é totalmente omitida e a terceira permanece inalterada.

6. Encontre a temperatura estado estacionário em uma barra semi-infinita $0 < z < \infty$, $0 \leq r < 1$, se a temperatura é independente de θ e tende a zero quando $z \to \infty$. Suponha que a temperatura $u(r,z)$ satisfaz as condições de contorno

$$u(1,z) = 0, \qquad z > 0,$$
$$u(r,0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1.$$

Sugestão: Veja o Problema 5.

7. A equação

$$v_{xx} + v_{yy} + k^2v = 0$$

é uma generalização da equação de Laplace, chamada, algumas vezes, de equação de Helmholtz.[12]

(a) Em coordenadas polares, a equação de Helmholtz fica

$$v_{rr} + (1/r)v_r + (1/r^2)v_{\theta\theta} + k^2v = 0.$$

Se $v(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, mostre que R e Θ satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$r^2R'' + rR' + (k^2r^2 - \lambda^2)R = 0, \qquad \Theta'' + \lambda^2\Theta = 0.$$

(b) Considere a equação de Helmholtz no disco $r < c$. Encontre a solução que permanece limitada em todos os pontos do disco, que é periódica em θ com período 2π e satisfaz a condição de contorno $v(c, \theta) = f(\theta)$, onde f é uma função dada em $0 \leq \theta < 2\pi$.

Sugestão: a equação para R é uma equação de Bessel. Veja o Problema 3 na Seção 11.4.

[12]Hermann von Helmholtz (1821-1894) estudou medicina e fisiologia; no início de sua carreira fez contribuições importantes em óptica e acústica fisiológicas, incluindo a invenção do oftalmoscópio em 1851. Mais tarde seus interesses mudaram para a física, especialmente mecânica dos fluidos e eletrodinâmica. Durante sua vida, foi catedrático de fisiologia ou de física em diversas universidades alemãs.

8. Considere o fluxo de calor em um cilindro de comprimento infinito e raio 1: $0 \le r < 1$, $0 \le \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Suponha que a superfície do cilindro é mantida à temperatura zero e que a distribuição inicial de temperatura é uma função que só depende da variável radial r. Então, a temperatura u só depende de r e t e satisfaz a equação de calor

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r] = u_t, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$

e as seguintes condições inicial e de contorno:

$$u(r,0) = f(r), \qquad 0 \le r \le 1,$$

$$u(1,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Mostre que

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) e^{-\alpha^2 \lambda_n^2 t},$$

onde $J_0(\lambda_n) = 0$. Encontre uma fórmula para c_n.

9. Em coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ ($\rho > 0, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \phi \le \pi$), definidas por

$$x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho \cos\phi,$$

a equação de Laplace fica

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + (\csc^2\phi) u_{\theta\theta} + u_{\phi\phi} + (\cot\phi) u_\phi = 0.$$

(a) Mostre que, se $u(\rho, \theta, \phi) = P(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, então P, Θ e Φ satisfazem equações diferenciais ordinárias da forma

$$\rho^2 \mathrm{P}'' + 2\rho \mathrm{P}' - \mu^2 \mathrm{P} = 0,$$

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0,$$

$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2 \operatorname{sen}^2\phi - \lambda^2)\Phi = 0.$$

A primeira destas equações é do tipo de Euler, enquanto a terceira está relacionada à equação de Legendre.

(b) Mostre que se $u(\rho, \theta, \phi)$ é independente de θ, então a primeira equação no item (a) permanece inalterada, a segunda é omitida e a terceira fica

$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2 \operatorname{sen}^2\phi)\Phi = 0.$$

(c) Mostre que se definirmos uma nova variável independente por $s = \cos\phi$, então a equação para Φ no item (b) fica

$$(1 - s^2)\frac{d^2\Phi}{ds^2} - 2s\frac{d\Phi}{ds} + \mu^2\Phi = 0, \qquad -1 \le s \le 1.$$

Note que esta é a equação de Legendre.

10. Encontre a temperatura estado estacionário $u(\rho, \phi)$ na esfera de raio unitário se a temperatura é independente de θ e satisfaz a condição de contorno

$$u(1,\phi) = f(\phi), \qquad 0 \le \phi \le \pi.$$

Sugestão: Veja o Problema 9 e os Problemas de 22 a 29 da Seção 5.3. Use o fato de que só as soluções da equação de Legendre que são finitas em ambos os pontos ± 1 é que são polinômios de Legendre.

11.6 Séries em Funções Ortogonais: Convergência na Média

Na Seção 11.2 afirmamos que, sob certas condições, uma função dada f pode ser expandida em uma série em autofunções de um problema de Sturm–Liouville de valores de contorno e que a série converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em cada ponto do intervalo aberto. Sob condições um pouco mais restritivas, a série converge para $f(x)$ em todos os pontos do intervalo fechado. Este tipo de convergência é conhecido como convergência pontual. Nesta seção vamos descrever um tipo diferente de convergência, especialmente útil para séries em funções ortogonais, tais como autofunções.

Suponha que temos um conjunto de funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, que são contínuas e satisfazem a condição de ortogonalidade

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \ne j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \tag{1}$$

onde r é uma função peso não negativa. Suponha, também, que queremos aproximar uma função dada f, definida em $0 \le x \le 1$, por uma combinação linear de $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Ou seja, se

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x), \tag{2}$$

queremos escolher coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ de modo que a função S_n forneça a melhor aproximação possível de f em $0 \le x \le 1$. O primeiro problema que encontramos é enunciar, precisamente, o que queremos dizer com "a melhor aproximação possível de f em $0 \le x \le 1$". Existem diversos significados razoáveis que podem ser dados a esta frase.

1. Podemos escolher n pontos $x_1, \ldots, x_n$ no intervalo $0 \le x \le 1$ e exigir que $S_n(x)$ tenha o mesmo valor que $f(x)$ em cada um desses pontos. Os coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ são encontrados resolvendo-se o seguinte conjunto de equações lineares algébricas:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x_j) = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

   Este procedimento é conhecido como o **método da colocação**. Ele tem a vantagem de que é muito fácil escrever as Eqs. (3); é preciso, apenas, calcular as funções envolvidas nos pontos $x_1, \ldots, x_n$. Se esses pontos forem bem escolhidos e se n for bem grande, presume-se que $S_n(x)$ não será, apenas, igual a $f(x)$ nos pontos escolhidos, mas estará, também, razoavelmente próximo em todos os outros pontos. No entanto, a colocação tem diversas desvantagens. Uma é que se for adicionada mais uma função básica ϕ_{n+1}, será necessário mais um ponto x_{n+1} e *todos* os coeficientes terão que ser recalculados. Isto significa que não é conveniente melhorar a precisão de uma aproximação pelo método de colocação incluindo-se termos adicionais. Além disso, os coeficientes a_i dependem dos pontos $x_1, \ldots, x_n$, e não é óbvio qual o melhor modo de selecionar esses pontos.
2. De modo alternativo, podemos considerar a diferença $|f(x) - S_n(x)|$ e tentar torná-la a menor possível. O problema aqui é que $|f(x) - S_n(x)|$ é uma função de x e dos coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, e não é claro como calcular os a_i. A escolha dos a_i que torna $|f(x) - S_n(x)|$ menor em um ponto pode torná-lo maior em outro. Um modo de proceder pode ser considerar, então, o supremo[1] de $|f(x) - S_n(x)|$ para x em $0 \le x \le 1$ e escolher $a_1, \ldots, a_n$ de modo a tornar esta quantidade a menor possível. Ou seja, se

$$E_n(a_1, \ldots, a_n) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - S_n(x)|, \tag{4}$$

   escolha $a_1, \ldots, a_n$ de modo a minimizar E_n. Este método é intuitivamente muito bom e é usado, com frequência, nos cálculos teóricos. No entanto, na prática em geral é muito difícil, se não impossível, escrever uma fórmula explícita para $E_n(a_1, \ldots, a_n)$. Além disso, este procedimento tem uma desvantagem em comum com a colocação: ao se adicionar um termo a $S_n(x)$, temos que recalcular todos os coeficientes precedentes. Por isso não é muito usado em problemas práticos.
3. Outro modo de proceder é considerar

$$I_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)|f(x) - S_n(x)|\,dx. \tag{5}$$

   Se $r(x) = 1$, então I_n é a área entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = S_n(x)$ (veja a Figura 11.6.1). Podemos então determinar os coeficientes a_i de modo a minimizar I_n. Para evitar complicações resultantes da utilização de valores absolutos, é mais conveniente considerar, em vez disso,

$$R_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]^2\,dx \tag{6}$$

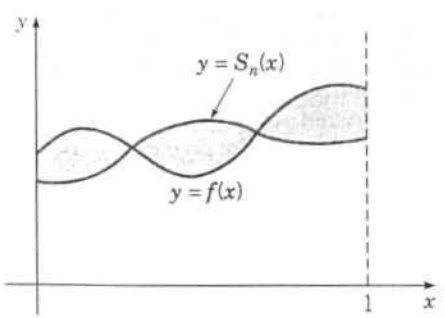


FIGURA 11.6.1 Aproximação de $f(x)$ por $S_n(x)$.

[1] O supremo (sup) é uma cota superior que é menor do que todas as outras cotas superiores. O sup de uma função limitada sempre existe e é igual ao máximo da função, se ela tiver máximo.

como nossa medida da qualidade da aproximação de $f(x)$ pela combinação linear $S_n(x)$. Embora R_n seja claramente semelhante a I_n sob alguns aspectos, não tem a interpretação geométrica simples de I_n. Apesar disso, matematicamente é muito mais fácil trabalhar com R_n do que com I_n. A quantidade R_n é chamada de **erro médio quadrático** da aproximação de f por S_n. Se $a_1, \ldots, a_n$ forem escolhidas de modo a minimizar R_n, diremos que S_n aproxima f no sentido da média quadrática.

Para escolher $a_1, \ldots, a_n$ de modo a minimizar R_n, precisamos satisfazer as condições necessárias

$$\partial R_n/\partial a_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Escrevendo a Eq. (7) e observando que $\partial S_n(x; a_1, \ldots, a_n)/\partial a_i$ é igual a $\phi_i(x)$, obtemos

$$-\frac{\partial R_n}{\partial a_i} = 2\int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]\phi_i(x)\,dx = 0. \tag{8}$$

Substituindo $S_n(x)$ pela expressão dada na Eq. (2) e usando a relação de ortogonalidade (1), temos

$$a_i = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_i(x)\,dx, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Os coeficientes definidos pela Eq. (9) são chamados de coeficientes de Fourier de f em relação ao conjunto ortonormal $\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n$ e à função peso r. Como as condições (7) são apenas necessárias e não suficientes, para que R_n seja um mínimo é preciso um argumento separado para se mostrar que, de fato, R_n é minimizado se os a_i forem escolhidos pela Eq. (9). Este argumento está esboçado no Problema 5.

Note que os coeficientes (9) são os mesmos da expansão em série de autofunções cuja convergência, sob certas condições, foi enunciada no Teorema 11.2.4. Assim, $S_n(x)$ é a n-ésima soma parcial desta série e constitui a melhor aproximação de $f(x)$ na média quadrática que é possível com as funções $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Vamos supor, daqui em diante, que os coeficientes a_i em $S_n(x)$ são dados pela Eq. (9).

A relevância da Eq. (9) tem dois outros aspectos importantes. Em primeiro lugar ela fornece uma fórmula para cada a_i *separadamente*, em vez de como um conjunto de equações algébricas para $a_1, \ldots, a_n$, como o método da colocação, por exemplo. Isso se deve à ortogonalidade das funções básicas $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Além disso, a fórmula para a_i é *independente* de n, o número de termos em $S_n(x)$. O significado prático disso é o seguinte: suponha que para se obter uma melhor aproximação para f desejamos usar uma aproximação com um número maior de termos — digamos k termos, com $k > n$. Então, não há necessidade de se recalcular os n primeiros coeficientes em $S_k(x)$. Basta calcular, usando a Eq. (9), os coeficientes $a_{n+1}, \ldots, a_k$ que apareceram devido às funções básicas adicionais $\phi_{n+1}, \ldots, \phi_k$. É claro que se as funções f, r e ϕ_n forem complicadas, pode ser necessário calcular as integrais numericamente.

Vamos supor agora que existe uma sequência infinita de funções $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$, contínuas e ortonormais no intervalo $0 \le x \le 1$. Suponha, além disso, que quando n cresce sem limite o erro médio quadrático R_n tende a zero. Nesse caso, dizemos que a série infinita

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i(x)$$

converge **na média quadrática** (ou, simplesmente, na **média**) para $f(x)$. Convergência na média é um tipo de convergência essencialmente diferente da convergência pontual considerada até agora. Uma série pode convergir na média sem convergir em cada ponto. Isto é plausível, geometricamente, já que a área entre as duas curvas, que se comporta do mesmo modo que o erro médio quadrático, pode ser zero mesmo que as funções não sejam iguais em todos os pontos. Elas podem diferir em qualquer conjunto finito, por exemplo, sem afetar o erro médio quadrático. É menos óbvio, mas também verdadeiro, que mesmo que uma série convirja em todos os pontos ela pode não convergir na média. De fato, o erro médio quadrático pode até tornar-se ilimitado. Um exemplo desse fenômeno é dado no Problema 4.

Suponha que queremos saber quais as funções, definidas no intervalo $0 \le x \le 1$, que podem ser representadas por uma série infinita do conjunto ortonormal ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots$ A resposta depende do tipo de convergência que queremos. Dizemos que o conjunto $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ é **completo** em relação à convergência na média quadrática para um conjunto de funções $\mathcal{F}$ se, para cada função f em $\mathcal{F}$, a série

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i(x), \tag{10}$$

com os coeficientes dados pela Eq. (9) converge na média. Existe uma definição semelhante para o completamento em relação à convergência pontual.

Teoremas relacionados à convergência de séries como as da Eq. (10) podem ser reformulados em função da idéia de completamento. Por exemplo, o Teorema 11.2.4 pode ser enunciado da seguinte maneira: as autofunções do problema de Sturm–Liouville

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \tag{11}$$

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0 \tag{12}$$

são completas em relação à convergência pontual usual para o conjunto de funções contínuas em $0 \le x \le 1$ com derivada seccionalmente contínua neste mesmo intervalo.

Se a convergência pontual for substituída por convergência na média, o Teorema 11.2.4 poderá ser bastante generalizado. Antes de enunciar tal teorema, análogo ao Teorema 11.2.4, precisamos definir o que é uma função de quadrado integrável. Uma função f é dita de **quadrado integrável** no intervalo $0 \le x \le 1$ se ambas, f e f^2, são integráveis[14] nesse intervalo. O teorema a seguir é semelhante ao Teorema 11.2.4, exceto que envolve convergência na média.

Teorema 11.6.1 As autofunções ϕ_i do problema de Sturm–Liouville (11), (12) são completas em relação à convergência na média para o conjunto de funções que são de quadrado integrável em $0 \le x \le 1$. Em outras palavras, dada qualquer função de quadrado integrável f, a série (10), com os coeficientes dados pela Eq. (9), converge para $f(x)$ na média quadrática.

A classe de funções especificadas no Teorema 11.6.1 é, de fato, muito grande. A classe de funções de quadrado integrável inclui funções com muitas descontinuidades, inclusive alguns tipos de descontinuidades infinitas, assim como funções que não são diferenciáveis em ponto algum. Todas essas funções podem ser expandidas em séries de autofunções do problema de Sturm–Liouville (11), (12) que convergem na média. No entanto, em muitos casos essas séries não convergem pontualmente, pelo menos não em todos os pontos. Assim, é mais natural associar a convergência na média a séries de funções ortogonais, como autofunções, do que à convergência pontual.

A teoria de séries de Fourier discutida no Capítulo 10 é simplesmente um caso particular da teoria geral de problemas de Sturm–Liouville. Por exemplo, as funções

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\,\operatorname{sen} n\pi x \tag{13}$$

são as autofunções normalizadas do problema de Sturm–Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{14}$$

Logo, se f é uma função dada de quadrado integrável em $0 \le x \le 1$, então, de acordo com o Teorema 11.6.1, a série

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \phi_m(x) = \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \operatorname{sen} m\pi x, \tag{15}$$

onde

$$b_m = \int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\,\operatorname{sen} m\pi x\,dx, \tag{16}$$

converge na média. A série (15) é precisamente a série de Fourier em senos discutida na Seção 10.4. Se f satisfizer as condições mais fortes enunciadas no Teorema 11.2.4, então esta série converge pontualmente, além de convergir na média. Analogamente, uma série de Fourier em cossenos está associada ao problema de Sturm–Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \tag{17}$$

EXEMPLO 1 Seja $f(x) = 1$ para $0 < x < 1$. Expanda $f(x)$ usando as autofunções (13) e discuta a convergência, pontual e na média, da série resultante.

A série tem a forma (15) e seus coeficientes b_m são dados pela Eq. (16). Logo,

$$b_m = \sqrt{2}\int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x\,dx = \frac{\sqrt{2}}{m\pi}(1 - \cos m\pi), \tag{18}$$

[14]Para a integral de Riemann usada no cálculo elementar, as hipóteses de que f e f^2 são integráveis são independentes, ou seja, existem funções f tais que f é integrável e f^2 não é, e vice-versa (veja o Problema 6). Uma integral generalizada, conhecida como a integral de Lebesgue, tem a propriedade (entre outras) que, se f^2 é integrável, então f também o é. A expressão *de quadrado integrável* tornou-se usual em conexão com esse tipo de integração.

e a n-ésima soma parcial da série é

$$S_n(x) = 2\sum_{m=1}^{n} \frac{1-\cos m\pi}{m\pi} \operatorname{sen} m\pi x. \tag{19}$$

O erro médio quadrático é

$$R_n = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\, dx. \tag{20}$$

Calculando R_n para diversos valores de n e fazendo um gráfico do resultado, obtemos a Figura 11.6.2. Esta figura indica que R_n decresce sempre que n cresce. É claro, o Teorema 11.6.1 afirma que $R_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Pontualmente, sabemos que $S_n(x) \to f(x) = 1$ quando $n \to \infty$; além disso, $S_n(x)$ tem o valor nulo em $x = 0$ e $x = 1$ para todo n. Embora a série convirja pontualmente para cada valor de x, o supremo do erro não diminui quando n aumenta. Para cada n, existem pontos arbitrariamente próximos de $x = 0$ e de $x = 1$ onde o erro está arbitrariamente próximo de 1.

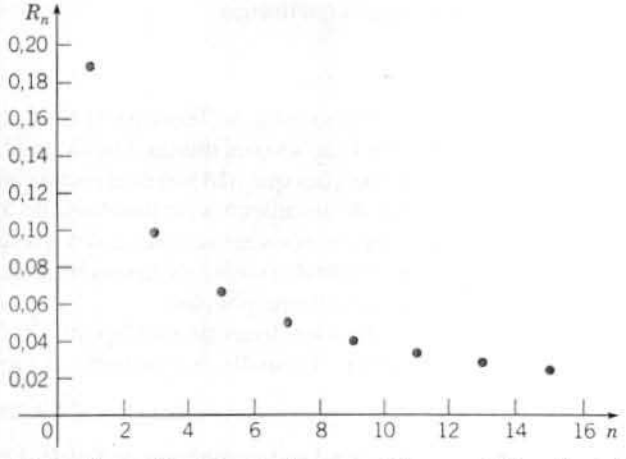


FIGURA 11.6.2 Dependência em n do erro médio quadrático R_n no Exemplo 1.

O Teorema 11.6.1 pode ser estendido para cobrir problemas de valores de contorno autoadjuntos com condições de contorno periódicas, tais como o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{21}$$

$$y(-L) - y(L) = 0, \qquad y'(-L) - y'(L) = 0 \tag{22}$$

considerado no Exemplo 4 da Seção 11.2. As autofunções do problema (21), (22) são $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ para $n = 1, 2, \ldots$ Se f for uma função dada de quadrado integrável em $-L \le x \le L$, então sua expansão nas autofunções ϕ_n e ψ_n é da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \right), \tag{23}$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Esta expansão é exatamente a série de Fourier de f discutida nas Seções 10.2 e 10.3. De acordo com a generalização do Teorema 11.6.1, a série (23) converge na média, qualquer que seja a função de quadrado integrável f, embora f possa não satisfazer as condições do Teorema 10.3.1, que garante convergência pontual.

PROBLEMAS

1. Estenda os resultados do Exemplo 1 encontrando o menor valor de n para o qual $R_n < 0{,}02$, onde R_n é dado pela Eq. (20).
2. Seja $f(x) = x$ para $0 < x < 1$ e seja $\phi_m(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,m\pi x$.
   (a) Encontre os coeficientes b_m na expansão de $f(x)$ em termos de $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$.
   (b) Calcule o erro médio quadrático R_n para diversos valores de n e faça um gráfico dos resultados.
   (c) Encontre o menor valor de n para o qual $R_n < 0{,}01$.
3. Siga as instruções do Problema 2 usando $f(x) = x(1 - x)$ para $0 < x < 1$.
4. Vamos mostrar, neste problema, que a convergência pontual de uma sequência $S_n(x)$ não implica convergência na média, e reciprocamente.
   (a) Seja $S_n(x) = n\sqrt{x}e^{-n\pi^2/2}$, $0 \le x \le 1$. Mostre que $S_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para cada x em $0 \le x \le 1$. Mostre, também, que
   $$R_n = \int_0^1 [0 - S_n(x)]^2\,dx = \frac{n}{2}(1 - e^{-n})$$
   e, portanto, $R_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, a convergência pontual não implica convergência na média.
   (b) Seja $S_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ e seja $f(x) = 0$ para $0 \le x \le 1$. Mostre que
   $$R_n = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\,dx = \frac{1}{2n+1},$$
   e, portanto, $S_n(x)$ converge para $f(x)$ na média. Mostre, também, que $S_n(x)$ não converge para $f(x)$ pontualmente em $0 \le x \le 1$. Logo, a convergência na média não implica convergência pontual.
5. Suponha que as funções $\phi_1, \ldots, \phi_n$ satisfazem a relação de ortogonalidade (1) e que uma função dada $f(x)$ deve ser aproximada por $S_n(x) = c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$, onde os coeficientes c_n não são, necessariamente, os da Eq. (9). Mostre que o erro médio quadrático R_n dado pela Eq. (6) pode ser escrito na forma
   $$R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i)^2,$$
   onde os a_i são os coeficientes de Fourier dados pela Eq. (9). Mostre que R_n é minimizado se $c_i = a_i$ para cada i.
6. Vamos mostrar, neste problema, através de exemplos, que a integrabilidade (no sentido de Riemann) de f e de f^2 é independente.
   (a) Seja $f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
   Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe como uma integral imprópria, mas $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx$ não existe.
   (b) Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional}, \\ -1, & x \text{ irracional}. \end{cases}$
   Mostre que $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx$ existe, mas $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ não existe.
7. Suponha que queremos construir um conjunto de polinômios ortonormais no intervalo $0 \le x \le 1$, $f_0(x)$, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$, onde $f_k(x)$ tem grau k. Em outras palavras, os polinômios têm que satisfazer
   $$(f_j, f_k) = \int_0^1 f_j(x)f_k(x)\,dx = \delta_{jk}.$$
   (a) Encontre $f_0(x)$ escolhendo o polinômio de grau zero tal que $(f_0, f_0) = 1$.
   (b) Encontre $f_1(x)$ determinando o polinômio de grau um tal que $(f_0, f_1) = 0$ e $(f_1, f_1) = 1$.
   (c) Encontre $f_2(x)$.
   (d) A condição de normalização $(f_k, f_k) = 1$ é um tanto complicada de se usar. Seja $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x), \ldots$ a sequência de polinômios ortogonais em $0 \le x \le 1$ normalizados pela condição $g_k(1) = 1$. Encontre $g_0(x), g_1(x)$ e $g_2(x)$ e compare com $f_0(x), f_1(x)$ e $f_2(x)$.
8. Suponha que queremos construir um conjunto de polinômios ortogonais no intervalo $-1 \le x \le 1$, $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots, P_k(x), \ldots$, onde $P_k(x)$ tem grau k; veja o Problema 7. Suponha, além disso, que $P_k(x)$ é normalizada pela condição $P_k(1) = 1$. Encontre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$. Note que estes são os quatro primeiros polinômios de Legendre (veja o Problema 24 da Seção 5.3).
9. Este problema desenvolve outros resultados associados à convergência na média. Sejam $R_n(a_1, \ldots, a_n)$, $S_n(x)$ e a_i definidos pelas Eq. (6), (2) e (9), respectivamente.
   (a) Mostre que

$$R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Sugestão: substitua S_n na Eq. (6) pela soma e integre, usando a relação de ortogonalidade (1).

(b) Mostre que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx$. Este resultado é conhecido como a desigualdade de Bessel.

(c) Mostre que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ converge.

(d) Mostre que $\lim_{n\to\infty} R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$.

(e) Mostre que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i\phi_i(x)$ converge para $f(x)$ na média se, e somente se,

$$\int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

Esse resultado é conhecido como a equação de Parseval.

Nos Problemas de 10 a 12, sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas do problema de Sturm–Liouville (11), (12).

10. Mostre que se a_n é o n-ésimo coeficiente de Fourier de uma função de quadrado integrável f, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Sugestão: use a desigualdade de Bessel, Problema 9(b).

11. Mostre que a série

$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots + \phi_n(x) + \cdots$$

não pode ser uma série de autofunções para nenhuma função de quadrado integrável.

Sugestão: veja o Problema 10.

12. Mostre que a série

$$\phi_1(x) + \frac{\phi_2(x)}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{n}} + \cdots$$

não pode ser uma série de autofunções para nenhuma função de quadrado integrável.

Sugestão: use a desigualdade de Bessel, Problema 9(b).

13. Mostre que a equação de Parseval no Problema 9(e) é obtida formalmente elevando-se ao quadrado a série (10) correspondente a f, multiplicando pela função peso r e integrando termo a termo.

REFERÊNCIAS

Os livros a seguir foram mencionados no texto em conexão com determinados teoremas sobre problemas de Sturm–Liouville:

Birkhoff, G., and Rota, G.-C., *Ordinary Differential Equations* (4th ed.) (New York: Wiley, 1989).

Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (New York: Wiley, 1961; New York: Dover, 1989).

Weinberger, H., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Wiley, 1965; New York: Dover, 1995).

Yosida, K., *Lectures on Differential and Integral Equations* (New York: Wiley-Interscience, 1960; New York: Dover, 1991).

Os livros a seguir são fontes convenientes para dados numéricos ou gráficos sobre funções de Bessel e de Legendre:

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965); originally published by the National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.

Jahnke, E., and Emde, F., *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig: Teubner, 1938; New York: Dover, 1945).

Os livros a seguir também contêm muita informação sobre problemas de Sturm–Liouville:

Cole, R. H., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Irvington, 1968).

Hochstadt, H., *Differential Equations: A Modern Approach* (New York: Holt, 1964; New York: Dover, 1975).

Miller, R. K., and Michel, A. N., *Ordinary Differential Equations* (New York: Academic Press, 1982).

Tricomi, F. G., *Differential Equations* (New York: Hafner, 1961).

Respostas dos Problemas

CAPÍTULO 1

Seção 1.1

1. $y \to 3/2$ quando $t \to \infty$
2. y se afasta de $3/2$ quando $t \to \infty$
3. y se afasta de $-3/2$ quando $t \to \infty$
4. $y \to -1/2$ quando $t \to \infty$
5. y se afasta de $-1/2$ quando $t \to \infty$
6. y se afasta de -2 quando $t \to \infty$
7. $y' = 3 - y$
8. $y' = 2 - 3y$
9. $y' = y - 2$
10. $y' = 3y - 1$
11. $y = 0$ e $y = 4$ são soluções de equilíbrio; $y \to 4$ se o valor inicial é positivo; y se afasta de 0 se o valor inicial é negativo.
12. $y = 0$ e $y = 5$ são soluções de equilíbrio; y se afasta de 5 se o valor inicial é maior do que 5; $y \to 0$ se o valor inicial é menor do que 5.
13. $y = 0$ é solução de equilíbrio; $y \to 0$ se o valor inicial é negativo; y se afasta de 0 se o valor inicial é positivo.
14. $y = 0$ e $y = 2$ são soluções de equilíbrio; y se afasta de 0 se o valor inicial é negativo; $y \to 2$ se o valor inicial está entre 0 e 2; y se afasta de 2 se o valor inicial é maior do que 2.
15. (j) 16. (c) 17. (g) 18. (b) 19. (h) 20. (e)
21. (a) $dq/dt = 300(10^{-2} - q10^{-6})$; q em g, t em h
    (b) $q \to 10^4$ g; não
22. $dV/dt = -kV^{2/3}$ para algum $k > 0$.
23. $du/dt = -0{,}05(u - 70)$; u sen °F, t em minutos
24. (a) $dq/dt = 500 - 0{,}4q$; q em mg, t em h (b) $q \to 1250$ mg
25. (a) $mv' = mg - kv^2$ (b) $v \to \sqrt{mg/k}$
    (c) $k = 2/49$
26. y é assintótico a $t - 3$ quando $t \to \infty$
27. $y \to 0$ quando $t \to \infty$
28. $y \to \infty$, 0 ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y
29. $y \to \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y
30. $y \to \infty$ ou $-\infty$ ou y oscila, dependendo do valor inicial de y
31. $y \to -\infty$ ou é assintótico a $\sqrt{2t - 1}$, dependendo do valor inicial de y
32. $y \to 0$ e então deixa de existir depois de algum instante $t_f \geq 0$
33. $y \to \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y

Seção 1.2

1. (a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-t}$ (b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{-2t}$
   (c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-2t}$
   A solução de equilíbrio é $y = 5$ em (a) e (c), $y = 5/2$ em (b); a solução tende ao equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).
2. (a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{t}$ (b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{2t}$
   (c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{2t}$
   A solução de equilíbrio é $y = 5$ em (a) e (c), $y = 5/2$ em (b); a solução se afasta do equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).

3. (a) $y = ce^{-at} + (b/a)$
   (c) (i) O equilíbrio é mais baixo e é aproximado mais rapidamente. (ii) O equilíbrio é mais alto. (iii) O equilíbrio permanece o mesmo e é aproximado mais rapidamente.
4. (a) $y_e = b/a$ (b) $Y' = aY$
5. (a) $y_1(t) = ce^{at}$ (b) $y = ce^{at} + (b/a)$
6. $y = ce^{-at} + (b/a)$
7. (a) $T = 2 \ln 18 \cong 5{,}78$ meses (b) $T = 2 \ln[900/(900 - p_0)]$ meses
   (c) $p_0 = 900(1 - e^{-6}) \cong 897{,}8$
8. (a) $r = (\ln 2)/30$ dias^{-1} (b) $r = (\ln 2)/N$ dia^{-1}
9. (a) $T = 5 \ln 50 \cong 19.56$ s (b) 718,34 m
10. (a) $dv/dt = 9{,}8, \quad v(0) = 0$ (b) $T = \sqrt{300/4{,}9} \cong 7{,}82$ s
    (c) $v \cong 76{,}68$ m/s
11. (b) $v = 49 \tanh(t/5)$ m/s (e) $x = 245 \ln \cosh(t/5)$ m
    (f) $T \cong 9{,}48$ s
12. (a) $r \cong 0{,}02828$ dia^{-1} (b) $Q(t) = 100e^{-0.02828t}$
    (c) $T \cong 24{,}5$ dias
14. $1620 \ln(4/3)/\ln 2 \cong 672{,}4$ anos
15. (a) $u = T + (u_0 - T)e^{-kt}$ (b) $k\tau = \ln 2$
16. 6,69 h
17. (a) $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$ (b) $Q(t) \to CV = Q_L$
    (c) $Q(t) = CV \exp[-(t - t_1)/RC]$
18. (a) $Q' = 3(1 - 10^{-4}Q), \quad Q(0) = 0$
    (b) $Q(t) = 10^4(1 - e^{-3t/10^4})$, t em h; depois de 1 ano $Q \cong 9277{,}77$ g
    (c) $Q' = -3Q/10^4, \quad Q(0) = 9277{,}77$
    (d) $Q(t) = 9277{,}77e^{-3t/10^4}$, t em h; depois de 1 ano $Q \cong 670{,}07$ g
    (e) $T \cong 2{,}60$ anos
19. (a) $q' = -q/300, \quad q(0) = 5000$ g (b) $q(t) = 5000e^{-t/300}$
    (c) não (d) $T = 300 \ln(25/6) \cong 428{,}13$ min $\cong 7{,}136$ h
    (e) $r = 250 \ln(25/6) \cong 356{,}78$ gal/min

Seção 1.3

1. Segunda ordem, linear
2. Segunda ordem, não linear
3. Quarta ordem, linear
4. Primeira ordem, não linear
5. Segunda ordem, não linear
6. Terceira ordem, linear
15. $r = -2$
16. $r = \pm 1$
17. $r = 2, -3$
18. $r = 0, 1, 2$
19. $r = -1, -2$
20. $r = 1, 4$
21. Segunda ordem, linear
22. Segunda ordem, não linear
23. Quarta ordem, linear
24. Segunda ordem, não linear

CAPÍTULO 2

Seção 2.1

1. (c) $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$; y é assintótica a $t/3 - 1/9$ quando $t \to \infty$
2. (c) $y = ce^{2t} + t^3e^{2t}/3$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
3. (c) $y = ce^{-t} + 1 + t^2e^{-t}/2$; $y \to 1$ quando $t \to \infty$
4. (c) $y = (c/t) + (3 \cos 2t)/4t + (3 \operatorname{sen} 2t)/2$; y é assintótica a $(3 \operatorname{sen} 2t)/2$ quando $t \to \infty$
5. (c) $y = ce^{2t} - 3e^t$; $y \to \infty$ ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
6. (c) $y = (c - t \cos t + \operatorname{sen} t)/t^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
7. (c) $y = t^2e^{-t^2} + ce^{-t^2}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
8. (c) $y = (\arctan t + c)/(1 + t^2)^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
9. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$; y é assintótica a $3t - 6$ quando $t \to \infty$
10. (c) $y = -te^{-t} + ct$; $y \to \infty, 0$, ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
11. (c) $y = ce^{-t} + \operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t$; y é assintótica a $\operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t$ quando $t \to \infty$
12. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t^2 - 12t + 24$; y é assintótica a $3t^2 - 12t + 24$ quando $t \to \infty$
13. $y = 3e^t + 2(t - 1)e^{2t}$
14. $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$
15. $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$
16. $y = (\operatorname{sen} t)/t^2$
17. $y = (t + 2)e^{2t}$
18. $y = t^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - t \cos t + \operatorname{sen} t]$
19. $y = -(1 + t)e^{-t}/t^4, \quad t \neq 0$
20. $y = (t - 1 + 2e^{-t})/t, \quad t \neq 0$

21. (b) $y = -\frac{4}{5}\cos t + \frac{8}{5}\operatorname{sen} t + (a + \frac{4}{5})e^{t/2}$; $a_0 = -\frac{4}{5}$
    (c) y oscila para $a = a_0$
22. (b) $y = -3e^{t/3} + (a+3)e^{t/2}$; $a_0 = -3$
    (c) $y \to -\infty$ para $a = a_0$
23. (b) $y = [2 + a(3\pi + 4)e^{2t/3} - 2e^{-\pi t/2}]/(3\pi + 4)$; $a_0 = -2/(3\pi + 4)$
    (c) $y \to 0$ para $a = a_0$
24. (b) $y = te^{-t} + (ea - 1)e^{-t}/t$; $a_0 = 1/e$
    (c) $y \to 0$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$
25. (b) $y = -(\cos t)/t^2 + \pi^2 a/4t^2$; $a_0 = 4/\pi^2$
    (c) $y \to \frac{1}{2}$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$
26. (b) $y = (e^t - e + a \operatorname{sen} 1)/\operatorname{sen} t$; $a_0 = (e-1)/\operatorname{sen} 1$
    (c) $y \to 1$ para $a = a_0$
27. $(t, y) = (1{,}364312; 0{,}820082)$
28. $y_0 = -1{,}642876$
29. (b) $y = 12 + \frac{8}{65}\cos 2t + \frac{64}{65}\operatorname{sen} 2t - \frac{788}{65}e^{-t/4}$; y oscila em torno de 12 quando $t \to \infty$
    (c) $t = 10{,}065778$
30. $y_0 = -5/2$
31. $y_0 = -16/3$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$ para $y_0 = -16/3$
39. Veja o Problema 2.
40. Veja o Problema 4.
41. Veja o Problema 6.
42. Veja o Problema 12.

Seção 2.2

1. $3y^2 - 2x^3 = c$; $y \neq 0$
2. $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c$; $x \neq -1, y \neq 0$
3. $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$; também $y = 0$; em toda parte
4. $3y + y^2 - x^3 + x = c$; $y \neq -3/2$
5. $2\tan 2y - 2x - \operatorname{sen} 2x = c$ se $\cos 2y \neq 0$; também $y = \pm(2n+1)\pi/4$ para todo inteiro n; em toda parte
6. $y = \operatorname{sen}[\ln|x| + c]$ se $x \neq 0$ e $|y| < 1$; também $y = \pm 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c$; $y + e^y \neq 0$
8. $3y + y^3 - x^3 = c$; em toda parte
9. (a) $y = 1/(x^2 - x - 6)$
   (c) $-2 < x < 3$
10. (a) $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$
    (c) $-1 < x < 2$
11. (a) $y = [2(1-x)e^x - 1]^{1/2}$
    (c) $-1{,}68 < x < 0{,}77$ aproximadamente
12. (a) $r = 2/(1 - 2\ln\theta)$
    (c) $0 < \theta < \sqrt{e}$
13. (a) $y = -[2\ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}$
    (c) $-\infty < x < \infty$
14. (a) $y = \left[3 - 2\sqrt{1 + x^2}\right]^{-1/2}$
    (c) $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$
15. (a) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}$
    (c) $x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$
16. (a) $y = -\sqrt{(x^2 + 1)/2}$
    (c) $-\infty < x < \infty$
17. (a) $y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4}$
    (c) $-1{,}4445 < x < 4{,}6297$ aproximadamente
18. (a) $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65 - 8e^x - 8e^{-x}}$
    (c) $|x| < 2{,}0794$ aproximadamente
19. (a) $y = [\pi - \operatorname{arcsen}(3\cos^2 x)]/3$
    (c) $|x - \pi/2| < 0{,}6155$
20. (a) $y = \left[\frac{3}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + 1\right]^{1/3}$
    (c) $-1 < x < 1$
21. $y^3 - 3y^2 - x - x^3 + 2 = 0$, $|x| < 1$
22. $y^3 - 4y - x^3 = -1$, $|x^3 - 1| < 16/3\sqrt{3}$ ou $-1{,}28 < x < 1{,}60$
23. $y = -1/(x^2/2 + 2x - 1)$; $x = -2$
24. $y = -3/2 + \sqrt{2x - e^x + 13/4}$; $x = \ln 2$
25. $y = -3/2 + \sqrt{\operatorname{sen} 2x + 1/4}$; $x = \pi/4$
26. $y = \tan(x^2 + 2x)$; $x = -1$
27. (a) $y \to 4$ se $y_0 > 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$
    (b) $T = 3{,}29527$
28. (a) $y \to 4$ quando $t \to \infty$
    (b) $T = 2{,}84367$
    (c) $3{,}6622 < y_0 < 4{,}4042$
29. $x = \dfrac{c}{a}y + \dfrac{ad - bc}{a^2}\ln|ay + b| + k$; $a \neq 0$, $ay + b \neq 0$
30. (e) $|y + 2x|^3|y - 2x| = c$
31. (b) $\arctan(y/x) - \ln|x| = c$
32. (b) $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$
33. (b) $|y - x| = c|y + 3x|^5$; também $y = x$
34. (b) $|y + x|\,|y + 4x|^2 = c$
35. (b) $2x/(x + y) + \ln|x + y| = c$; também $y = -x$
36. (b) $x/(x + y) + \ln|x| = c$; também $y = -x$
37. (b) $|x|^3|x^2 - 5y^2| = c$
38. (b) $c|x|^3 = |y^2 - x^2|$

Seção 2.3

1. $t = 100 \ln 100 \text{ min} \cong 460{,}5 \text{ min}$
2. $Q(t) = 120\gamma[1 - \exp(-t/60)]$; 120γ
3. $Q = 50e^{-0,2}(1 - e^{-0,2})$ lb $\cong 7{,}42$ lb
4. $Q(t) = 200 + t - [100(200)^2/(200 + t)^2]$ lb, $t < 300$; $c = 121/125$ lb/gal; $\lim_{t\to\infty} c = 1$ lb/gal
5. (a) $Q(t) = \frac{63.150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501}\cos t + \frac{25}{5002}\operatorname{sen} t$
   (c) nível = 25; amplitude $= 25\sqrt{2501}/5002 \cong 0{,}24995$
6. (c) 130,41 s
7. (a) $(\ln 2)/r$ anos (b) 9,90 anos (c) 8,66%
8. (a) $k(e^{rt} - 1)/r$ (b) $k \cong \$3930$ (c) 9,77%
9. $k = \$3086{,}64$/ano; \$1259,92
10. (a) \$89.034,79 (b) \$102.965,21
11. (a) $t \cong 135{,}36$ meses (b) \$152.698,56
12. (a) 0,00012097 ano^{-1} (b) $Q_0 \exp(-0{,}00012097t)$, t em anos
    (c) 13.305 anos
13. $P = 201.977{,}31 - 1977{,}31e^{(\ln 2)t}$, $0 \le t \le t_f \cong 6{,}6745$ (semanas)
14. (a) $\tau \cong 2{,}9632$; não (b) $\tau = 10 \ln 2 \cong 6{,}9315$
    (c) $\tau = 6{,}3805$
15. (b) $y_c \cong 0{,}83$
16. $t = \ln \frac{13}{8} / \ln \frac{13}{12}$ min $\cong 6{,}07$ min
17. (a) $u(t) = 2000/(1 + 0{,}048t)^{1/3}$ (c) $\tau \cong 750{,}77$ s
18. (a) $u(t) = ce^{-kt} + T_0 + kT_1(k\cos\omega t + \omega \operatorname{sen}\omega t)/(k^2 + \omega^2)$
    (b) $R \cong 9{,}11°$F; $\tau \cong 3{,}51$ h
    (c) $R = kT_1/\sqrt{k^2 + \omega^2}$; $\tau = (1/\omega)\arctan(\omega/k)$
19. (a) $c = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}$; $\lim_{t\to\infty} c = k + (P/r)$
    (b) $T = (V \ln 2)/r$; $T = (V \ln 10)/r$
    (c) Superior, $T = 431$ anos; Michigan, $T = 71{,}4$ anos; Erie, $T = 6.05$ anos; Ontário, $T = 17{,}6$ anos
20. (a) 50,408 m (b) 5,248 s
21. (a) 45,783 m (b) 5,129 s
22. (a) 48,562 m (b) 5,194 s
23. (a) 176,7 ft/s (b) 1074,5 ft (c) 15 ft/s (d) 256,6 s
24. (a) $dv/dx = -\mu v$ (b) $\mu = (66/25)\ln 10 \text{ mi}^{-1} \cong 6.0788 \text{ mi}^{-1}$
    (c) $\tau = 900/(11 \ln 10)$ s $\cong 35{,}533$ s
25. (a) $x_m = -\dfrac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right) + \dfrac{mv_0}{k}$; $t_m = \dfrac{m}{k}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right)$
26. (a) $v = -(mg/k) + [v_0 + (mg/k)]\exp(-kt/m)$ (b) $v = v_0 - gt$; sim
    (c) $v = 0$ para $t > 0$
27. (a) $v_L = 2a^2 g(\rho - \rho')/9\mu$ (b) $e = 4\pi a^3 g(\rho - \rho')/3E$
28. (a) 11,58 m/s (b) 13,45 m (c) $k \ge 0{,}2394$ kg/s
29. (a) $v = R\sqrt{2g/(R + x)}$ (b) 50,6 h
30. (b) $x = ut\cos A$, $y = -gt^2/2 + ut\operatorname{sen} A + h$
    (d) $-16L^2/(u^2\cos^2 A) + L\tan A + 3 \ge H$
    (e) 0,63 rad $\le A \le$ 0,96 rad (f) $u = 106{,}89$ ft/s, $A = 0{,}7954$ rad
31. (a) $v = (u\cos A)e^{-rt}$, $w = -g/r + (u\operatorname{sen} A + g/r)e^{-rt}$
    (b) $x = u\cos A(1 - e^{-rt})/r$, $y = -gt/r + (u\operatorname{sen} A + g/r)(1 - e^{-rt})/r + h$
    (d) $u = 145{,}3$ ft/s, $A = 0{,}644$ rad
32. (d) $k = 2{,}193$

Seção 2.4

1. $0 < t < 3$
2. $0 < t < 4$
3. $\pi/2 < t < 3\pi/2$
4. $-\infty < t < -2$
5. $-2 < t < 2$
6. $1 < t < \pi$
7. $2t + 5y > 0$ ou $2t + 5y < 0$
8. $t^2 + y^2 < 1$
9. $1 - t^2 + y^2 > 0$ ou $1 - t^2 + y^2 < 0$, $t \ne 0$, $y \ne 0$
10. Em todo o plano
11. $y \ne 0$, $y \ne 3$
12. $t \ne n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y \ne -1$
13. $y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ se $y_0 \ne 0$; $|t| < |y_0|/2$
14. $y = [(1/y_0) - t^2]^{-1}$ se $y_0 \ne 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$;
    o intervalo é $|t| < 1/\sqrt{y_0}$ se $y_0 > 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 \le 0$
15. $y = y_0/\sqrt{2ty_0^2 + 1}$ se $y_0 \ne 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$;
    o intervalo é $-1/2y_0^2 < t < \infty$ se $y_0 \ne 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 = 0$

16. $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln(1+t^3) + y_0^2}$; $-[1 - \exp(-3y_0^2/2)]^{1/3} < t < \infty$
17. $y \to 3$ se $y_0 > 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$
18. $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$; $y \to 0$ se $y_0 \geq 0$
19. $y \to 0$ se $y_0 \leq 9$; $y \to \infty$ se $y_0 > 9$
20. $y \to -\infty$ se $y_0 < y_c \approx -0{,}019$; caso contrário y é assintótica a $\sqrt{t-1}$
21. (a) Não
    (b) Sim; faça $t_0 = \frac{1}{2}$ na Eq. (19) no texto
    (c) $|y| \leq (4/3)^{1/2} \cong 1{,}5396$
22. (a) $y_1(t)$ é uma solução para $t \geq 2$; $y_2(t)$ é uma solução para todo t
    (b) f não é contínua em $(2, -1)$
26. (a) $y_1(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}$; $y_2(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds$
28. $y = \pm[5t/(2 + 5ct^5)]^{1/2}$
29. $y = r/(k + cre^{-rt})$
30. $y = \pm[\epsilon/(\sigma + c\epsilon e^{-2\epsilon t})]^{1/2}$
31. $y = \pm\left\{\mu(t)\Big/\left[2\displaystyle\int_{t_0}^{t}\mu(s)\,ds + c\right]\right\}^{1/2}$, onde $\mu(t) = \exp(2\Gamma \operatorname{sen} t + 2Tt)$
32. $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ para $0 \leq t \leq 1$; $y = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}$ para $t > 1$
33. $y = e^{-2t}$ para $0 \leq t \leq 1$; $y = e^{-(t+1)}$ para $t > 1$

Seção 2.5

1. $y = 0$ é instável
2. $y = -a/b$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é instável
3. $y = 1$ é assintoticamente estável, $y = 0$ e $y = 2$ são instáveis
4. $y = 0$ é instável
5. $y = 0$ é assintoticamente estável
6. $y = 0$ é assintoticamente estável
7. (c) $y = [y_0 + (1 - y_0)kt]/[1 + (1 - y_0)kt]$
8. $y = 1$ é semiestável
9. $y = -1$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é semiestável, $y = 1$ é instável
10. $y = -1$ e $y = 1$ são assintoticamente estáveis, $y = 0$ é instável
11. $y = 0$ é assintoticamente estável, $y = b^2/a^2$ é instável
12. $y = 2$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é semiestável, $y = -2$ é instável
13. $y = 0$ e $y = 1$ são semiestáveis
15. (a) $\tau = (1/r)\ln 4$; 55,452 anos
    (b) $T = (1/r)\ln[\beta(1 - \alpha)/(1 - \beta)\alpha]$; 175,78 anos
16. (a) $y = 0$ é instável, $y = K$ é assintoticamente estável
    (b) Convexa para $0 < y \leq K/e$, côncava para $K/e \leq y < K$
17. (a) $y = K\exp\{[\ln(y_0/K)]e^{-rt}\}$
    (b) $y(2) \cong 0{,}7153K \cong 57{,}6 \times 10^6$ kg
    (c) $\tau \cong 2{,}215$ anos
18. (b) $(h/a)\sqrt{k/\alpha\pi}$; sim
    (c) $k/\alpha \leq \pi a^2$
19. (b $k^2/2g(\alpha a)^2$
20. (c) $Y = Ey_2 = KE[1 - (E/r)]$
    (d) $Y_m = Kr/4$ para $E = r/2$
21. (a) $y_{1,2} = K[1 \mp \sqrt{1 - (4h/rK)}]/2$
22. (a) $y = 0$ é instável, $y = 1$ é assintoticamente estável
    (b) $y = y_0/[y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}]$
23. (a) $y = y_0 e^{-\beta t}$
    (b) $x = x_0\exp[-\alpha y_0(1 - e^{-\beta t})/\beta]$
    (c) $x_0\exp(-\alpha y_0/\beta)$
24. (b) $z = 1/[v + (1 - v)e^{\beta t}]$
    (c) 0.0927
25. (a,b) $a = 0$: $y = 0$ é semiestável.
    $a > 0$: $y = \sqrt{a}$ é assintoticamente estável e $y = -\sqrt{a}$ é instável.
26. (a) $a \leq 0$: $y = 0$ é assintoticamente estável.
    $a > 0$: $y = 0$ é instável; $y = \sqrt{a}$ e $y = -\sqrt{a}$ são assintoticamente estáveis.
27. (a) $a < 0$: $y = 0$ é assintoticamente estável e $y = a$ é instável.
    $a = 0$: $y = 0$ é semiestável.
    $a > 0$: $y = 0$ é instável e $y = a$ é assintoticamente estável.
28. (a) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = \min(p, q)$; $x(t) = \dfrac{pq[e^{\alpha(q-p)t} - 1]}{qe^{\alpha(q-p)t} - p}$

    (b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} x(t) = p$; $x(t) = \dfrac{p^2\alpha t}{p\alpha t + 1}$

Seção 2.6

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. Não é exata
3. $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. Não é exata
7. $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$; também $y = 0$
8. Não é exata
9. $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y \ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. Não é exata
12. $x^2 + y^2 = c$
13. $y = \left[x + \sqrt{28 - 3x^2}\right]/2, \quad |x| < \sqrt{28/3}$
14. $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4, \quad x > 0{,}9846$
15. $b = 3; \quad x^2y^2 + 2x^3y = c$
16. $b = 1; \quad e^{2xy} + x^2 = c$
19. $x^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = c$; também $y = 0$
20. $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = c$
21. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
22. $x^2e^x \operatorname{sen} y = c$
24. $\mu(t) = \exp \int R(t)\, dt$, onde $t = xy$
25. $\mu(x) = e^{3x}; \quad (3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
26. $\mu(x) = e^{-x}; \quad y = ce^x + 1 + e^{2x}$
27. $\mu(y) = y; \quad xy + y \cos y - \operatorname{sen} y = c$
28. $\mu(y) = e^{2y}/y; \quad xe^{2y} - \ln |y| = c;$ também $y = 0$
29. $\mu(y) = \operatorname{sen} y; \quad e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c$
30. $\mu(y) = y^2; \quad x^4 + 3xy + y^4 = c$
31. $\mu(x, y) = xy; \quad x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

Seção 2.7

1. (a) 1,2; 1,39; 1,571; 1,7439
   (b) 1,1975; 1,38549; 1,56491; 1,73658
   (c) 1,19631; 1,38335; 1,56200; 1,73308
   (d) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
2. (a) 1,1; 1,22; 1,364; 1,5368
   (b) 1,105; 1,23205; 1,38578; 1,57179
   (c) 1,10775; 1,23873; 1,39793; 1,59144
   (d) 1,1107; 1,24591; 1,41106; 1,61277
3. (a) 1,25; 1,54; 1,878; 2,2736
   (b) 1,26; 1,5641; 1,92156; 2,34359
   (c) 1,26551; 1,57746; 1,94586; 2,38287
   (d) 1,2714; 1,59182; 1,97212; 2,42554
4. (a) 0,3; 0,538501; 0,724821; 0,866458
   (b) 0,284813; 0,513339; 0,693451; 0,831571
   (c) 0,277920; 0,501813; 0,678949; 0,815302
   (d) 0,271428; 0,490897; 0,665142; 0,799729
5. Converge para $y \geq 0$; não está definida para $y < 0$
6. Converge para $y \geq 0$; diverge para $y < 0$
7. Converge
8. Converge para $|y(0)| < 2{,}37$ (aproximadamente); diverge nos outros casos
9. Diverge
10. Diverge
11. (a) 2,30800; 2,49006; 2,60023; 2,66773; 2,70939; 2,73521
    (b) 2,30167; 2,48263; 2,59352; 2,66227; 2,70519; 2,73209
    (c) 2,29864; 2,47903; 2,59024; 2,65958; 2,70310; 2,73053
    (d) 2,29686; 2,47691; 2,58830; 2,65798; 2,70185; 2,72959
12. (a) 1,70308; 3,06605; 2,44030; 1,77204; 1,37348; 1,11925
    (b) 1,79548; 3,06051; 2,43292; 1,77807; 1,37795; 1,12191
    (c) 1,84579; 3,05769; 2,42905; 1,78074; 1,38017; 1,12328
    (d) 1,87734; 3,05607; 2,42672; 1,78224; 1,38150; 1,12411
13. (a) −1,48849; −0,412339; 1,04687; 1,43176; 1,54438; 1,51971
    (b) −1,46909; −0,287883; 1,05351; 1,42003; 1,53000; 1,50549
    (c) −1,45865; −0,217545; 1,05715; 1,41486; 1,52334; 1,49879
    (d) −1,45212; −0,173376; 1,05941; 1,41197; 1,51949; 1,49490
14. (a) 0,950517; 0,687550; 0,369188; 0,145990; 0,0421429; 0,00872877
    (b) 0,938298; 0,672145; 0,362640; 0,147659; 0,0454100; 0,0104931
    (c) 0,932253; 0,664778; 0,359567; 0,148416; 0,0469514; 0,0113722
    (d) 0,928649; 0,660463; 0 357783; 0,148848; 0,0478492; 0,0118978
15. (a) −0,166134; −0,410872; −0,804660; 4,15867
    (b) −0,174652; −0,434238; −0,889140; −3,09810
16. Uma estimativa razoável para y em $t = 0{,}8$ é entre 5,5 e 6. Não é possível obter uma estimativa confiável em $t = 1$ dos dados especificados.
17. Uma estimativa razoável para y em $t = 2{,}5$ é entre 18 e 19. Não é possível obter uma estimativa confiável em $t = 3$ dos dados especificados.
18. (b) $2{,}37 < \alpha_0 < 2{,}38$
19. (b) $0{,}67 < \alpha_0 < 0{,}68$

Seção 2.8

1. $dw/ds = (s+1)^2 + (w+2)^2, \quad w(0) = 0$ 2. $dw/ds = 1 - (w+3)^3, \quad w(0) = 0$
3. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k t^k}{k!}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = e^{2t} - 1$
4. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k t^k}{k!}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = e^{-t} - 1$
5. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k+1}/(k+1)!2^{k-1}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 4e^{-t/2} + 2t - 4$
6. (a) $\phi_n(t) = t - \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = t$
7. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{2k-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$ 8. (a) $\phi_n(t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t^{3k-1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}$
9. (a) $\phi_1(t) = \frac{t^3}{3}; \quad \phi_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7\cdot 9}; \quad \phi_3(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{7\cdot 9} + \frac{2t^{11}}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \frac{t^{15}}{(7\cdot 9)^2\cdot 15}$
10. (a) $\phi_1(t) = t; \quad \phi_2(t) = t - \frac{t^4}{4}; \quad \phi_3(t) = t - \frac{t^4}{4} + \frac{3t^7}{4\cdot 7} - \frac{3t^{10}}{16\cdot 10} + \frac{t^{13}}{64\cdot 13}$
11. (a) $\phi_1(t) = t, \quad \phi_2(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + O(t^8),$

$$\phi_3(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{7t^5}{5!} + \frac{14t^6}{6!} + O(t^7),$$

$$\phi_4(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{7t^5}{5!} + \frac{31t^6}{6!} + O(t^7)$$

12. (a) $\phi_1(t) = -t - t^2 - \frac{t^3}{2},$

$$\phi_2(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{24} + O(t^7),$$

$$\phi_3(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} - \frac{3t^5}{20} + \frac{4t^6}{45} + O(t^7),$$

$$\phi_4(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{7t^5}{60} + \frac{t^6}{15} + O(t^7)$$

Seção 2.9

1. $y_n = (-1)^n(0{,}9)^n y_0; \quad y_n \to 0$ quando $n \to \infty$
2. $y_n = y_0/(n+1); \quad y_n \to 0$ quando $n \to \infty$
3. $y_n = y_0\sqrt{(n+2)(n+1)/2}; \quad y_n \to \infty$ quando $n \to \infty$
4. $y_n = \begin{cases} y_0, & \text{se } n = 4k \text{ ou } n = 4k-1; \\ -y_0, & \text{se } n = 4k-2 \text{ ou } n = 4k-3; \end{cases}$
   y_n não tem limite quando $n \to \infty$
5. $y_n = (0{,}5)^n(y_0 - 12) + 12; \quad y_n \to 12$ quando $n \to \infty$
6. $y_n = (-1)^n(0{,}5)^n(y_0 - 4) + 4; \quad y_n \to 4$ quando $n \to \infty$
7. 7,25% 8. \$2283.63
9. \$258,14
10. (a) \$804,62 (b) \$877,57 (c) \$1028,61
11. 30 anos: \$804,62/mês; \$289.663,20 total 20 anos: \$899,73/mês; \$215.935,20 total
12. \$103.624,62 13. 9,73%
16. (b) $u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$
19. (a) 4,7263 (b) 1,223% (c) 3,5643 (e) 3,5699

Problemas Variados

1. $y = (c/x^2) + (x^3/5)$
2. $2y + \cos y - x - \operatorname{sen} x = c$
3. $x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$
4. $y = -3 + ce^{x-x^2}$
5. $x^2y + xy^2 + x = c$
6. $y = x^{-1}(1 - e^{1-x})$
7. $x^4 + x - y^2 - y^3 = c$
8. $y = (4 + \cos 2 - \cos x)/x^2$
9. $x^2y + x + y^2 = c$
10. $x + \ln|x| + x^{-1} + y - 2\ln|y| = c$; também $y = 0$

11. $(x^3/3) + xy + e^y = c$
12. $y = ce^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^x)$
13. $y = \tan(x + x^2 + c)$
14. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$
15. $y = c/\cosh^2(x/2)$
16. $e^{-x}\cos y + e^{2y}\operatorname{sen} x = c$
17. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
18. $y = e^{-2x}\displaystyle\int_0^x e^{-s^2}\,ds + 3e^{-2x}$
19. $2xy + xy^3 - x^3 = c$
20. $e^x + e^{-y} = c$
21. $2xy^2 + 3x^2y - 4x + y^3 = c$
22. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$
23. $y = \dfrac{e^{2t}}{3t} + c\dfrac{e^{-t}}{t}$
24. $\operatorname{sen} y \operatorname{sen}^2 x = c$
25. $(x^2/y) + \arctan(y/x) = c$
26. $e^{-y/x} + \ln|x| = c$
27. $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$
28. $x^3 + x^2y = c$
29. $\arctan(y/x) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$
30. $(y^2/x^3) + (y/x^2) = c$
31. $x^3y^2 + xy^3 = -4$
32. $\dfrac{1}{y} = -x\displaystyle\int_1^x \frac{e^{2s}}{s^2}\,ds + \frac{x}{2}$
34. (a) $y = t + (c - t)^{-1}$ (b) $y = t^{-1} + 2t(c - t^2)^{-1}$
    (c) $y = \operatorname{sen} t + (c\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t)^{-1}$
35. (a) $v' - [x(t) + b]v = b$
    (b) $v = \left[b\int \mu(t)\,dt + c\right]/\mu(t), \quad \mu(t) = \exp[-(at^2/2) - bt]$
36. $y = c_1t^{-1} + c_2 + \ln t$
37. $y = c_1\ln t + c_2 + t$
38. $y = (1/k)\ln|(k - t)/(k + t)| + c_2$ se $c_1 = k^2 > 0$; $y = (2/k)\arctan(t/k) + c_2$ se $c_1 = -k^2 < 0$; $y = -2t^{-1} + c_2$ se $c_1 = 0$; também $y = c$
39. $y = \pm\frac{2}{3}(t - 2c_1)\sqrt{t + c_1} + c_2$; também $y = c$ *Sugestão*: $\mu(v) = v^{-3}$ é um fator integrante.
40. $y = c_1e^{-t} + c_2 - te^{-t}$
41. $c_1^2y = c_1t - \ln|1 + c_1t| + c_2$ se $c_1 \neq 0$; $y = \frac{1}{2}t^2 + c_2$ se $c_1 = 0$; também $y = c$
42. $y^2 = c_1t + c_2$
43. $y = c_1\operatorname{sen}(t + c_2) = k_1\operatorname{sen} t + k_2\cos t$
44. $\frac{1}{3}y^3 - 2c_1y + c_2 = 2t$; também $y = c$
45. $t + c_2 = \pm\frac{2}{3}(y - 2c_1)(y + c_1)^{1/2}$
46. $y\ln|y| - y + c_1y + t = c_2$; também $y = c$
47. $e^y = (t + c_2)^2 + c_1$
48. $y = \frac{4}{3}(t + 1)^{3/2} - \frac{1}{3}$
49. $y = 2(1 - t)^{-2}$
50. $y = 3\ln t - \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1) - 5\arctan t + 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi$
51. $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$

CAPÍTULO 3 Seção 3.1

1. $y = c_1e^t + c_2e^{-3t}$
2. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$
3. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{-t/3}$
4. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^t$
5. $y = c_1 + c_2e^{-5t}$
6. $y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{-3t/2}$
7. $y = c_1\exp[(9 + 3\sqrt{5})t/2] + c_2\exp[(9 - 3\sqrt{5})t/2]$
8. $y = c_1\exp[(1 + \sqrt{3})t] + c_2\exp[(1 - \sqrt{3})t]$
9. $y = e^t$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
10. $y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
11. $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = -1 - e^{-3t}$; $y \to -1$ quando $t \to \infty$
13. $y = \frac{1}{26}(13 + 5\sqrt{13})\exp[(-5 + \sqrt{13})t/2] + \frac{1}{26}(13 - 5\sqrt{13})\exp[(-5 - \sqrt{13})t/2]$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = (2/\sqrt{33})\exp[(-1 + \sqrt{33})t/4] - (2/\sqrt{33})\exp[(-1 - \sqrt{33})t/4]$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
15. $y = \frac{1}{10}e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}e^{t-1}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
16. $y = -\frac{1}{2}e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(t+2)/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $2y'' + 5y' + 2y = 0$
19. $y = \frac{1}{4}e^t + e^{-t}$; o mínimo é $y = 1$ em $t = \ln 2$
20. $y = -e^t + 3e^{t/2}$; o máximo é $y = \frac{9}{4}$ em $t = \ln(9/4)$, $y = 0$ em $t = \ln 9$
21. $\alpha = -2$
22. $\beta = -1$
23. $y \to 0$ para $\alpha < 0$; y torna-se ilimitado para $\alpha > 1$
24. $y \to 0$ para $\alpha < 1$; não existe α tal que todas as soluções não nulas se tornam ilimitadas
25. (a) $y = \frac{1}{5}(1 + 2\beta)e^{-2t} + \frac{1}{5}(4 - 2\beta)e^{t/2}$
    (b) $y \cong 0{,}71548$ quando $t = \frac{2}{5}\ln 6 \cong 0{,}71670$ (c) $\beta = 2$
26. (a) $y = (6 + \beta)e^{-2t} - (4 + \beta)e^{-3t}$
    (b) $t_m = \ln[(12 + 3\beta)/(12 + 2\beta)]$, $y_m = \frac{1}{27}(6 + \beta)^3/(4 + \beta)^2$
    (c) $\beta = 6(1 + \sqrt{3}) \cong 16{,}3923$ (d) $t_m \to \ln(3/2)$, $y_m \to \infty$
27. (a) $y = d/c$ (b) $aY'' + bY' + cY = 0$
28. (a) $b > 0$ e $0 < c < b^2/4a$ (b) $c < 0$ (c) $b < 0$ e $0 < c < b^2/4a$

Seção 3.2

1. $-\frac{7}{2}e^{t/2}$
2. 1
3. e^{-4t}
4. x^2e^x
5. $-e^{2t}$
6. 0
7. $0 < t < \infty$
8. $-\infty < t < 1$
9. $0 < t < 4$
10. $0 < t < \infty$
11. $0 < x < 3$
12. $2 < x < 3\pi/2$
14. A equação é não linear.
15. A equação é não homogênea.
16. Não
17. $3te^{2t} + ce^{2t}$
18. $te^t + ct$
19. $5W(f, g)$
20. $-4(t\cos t - \operatorname{sen} t)$
21. y_3 e y_4 formam um conjunto fundamental de soluções se e somente se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.
22. $y_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$, $y_2(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$
23. $y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{3}{2}e^{-(t-1)}$, $y_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}$
24. Sim
25. Sim
26. Sim
27. Sim
28. (b) Sim. (c) $[y_1(t), y_3(t)]$ e $[y_1(t), y_4(t)]$ são conjuntos fundamentais de soluções; $[y_2(t), y_3(t)]$ e $[y_4(t), y_5(t)]$ não são
29. ct^2e^t
30. $c\cos t$
31. c/x
32. $c/(1 - x^2)$
34. 2/25
35. $3\sqrt{e} \cong 4{,}946$
36. $p(t) = 0$ para todo t
40. Se t_0 for um ponto de inflexão e se $y = \phi(t)$ for uma solução, então, da equação diferencial, $p(t_0)\phi'(t_0) + q(t_0)\phi(t_0) = 0$.
42. Sim. $y = c_1e^{-x^2/2}\displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{t^2/2}\,dt + c_2e^{-x^2/2}$
43. Não
44. Sim. $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left[c_1\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{\mu(t)}{t}\,dt + c_2\right]$, $\mu(x) = \exp\left[-\displaystyle\int\left(\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x}\right)dx\right]$
45. Sim. $y = c_1x^{-1} + c_2x$
47. $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1 + x^2 - \nu^2)\mu = 0$
48. $(1 - x^2)\mu'' - 2x\mu' + \alpha(\alpha + 1)\mu = 0$
49. $\mu'' - x\mu = 0$
51. As equações de Legendre e de Airy são autoadjuntas.

Seção 3.3

1. $e\cos 2 + ie\operatorname{sen} 2 \cong -1{,}1312 + 2{,}4717i$
2. $e^2\cos 3 - ie^2\operatorname{sen} 3 \cong -7{,}3151 - 1{,}0427i$
3. -1
4. $e^2\cos(\pi/2) - ie^2\operatorname{sen}(\pi/2) = -e^2i \cong -7{,}3891i$
5. $2\cos(\ln 2) - 2i\operatorname{sen}(\ln 2) \cong 1{,}5385 - 1{,}2779i$
6. $\pi^{-1}\cos(2\ln\pi) + i\pi^{-1}\operatorname{sen}(2\ln\pi) \cong -0{,}20957 + 0{,}23959i$
7. $y = c_1e^t\cos t + c_2e^t\operatorname{sen} t$
8. $y = c_1e^t\cos\sqrt{5}t + c_2e^t\operatorname{sen}\sqrt{5}t$
9. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-4t}$
10. $y = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\operatorname{sen} t$
11. $y = c_1e^{-3t}\cos 2t + c_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$
12. $y = c_1\cos(3t/2) + c_2\operatorname{sen}(3t/2)$
13. $y = c_1e^{-t}\cos(t/2) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t/2)$
14. $y = c_1e^{t/3} + c_2e^{-4t/3}$
15. $y = c_1e^{-t/2}\cos t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen} t$
16. $y = c_1e^{-2t}\cos(3t/2) + c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(3t/2)$
17. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$; oscilação regular
18. $y = e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$; oscilação decrescente
19. $y = -e^{t-\pi/2}\operatorname{sen} 2t$; oscilação crescente
20. $y = (1 + 2\sqrt{3})\cos t - (2 - \sqrt{3})\operatorname{sen} t$; oscilação regular
21. $y = 3e^{-t/2}\cos t + \frac{5}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t$; oscilação decrescente
22. $y = \sqrt{2}\,e^{-(t-\pi/4)}\cos t + \sqrt{2}\,e^{-(t-\pi/4)}\operatorname{sen} t$; oscilação decrescente
23. (a) $u = 2e^{t/6}\cos(\sqrt{23}\,t/6) - (2/\sqrt{23})e^{t/6}\operatorname{sen}(\sqrt{23}\,t/6)$
    (b) $t = 10{,}7598$
24. (a) $u = 2e^{-t/5}\cos(\sqrt{34}\,t/5) + (7/\sqrt{34})\,e^{-t/5}\operatorname{sen}(\sqrt{34}\,t/5)$
    (b) $T = 14{,}5115$
25. (a) $y = 2e^{-t}\cos\sqrt{5}\,t + [(\alpha + 2)/\sqrt{5}]\,e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$ (b) $\alpha = 1{,}50878$
    (c) $t = \{\pi - \arctan[2\sqrt{5}/(2 + \alpha)]\}/\sqrt{5}$ (d) $\pi/\sqrt{5}$
26. (a) $y = e^{-at}\cos t + ae^{-at}\operatorname{sen} t$ (b) $T = 1{,}8763$
    (c) $\alpha = \frac{1}{4}$, $T = 7{,}4284$; $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = 4{,}3003$; $\alpha = 2$, $T = 1{,}5116$

35. $y = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \operatorname{sen}(\ln t)$
36. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}$
37. $y = c_1 t^{-1} \cos(\frac{1}{2} \ln t) + c_2 t^{-1} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \ln t)$
38. $y = c_1 t^6 + c_2 t^{-1}$
39. $y = c_1 t^2 + c_2 t^5$
40. $y = c_1 t \cos(2 \ln t) + c_2 t \operatorname{sen}(2 \ln t)$
41. $y = c_1 t + c_2 t^{-3}$
42. $y = c_1 t^{-3} \cos(\ln t) + c_2 t^{-3} \operatorname{sen}(\ln t)$
44. Sim, $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \quad x = \int e^{-t^2/2}\, dt$
45. Não
46. Sim, $y = c_1 e^{-t^2/4} \cos(\sqrt{3}\, t^2/4) + c_2 e^{-t^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{3}\, t^2/4)$

Seção 3.4

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$
2. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 t e^{-t/3}$
3. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{3t/2}$
4. $y = c_1 e^{-3t/2} + c_2 t e^{-3t/2}$
5. $y = c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \operatorname{sen} 3t$
6. $y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
7. $y = c_1 e^{-t/4} + c_2 e^{-4t}$
8. $y = c_1 e^{-3t/4} + c_2 t e^{-3t/4}$
9. $y = c_1 e^{2t/5} + c_2 t e^{2t/5}$
10. $y = e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(t/2)$
11. $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3} t e^{2t/3}, \quad y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = 2te^{3t}, \quad y \to \infty$ quando $t \to \infty$
13. $y = -e^{-t/3} \cos 3t + \frac{5}{9} e^{-t/3} \operatorname{sen} 3t, \quad y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}, \quad y \to 0$ quando $t \to \infty$
15. (a) $y = e^{-3t/2} - \frac{5}{2} t e^{-3t/2}$ (b) $t = \frac{2}{5}$
    (c) $t_0 = 16/15, \quad y_0 = -\frac{5}{3} e^{-8/5} \cong -0{,}33649$
    (d) $y = e^{-3t/2} + (b + \frac{3}{2}) t e^{-3t/2}; \quad b = -\frac{3}{2}$
16. $y = 2e^{t/2} + (b - 1) t e^{t/2}; \quad b = 1$
17. (a) $y = e^{-t/2} + \frac{5}{2} t e^{-t/2}$ (b) $t_M = \frac{8}{5}, \quad y_M = 5e^{-4/5} \cong 2{,}24664$
    (c) $y = e^{-t/2} + (b + \frac{1}{2}) t e^{-t/2}$
    (d) $t_M = 4b/(1 + 2b) \to 2$ quando $b \to \infty; \quad y_M = (1 + 2b) \exp[-2b/(1 + 2b)] \to \infty$ quando $b \to \infty$
18. (a) $y = ae^{-2t/3} + (\frac{2}{3} a - 1) t e^{-2t/3}$ (b) $a = \frac{3}{2}$
23. $y_2(t) = t^3$
24. $y_2(t) = t^{-2}$
25. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$
26. $y_2(t) = te^t$
27. $y_2(x) = \cos x^2$
28. $y_2(x) = x$
29. $y_2(x) = x^{1/4} e^{-2\sqrt{x}}$
30. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
32. $y = c_1 e^{-5x^2/2} \int_0^x e^{5s^2/2}\, ds + c_2 e^{-5x^2/2}$
33. $y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t y_1^{-2}(s) \exp\left[- \int_{s_0}^s p(r)\, dr \right] ds$
34. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$
35. $y_2(t) = \cos t^2$
36. $y_2(x) = x$
37. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
39. (b) $y_0 + (a/b) y_0'$
41. $y = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t$
42. $y = c_1 t^{-1/2} + c_2 t^{-1/2} \ln t$
43. $y = c_1 t + c_2 t^{5/2}$
44. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$
45. $y = c_1 t^{3/2} + c_2 t^{3/2} \ln t$
46. $y = c_1 t^{-2} \cos(3 \ln t) + c_2 t^{-2} \operatorname{sen}(3 \ln t)$

Seção 3.5

1. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$
2. $y = c_1 e^{-t} \cos 2t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} 2t + \frac{3}{17} \operatorname{sen} 2t - \frac{12}{17} \cos 2t$
3. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{3}{16} t e^{-t} + \frac{3}{8} t^2 e^{-t}$
4. $y = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2} t - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{2} \cos 2t$
5. $y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1) e^{3t} + \frac{2}{3}$
6. $y = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + t^2 e^{-t}$
7. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10} \operatorname{sen} t - \frac{9}{10} \cos t$
8. $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{3} t \cos 2t - \frac{5}{9} \operatorname{sen} 2t$
9. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} \cos \omega t$
10. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + (1/2\omega_0) t \operatorname{sen} \omega_0 t$
11. $y = c_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{15}\, t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(\sqrt{15}\, t/2) + \frac{1}{6} e^t - \frac{1}{4} e^{-t}$
12. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6} t e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-2t}$
13. $y = e^t - \frac{1}{2} e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$
14. $y = \frac{7}{10} \operatorname{sen} 2t - \frac{19}{40} \cos 2t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^t$
15. $y = 4te^t - 3e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t + 4$
16. $y = e^{3t} + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{2t} - te^{2t}$
17. $y = 2 \cos 2t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$
18. $y = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \operatorname{sen} 2t + te^{-t} \operatorname{sen} 2t$
19. (a) $Y(t) = t(A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2) e^{-3t} + D \operatorname{sen} 3t + E \cos 3t$
    (b) $A_0 = 2/15, \; A_1 = -2/9, \; A_2 = 8/27, \; A_3 = -8/27, \; A_4 = 16/81, \; B_0 = -1/9, \; B_1 = -1/9, \; B_2 = -2/27, \; D = -1/18, \; E = -1/18$

20. (a) $Y(t) = A_0t + A_1 + t(B_0t + B_1)\operatorname{sen} t + t(D_0t + D_1)\cos t$
(b) $A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ B_0 = 0,\ B_1 = 1/4,\ D_0 = -1/4,\ D_1 = 0$
21. (a) $Y(t) = e^t(A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t) + (D_0t + D_1)e^{2t}\operatorname{sen} t + (E_0t + E_1)e^{2t}\cos t$
(b) $A = -1/20,\ B = -3/20,\ D_0 = -3/2,\ D_1 = -5,\ E_0 = 3/2,\ E_1 = 1/2$
22. (a) $Y(t) = Ae^{-t} + t(B_0t^2 + B_1t + B_2)e^{-t}\cos t + t(D_0t^2 + D_1t + D_2)e^{-t}\operatorname{sen} t$
(b) $A = 3,\ B_0 = -2/3,\ B_1 = 0,\ B_2 = 1,\ D_0 = 0,\ D_1 = 1,\ D_2 = 1$
23. (a) $Y(t) = A_0t^2 + A_1t + A_2 + t^2(B_0t + B_1)e^{2t} + (D_0t + D_1)\operatorname{sen} 2t + (E_0t + E_1)\cos 2t$
(b) $A_0 = 1/2,\ A_1 = 1,\ A_2 = 3/4,\ B_0 = 2/3,\ B_1 = 0,\ D_0 = 0,\ D_1 = -1/16,$
$E_0 = 1/8,\ E_1 = 1/16$
24. (a) $Y(t) = t(A_0t^2 + A_1t + A_2)\operatorname{sen} 2t + t(B_0t^2 + B_1t + B_2)\cos 2t$
(b) $A_0 = 0,\ A_1 = 13/16,\ A_2 = 7/4,\ B_0 = -1/12,\ B_1 = 0,\ B_2 = 13/32$
25. (a) $Y(t) = (A_0t^2 + A_1t + A_2)e^t\operatorname{sen} 2t + (B_0t^2 + B_1t + B_2)e^t\cos 2t +$
$e^{-t}(D\cos t + E\operatorname{sen} t) + Fe^t$
(b) $A_0 = 1/52,\ A_1 = 10/169,\ A_2 = -1233/35.152,\ B_0 = -5/52,\ B_1 = 73/676,$
$B_2 = -4105/35.152,\ D = -3/2,\ E = 3/2,\ F = 2/3$
26. (a) $Y(t) = t(A_0t + A_1)e^{-t}\cos 2t + t(B_0t + B_1)e^{-t}\operatorname{sen} 2t + (D_0t + D_1)e^{-2t}\cos t +$
$(E_0t + E_1)e^{-2t}\operatorname{sen} t$
(b) $A_0 = 0,\ A_1 = 3/16,\ B_0 = 3/8,\ B_1 = 0,\ D_0 = -2/5,\ D_1 = -7/25,\ E_0 = 1/5,$
$E_1 = 1/25$
27. (b) $w = -\frac{2}{5} + c_1e^{5t}$
28. $y = c_1\cos\lambda t + c_2\operatorname{sen}\lambda t + \sum_{m=1}^{N}[a_m/(\lambda^2 - m^2\pi^2)]\operatorname{sen} m\pi t$
29. $y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ -(1 + \pi/2)\operatorname{sen} t - (\pi/2)\cos t + (\pi/2)e^{\pi - t}, & t > \pi \end{cases}$
30. $y = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ -\frac{1}{5}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & t > \pi/2 \end{cases}$
31. Não
34. $y = c_1e^{4t} + c_2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

Seção 3.6

1. $Y(t) = e^t$
2. $Y(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}$
3. $Y(t) = \frac{3}{2}t^2e^{-t}$
4. $Y(t) = 2t^2e^{t/2}$
5. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t - (\cos t)\ln(\tan t + \sec t)$
6. $y = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen} 3t + (\operatorname{sen} 3t)\ln(\tan 3t + \sec 3t) - 1$
7. $y = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} - e^{-2t}\ln t$
8. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}(\operatorname{sen} 2t)\ln\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{2}t\cos 2t$
9. $y = c_1\cos(t/2) + c_2\operatorname{sen}(t/2) + t\operatorname{sen}(t/2) + 2[\ln\cos(t/2)]\cos(t/2)$
10. $y = c_1e^t + c_2te^t - \frac{1}{2}e^t\ln(1 + t^2) + te^t\arctan t$
11. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{3t} + \int[e^{3(t-s)} - e^{2(t-s)}]g(s)\,ds$
12. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen} 2(t - s)]g(s)\,ds$
13. $Y(t) = \frac{1}{2} + t^2\ln t$
14. $Y(t) = -2t^2$
15. $Y(t) = \frac{1}{2}(t - 1)e^{2t}$
16. $Y(t) = -\frac{1}{2}(2t - 1)e^{-t}$
17. $Y(x) = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$
18. $Y(x) = -\frac{2}{3}x^{1/2}\cos x$
19. $Y(x) = \int\frac{xe^t - te^x}{(1 - t)^2e^t}g(t)\,dt$
20. $Y(x) = x^{-1/2}\int t^{-3/2}\operatorname{sen}(x - t)g(t)\,dt$
23. (b) $y = y_0\cos t + y_0'\operatorname{sen} t + \int_{t_0}^{t}\operatorname{sen}(t - s)g(s)\,ds$
24. $y = (b - a)^{-1}\int_{t_0}^{t}[e^{b(t-s)} - e^{a(t-s)}]g(s)\,ds$
25. $y = \mu^{-1}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda(t-s)}\operatorname{sen}\mu(t - s)g(s)\,ds$
26. $y = \int_{t_0}^{t}(t - s)e^{a(t-s)}g(s)\,ds$
29. $y = c_1t + c_2t^2 + 4t^2\ln t$
30. $y = c_1t^{-1} + c_2t^{-5} + \frac{1}{12}t$
31. $y = c_1(1 + t) + c_2e^t + \frac{1}{2}(t - 1)e^{2t}$
32. $y = c_1e^t + c_2t - \frac{1}{2}(2t - 1)e^{-t}$

Seção 3.7

1. $u = 5\cos(2t - \delta)$, $\delta = \arctan(4/3) \cong 0{,}9273$
2. $u = 2\cos(t - 2\pi/3)$
3. $u = 2\sqrt{5}\cos(3t - \delta)$, $\delta = -\arctan(1/2) \cong -0{,}4636$
4. $u = \sqrt{13}\cos(\pi t - \delta)$, $\delta = \pi + \arctan(3/2) \cong 4{,}1244$
5. $u = \frac{1}{4}\cos 8t$ ft, t em s; $\omega = 8$ rad/s, $T = \pi/4$ s, $R = 1/4$ ft
6. $u = \frac{5}{7}\operatorname{sen} 14t$ cm, t em s; $t = \pi/14$ s
7. $u = (1/4\sqrt{2})\operatorname{sen}(8\sqrt{2}\,t) - \frac{1}{12}\cos(8\sqrt{2}\,t)$ ft, t em s; $\omega = 8\sqrt{2}$ rad/s, $T = \pi/4\sqrt{2}$ s, $R = \sqrt{11\ 288} \cong 0{,}1954$ ft, $\delta = \pi - \arctan(3/\sqrt{2}) \cong 2{,}0113$
8. $Q = 10^{-6}\cos 2000t$ C, t em s
9. $u = e^{-10t}[2\cos(4\sqrt{6}\,t) + (5/\sqrt{6})\operatorname{sen}(4\sqrt{6}\,t)]$ cm, t em s; $\mu = 4\sqrt{6}$ rad/s, $T_d = \pi/2\sqrt{6}$ s, $T_d/T = 7/2\sqrt{6} \cong 1{,}4289$, $\tau \cong 0{,}4045$ s
10. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t}\operatorname{sen}(2\sqrt{31}\,t)$ ft, t em s; $t = \pi/2\sqrt{31}$ s, $\tau \cong 1{,}5927$ s
11. $u \cong 0{,}057198e^{-0.15t}\cos(3{,}87008\,t - 0{,}50709)$ m, t em s; $\mu = 3{,}87008$ rad/s, $\mu/\omega_0 = 3{,}87008/\sqrt{15} \cong 0{,}99925$
12. $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$ C; t em s
13. $\gamma = \sqrt{20/9} \cong 1{,}4907$
16. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r\cos\theta = B$, $r\operatorname{sen}\theta = -A$; $R = r$; $\delta = \theta + (4n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
17. $\gamma = 8$ lb·s/ft
18. $R = 10^3\ \Omega$
20. $v_0 < -\gamma u_0/2m$
22. $2\pi/\sqrt{31}$
23. $\gamma = 5$ lb·s/ft
24. $k = 6$, $v = \pm 2\sqrt{5}$
25. (a) $\tau \cong 41{,}715$ (d) $\gamma_0 \cong 1{,}73$, $\min \tau \cong 4{,}87$
    (e) $\tau = (2/\gamma)\ln(400/\sqrt{4 - \gamma^2})$
26. (a) $u(t) = e^{-\gamma t/2m}\left[u_0\sqrt{4km - \gamma^2}\cos\mu t + (2mv_0 + \gamma u_0)\operatorname{sen}\mu t\right]/\sqrt{4km - \gamma^2}$
    (b) $R^2 = 4m(ku_0^2 + \gamma u_0 v_0 + mv_0^2)/(4km - \gamma^2)$
27. $\rho l u'' + \rho_0 g u = 0$, $T = 2\pi\sqrt{\rho l/\rho_0 g}$
28. (a) $u = \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t$ (c) horário
29. (a) $u = (16/\sqrt{127})e^{-t/8}\operatorname{sen}(\sqrt{127}\,t/8)$ (c) horário
30. (b) $u = a\cos(\sqrt{k/m}\,t) + b\sqrt{m/k}\operatorname{sen}(\sqrt{k/m}\,t)$
32. (b) $u = \operatorname{sen} t$, $A = 1$, $T = 2\pi$ (c) $A = 0{,}98$, $T = 6{,}07$
    (d) $\epsilon = 0{,}2$, $A = 0{,}96$, $T = 5{,}90$; $\epsilon = 0{,}3$, $A = 0{,}94$, $T = 5{,}74$
    (f) $\epsilon = -0{,}1$, $A = 1{,}03$, $T = 6{,}55$; $\epsilon = -0{,}2$, $A = 1{,}06$, $T = 6{,}90$; $\epsilon = -0{,}3$, $A = 1{,}11$, $T = 7{,}41$

Seção 3.8

1. $-2\operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} t$
2. $2\operatorname{sen}(t/2)\cos(13t/2)$
3. $2\cos(3\pi t/2)\cos(\pi t/2)$
4. $2\operatorname{sen}(7t/2)\cos(t/2)$
5. $u'' + 256u = 16\cos 3t$, $u(0) = \frac{1}{6}$, $u'(0) = 0$, u em ft, t em s
6. $u'' + 10u' + 98u = 2\operatorname{sen}(t/2)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0{,}03$, u em m, t em s
7. (a) $u = \frac{151}{1482}\cos 16t + \frac{16}{247}\cos 3t$ (c) $\omega = 16$ rad/s
8. (a) $u = \frac{1}{153.281}[160e^{-5t}\cos(\sqrt{73}\,t) + \frac{383.443}{7300}e^{-5t}\operatorname{sen}(\sqrt{73}\,t) - 160\cos(t/2) + 3128\operatorname{sen}(t/2)]$
    (b) Os dois primeiros termos são transientes. (d) $\omega = 4\sqrt{3}$ rad/s
9. $u = \frac{64}{45}(\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45}\operatorname{sen}(t/2)\operatorname{sen}(15t/2)$ ft, t em s
10. $u = (\cos 8t + \operatorname{sen} 8t - 8t\cos 8t)/4$ ft, t em s; 1/8, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$ s
11. (a) $\frac{8}{901}(30\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ ft, t em s (b) $m = 4$ slugs[†]
12. $u = (\sqrt{2}/6)\cos(3t - 3\pi/4)$ m, t em s
15. $$u = \begin{cases} F_0(t - \operatorname{sen} t), & 0 \le t \le \pi \\ F_0[(2\pi - t) - 3\operatorname{sen} t], & \pi < t \le 2\pi \\ -4F_0\operatorname{sen} t, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

[†] A palavra *slug* significa *lesma*, mas, neste contexto, é uma unidade de massa no sistema inglês: é uma massa que acelera 1 pé por segundo ao quadrado quando sob a ação de uma força de 1 libra; 1 *slug* ≅ 14,5939 kg. (N.T.)

16. $Q(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ C, t em s, $Q(0{,}001) \cong 1{,}5468 \times 10^{-6}$; $Q(0{,}01) \cong 2{,}9998 \times 10^{-6}$; $Q(t) \to 3 \times 10^{-6}$ quando $t \to \infty$
17. (a) $u = [32(2 - \omega^2)\cos\omega t + 8\omega \operatorname{sen}\omega t]/(64 - 63\omega^2 + 16\omega^4)$
(b) $A = 8/\sqrt{64 - 63\omega^2 + 16\omega^4}$ (d) $\omega = 3\sqrt{14}/8 \cong 1{,}4031$, $A = 64/\sqrt{127} \cong 5{,}6791$
18. (a) $u = 3(\cos t - \cos\omega t)/(\omega^2 - 1)$
19. (a) $u = [(\omega^2 + 2)\cos t - 3\cos\omega t]/(\omega^2 - 1) + \operatorname{sen} t$

CAPÍTULO 4

Seção 4.1

1. $-\infty < t < \infty$
2. $t > 0$ ou $t < 0$
3. $t > 1$, ou $0 < t < 1$, ou $t < 0$
4. $t > 0$
5. $\ldots, -3\pi/2 < x < -\pi/2$, $-\pi/2 < x < 1$, $1 < x < \pi/2$, $\pi/2 < x < 3\pi/2, \ldots$
6. $-\infty < x < -2$, $-2 < x < 2$, $2 < x < \infty$
7. Linearmente independente
8. Linearmente dependente: $f_1(t) + 3f_2(t) - 2f_3(t) = 0$
9. Linearmente dependente: $2f_1(t) + 13f_2(t) - 3f_3(t) - 7f_4(t) = 0$
10. Linearmente independente
11. 1
12. 1
13. $-6e^{-2t}$
14. e^{-2t}
15. $6x$
16. $6/x$
17. $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2}\cos 2t$
19. (a) $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]t + \cdots + a_n t^n$
(b) $(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} - \cdots + a_n)e^{rt}$
(c) $e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}$; sim, $W(e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}) \neq 0$, $-\infty < t < \infty$
21. $W(t) = ce^{-2t}$
22. $W(t) = c$
23. $W(t) = c/t^2$
24. $W(t) = c/t$
27. $y = c_1 e^t + c_2 t + c_3 t e^t$
28. $y = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3(t + 1)$

Seção 4.2

1. $\sqrt{2}\, e^{i[(\pi/4) + 2m\pi]}$
2. $2e^{i[(2\pi/3) + 2m\pi]}$
3. $3e^{i(\pi + 2m\pi)}$
4. $e^{i[(3\pi/2) + 2m\pi]}$
5. $2e^{i[(11\pi/6) + 2m\pi]}$
6. $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4) + 2m\pi]}$
7. 1, $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
8. $2^{1/4}e^{-\pi i/8}$, $2^{1/4}e^{7\pi i/8}$
9. 1, i, -1, $-i$
10. $\left(\sqrt{3} + i\right)/\sqrt{2}$, $-\left(\sqrt{3} + i\right)/\sqrt{2}$
11. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$
12. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$
13. $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$
14. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t}$
15. $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + e^{\sqrt{3}t/2}(c_3 \cos \frac{1}{2}t + c_4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t) + e^{-\sqrt{3}t/2}(c_5 \cos \frac{1}{2}t + c_6 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t)$
16. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$
17. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t} + c_6 t^2 e^{-t}$
18. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6 \operatorname{sen} t$
19. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t$
20. $y = c_1 + c_2 e^{2t} + e^{-t}(c_3 \cos\sqrt{3}t + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{3}t)$
21. $y = e^t[(c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\operatorname{sen} t] + e^{-t}[(c_5 + c_6 t)\cos t + (c_7 + c_8 t)\operatorname{sen} t]$
22. $y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\operatorname{sen} t$
23. $y = c_1 e^t + c_2 e^{(2+\sqrt{5})t} + c_3 e^{(2-\sqrt{5})t}$
24. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(-2+\sqrt{2})t} + c_3 e^{(-2-\sqrt{2})t}$
25. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/3}\cos(t/\sqrt{3}) + c_3 e^{-t/3}\operatorname{sen}(t/\sqrt{3})$
26. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{(3+\sqrt{3})t} + c_4 e^{(3-\sqrt{3})t}$
27. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-t/4} + c_3 e^{-t}\cos 2t + c_4 e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
28. $y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t + c_3 e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) + c_4 e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$
29. $y = 2 - 2\cos t + \operatorname{sen} t$
30. $y = \frac{1}{2}e^{-t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}e^{t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t/\sqrt{2})$
31. $y = 2t - 3$
32. $y = 2\cos t - \operatorname{sen} t$
33. $y = -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{16}{15}e^{-t/2}$
34. $y = \frac{2}{13}e^{-t} + \frac{24}{13}e^{t/2}\cos t + \frac{3}{13}e^{t/2}\operatorname{sen} t$
35. $y = 8 - 18e^{-t/3} + 8e^{-t/2}$
36. $y = \frac{21}{13}e^{-t}\cos t - \frac{38}{13}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{8}{13}e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{17\sqrt{3}}{39}e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$
37. $y = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) + \frac{1}{2}(\operatorname{senh} t - \operatorname{sen} t)$
38. (a) $W(t) = c$, uma constante (b) $W(t) = -8$ (c) $W(t) = 4$
39. (b) $u_1 = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos\sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{6}t$

Seção 4.3

1. $y = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + 3$
2. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\operatorname{sen} t - 3t - \frac{1}{4}t\operatorname{sen} t$
3. $y = c_1e^{-t} + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}te^{-t} + 4(t-1)$
4. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \cos t$
5. $y = c_1 + c_2t + c_3e^{-2t} + c_4e^{2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{48}t^4 - \frac{1}{16}t^2$
6. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3t\cos t + c_4t\operatorname{sen} t + 3 + \frac{1}{9}\cos 2t$
7. $y = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + e^{t/2}[c_5\cos(\sqrt{3}\,t/2) + c_6\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t/2)] + \frac{1}{24}t^4$
8. $y = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{40}\cos 2t$
9. $y = \frac{3}{16}(1 - \cos 2t) + \frac{1}{8}t^2$
10. $y = (t-4)\cos t - (\frac{3}{2}t + 4)\operatorname{sen} t + 3t + 4$
11. $y = 1 + \frac{1}{4}(t^2 + 3t) - te^t$
12. $y = -\frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{20}e^{-t} + \frac{81}{40}e^t + \frac{73}{520}e^{-3t} + \frac{77}{65}\cos 2t - \frac{49}{130}\operatorname{sen} 2t$
13. $Y(t) = t(A_0t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3) + Bt^2e^t$
14. $Y(t) = t(A_0t + A_1)e^{-t} + B\cos t + C\operatorname{sen} t$
15. $Y(t) = At^2e^t + B\cos t + C\operatorname{sen} t$
16. $Y(t) = At^2 + (B_0t + B_1)e^t + t(C\cos 2t + D\operatorname{sen} 2t)$
17. $Y(t) = t(A_0t^2 + A_1t + A_2) + (B_0t + B_1)\cos t + (C_0t + C_1)\operatorname{sen} t$
18. $Y(t) = Ae^t + (B_0t + B_1)e^{-t} + te^{-t}(C\cos t + D\operatorname{sen} t)$
19. $k_0 = a_0, \quad k_n = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$

Seção 4.4

1. $y = c_1 + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t - \ln\cos t - (\operatorname{sen} t)\ln(\sec t + \tan t)$
2. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
3. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{30}e^{4t}$
4. $y = c_1 + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + \ln(\sec t + \tan t) - t\cos t + (\operatorname{sen} t)\ln\cos t$
5. $y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t$
6. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t + c_3t\cos t + c_4t\operatorname{sen} t - \frac{1}{8}t^2\operatorname{sen} t$
7. $y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}(\cos t)\ln\cos t + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t)\ln\cos t - \frac{1}{2}t\cos t$
   $- \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}e^t\int_{t_0}^{t}\left(e^{-s}/\cos s\right)ds$
8. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - \ln\operatorname{sen} t + \ln(\cos t + 1) + \frac{1}{2}e^t\int_{t_0}^{t}\left(e^{-s}/\operatorname{sen} s\right)ds$
   $+ \frac{1}{2}e^{-t}\int_{t_0}^{t}\left(e^{s}/\operatorname{sen} s\right)ds$
9. $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$ em resposta ao Problema 4
10. $c_1 = 2,\ c_2 = \frac{7}{8},\ c_3 = -\frac{7}{8},\ c_4 = \frac{1}{2}$ em resposta ao Problema 6
11. $c_1 = \frac{3}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = -\frac{5}{2},\ t_0 = 0$ em resposta ao Problema 7
12. $c_1 = 3,\ c_2 = 0,\ c_3 = -e^{\pi/2},\ t_0 = \pi/2$ em resposta ao Problema 8
13. $Y(x) = x^4/15$
14. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[e^{t-s} - \operatorname{sen}(t-s) - \cos(t-s)]g(s)\,ds$
15. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\operatorname{senh}(t-s) - \operatorname{sen}(t-s)]g(s)\,ds$
16. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}e^{(t-s)}(t-s)^2g(s)\,ds; \quad Y(t) = -te^t\ln|t|$
17. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}[(x/t^2) - 2(x^2/t^3) + (x^3/t^4)]g(t)\,dt$

CAPÍTULO 5

Seção 5.1

1. $\rho = 1$
2. $\rho = 2$
3. $\rho = \infty$
4. $\rho = \frac{1}{2}$
5. $\rho = \frac{1}{2}$
6. $\rho = 1$
7. $\rho = 3$
8. $\rho = e$
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \rho = \infty$
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad \rho = \infty$

11. $1+(x-1), \quad \rho=\infty$

12. $1-2(x+1)+(x+1)^2, \quad \rho=\infty$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad \rho=1$

14. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \rho=1$

15. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \rho=1$

16. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n, \quad \rho=1$

17. $y' = 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots-(n+1)^2x^n+\cdots$
$y'' = 2^2+3^2\cdot 2x+4^2\cdot 3x^2+5^2\cdot 4x^3+\cdots+(n+2)^2(n+1)x^n+\cdots$

18. $y' = a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+(n+1)a_{n+1}x^n+\cdots$
$= \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$
$y'' = 2a_2+6a_3x+12a_4x^2+20a_5x^3+\cdots+(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\cdots$
$= \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

22. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n$

24. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n]x^n$

25. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+na_n]x^n$

26. $a_1+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}]x^n$

27. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)na_{n+1}+a_n]x^n$

28. $a_n=(-2)^na_0/n!, \quad n=1,2,\ldots; \quad a_0e^{-2x}$

Seção 5.2

1. (a) $a_{n+2}=a_n/(n+2)(n+1)$
(b,d) $y_1(x)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x$
$y_2(x)=x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\operatorname{senh} x$

2. (a) $a_{n+2}=a_n/(n+2)$
(b,d) $y_1(x)=1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$
$y_2(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{3\cdot 5}+\dfrac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n!x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. (a) $(n+2)a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$
(b) $y_1(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{6}(x-1)^4+\cdots$
$y_2(x)=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$

4. (a) $a_{n+4}=-k^2a_n/(n+4)(n+3); \quad a_2=a_3=0$
(b,d) $y_1(x)=1-\dfrac{k^2x^4}{3\cdot 4}+\dfrac{k^4x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}-\dfrac{k^6x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12}+\cdots$
$= 1+\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4m+3)(4m+4)}$
$y_2(x)=x-\dfrac{k^2x^5}{4\cdot 5}+\dfrac{k^4x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}-\dfrac{k^6x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13}+\cdots$
$= x\left[1+\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots(4m+4)(4m+5)}\right]$
Sugestão: faça $n=4m$ na relação de recorrência, $m=1,2,3,\ldots$

5. (a) $(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n+1)a_{n+1}+a_n=0, \quad n\geq 1; \quad a_2=-\frac{1}{2}a_0$
(b) $y_1(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\cdots, \quad y_2(x)=x-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{24}x^5+\cdots$

6. (a) $a_{n+2} = -(n^2 - 2n + 4)a_n/[2(n+1)(n+2)], \quad n \geq 2; \quad a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{4}a_1$

   (b) $y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \cdots,$

   $y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \cdots$

7. (a) $a_{n+2} = -a_n/(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

   (b,d) $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^4}{1\cdot 3} - \dfrac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

   $y_2(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{2\cdot 4} - \dfrac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$

8. (a) $a_{n+2} = -[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n + a_{n-1}]/(n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \ldots$

   $a_2 = -(a_0 + a_1)/2$

   (b) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \cdots$

   $y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$

9. (a) $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)(n-3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

   (b) $y_1(x) = 1 - 3x^2, \quad y_2(x) = x - x^3/3$

10. (a) $4(n+2)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

    (b,d) $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{4}, \quad y_2(x) = x - \dfrac{x^3}{12} - \dfrac{x^5}{240} - \dfrac{x^7}{2240} - \cdots - \dfrac{x^{2n+1}}{4^n(2n-1)(2n+1)} - \cdots$

11. (a) $3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

    (b,d) $y_1(x) = 1 + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{5}{432}x^6 + \cdots + \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$

    $y_2(x) = x + \dfrac{2}{9}x^3 + \dfrac{8}{135}x^5 + \dfrac{16}{945}x^7 + \cdots + \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3^n\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$

12. (a) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n-1} + (n-1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

    (b,d) $y_1(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, \quad y_2(x) = x$

13. (a) $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

    (b,d) $y_1(x) = 1 - \dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{5}{32}x^4 - \dfrac{7}{384}x^6 + \cdots + (-1)^n \dfrac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n(2n)!}x^{2n} + \cdots$

    $y_2(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^7}{210} + \cdots + (-1)^n \dfrac{4\cdot 6\cdots(2n+2)}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$

14. (a) $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

    (b) $y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3 + \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$

    $y_2(x) = (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \frac{9}{64}(x-2)^4 + \cdots$

15. (a) $y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ (c) cerca de $|x| < 0{,}7$

16. (a) $y = -1 + 3x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$ (c) cerca de $|x| < 0{,}7$

17. (a) $y = 4 - x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots$ (c) cerca de $|x| < 0{,}5$

18. (a) $y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$ (c) cerca de $|x| < 0{,}9$

19. (a) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{15}(x-1)^6 + \cdots$

    $y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{28}(x-1)^7 + \cdots$

21. (a) $y_1(x) = 1 - \dfrac{\lambda}{2!}x^2 + \dfrac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \dfrac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \cdots$

    $y_2(x) = x - \dfrac{\lambda-2}{3!}x^3 + \dfrac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 - \dfrac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!}x^7 + \cdots$

    (b) $1, \; x, \; 1 - 2x^2, \; x - \frac{2}{3}x^3, \; 1 - 4x^2 + \frac{4}{3}x^4, \; x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5$

    (c) $1, \; 2x, \; 4x^2 - 2, \; 8x^3 - 12x, \; 16x^4 - 48x^2 + 12, \; 32x^5 - 160x^3 + 120x$

22. (b) $y = x - x^3/6 + \cdots$

Seção 5.3

1. $\phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 3$
2. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -2, \quad \phi^{(4)}(0) = 0$
3. $\phi''(1) = 0, \quad \phi'''(1) = -6, \quad \phi^{(4)}(1) = 42$
4. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -a_0, \quad \phi^{(4)}(0) = -4a_1$
5. $\rho = \infty, \quad \rho = \infty$
6. $\rho = 1, \quad \rho = 3, \quad \rho = 1$
7. $\rho = 1, \quad \rho = \sqrt{3}$
8. $\rho = 1$

9. (a) $\rho = \infty$ (b) $\rho = \infty$ (c) $\rho = \infty$ (d) $\rho = \infty$ (e) $\rho = 1$
(f) $\rho = \sqrt{2}$ (g) $\rho = \infty$ (h) $\rho = 1$ (i) $\rho = 1$ (j) $\rho = 2$
(k) $\rho = \sqrt{3}$ (l) $\rho = 1$ (m) $\rho = \infty$ (n) $\rho = \infty$

10. (a) $y_1(x) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2!}x^2 - \dfrac{(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \dfrac{(4^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \cdots$
$- \dfrac{[(2m-2)^2-\alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \cdots$
$y_2(x) = x + \dfrac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \dfrac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}x^5 + \cdots$
$+ \dfrac{[(2m-1)^2-\alpha^2]\cdots(1-\alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$
(b) $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ termina com x^n dependendo se $\alpha = n$ é par ou ímpar
(c) $n = 0$, $y = 1$; $n = 1$, $y = x$; $n = 2$, $y = 1 - 2x^2$; $n = 3$, $y = x - \frac{4}{3}x^3$

11. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots$, $y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots$, $\rho = \infty$

12. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots$, $y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \cdots$, $\rho = \infty$

13. $y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \cdots$, $y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{560}x^7 + \cdots$, $\rho = \pi/2$

14. $y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^6 + \cdots$, $y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{7}{120}x^5 + \cdots$, $\rho = 1$

15. Não é possível especificar condições iniciais arbitrárias em $x = 0$; logo, $x = 0$ é um ponto singular.

16. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$

17. $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots$

18. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

19. $y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$

20. $y = a_0\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 2\left(\dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots\right)$
$= a_0 e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}\right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$

21. $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2^2 2!} - \dfrac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots\right)$
$+ \left(x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$
$= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$

23. 1, $1 - 3x^2$, $1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4$; x, $x - \frac{5}{3}x^3$, $x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$

24. (a) 1, x, $(3x^2-1)/2$, $(5x^3-3x)/2$, $(35x^4-30x^2+3)/8$, $(63x^5-70x^3+15x)/8$
(c) P_1, 0; P_2, $\pm 0{,}57735$; P_3, 0, $\pm 0{,}77460$; P_4, $\pm 0{,}33998$, $\pm 0{,}86114$; P_5, 0, $\pm 0{,}53847$, $\pm 0{,}90618$

Seção 5.4

1. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$
2. $y = c_1|x+1|^{-1/2} + c_2|x+1|^{-3/2}$
3. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$
4. $y = c_1 x^{-1}\cos(2\ln|x|) + c_2 x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln|x|$
5. $y = c_1 x + c_2 x \ln|x|$
6. $y = c_1(x-1)^{-3} + c_2(x-1)^{-4}$
7. $y = c_1|x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2|x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
8. $y = c_1|x|^{3/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|) + c_2|x|^{3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|)$
9. $y = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln|x|$
10. $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\operatorname{sen}(2\ln|x-2|)$
11. $y = c_1|x|^{-1/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|) + c_2|x|^{-1/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|)$
12. $y = c_1 x + c_2 x^4$
13. $y = 2x^{3/2} - x^{-1}$
14. $y = 2x^{-1/2}\cos(2\ln x) - x^{-1/2}\operatorname{sen}(2\ln x)$
15. $y = 2x^2 - 7x^2\ln|x|$
16. $y = x^{-1}\cos(2\ln x)$
17. $x = 0$, regular
18. $x = 0$, regular; $x = 1$, irregular
19. $x = 0$, irregular; $x = 1$, regular

20. $x = 0$, irregular; $x = \pm 1$, regular
21. $x = 1$, regular; $x = -1$, irregular
22. $x = 0$, regular
23. $x = -3$, regular
24. $x = 0, -1$, regular; $x = 1$, irregular
25. $x = 1$, regular; $x = -2$, irregular
26. $x = 0, 3$, regular
27. $x = 1, -2$, regular
28. $x = 0$, regular
29. $x = 0$, irregular
30. $x = 0$, regular
31. $x = 0$, regular
32. $x = 0, \pm n\pi$, regular
33. $x = 0, \pm n\pi$, regular
34. $x = 0$, irregular; $x = \pm n\pi$, regular
35. $\alpha < 1$
36. $\beta > 0$
37. $\gamma = 2$
38. $\alpha > 1$
39. (a) $\alpha < 1$ e $\beta > 0$
    (b) $\alpha < 1$ e $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
    (c) $\alpha > 1$ e $\beta > 0$
    (d) $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
    (e) $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
41. $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2\cdot 5} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \cdots\right)$
44. Ponto singular irregular
45. Ponto singular regular
46. Ponto singular regular
47. Ponto singular irregular
48. Ponto singular irregular
49. Ponto singular irregular

Seção 5.5

1. (b) $r(2r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]}$; $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$

   (c) $y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \dfrac{x^2}{2\cdot 5} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} + \cdots\right]$

   (d) $y_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} - \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} + \cdots$

2. (b) $r^2 - \frac{1}{9} = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}}$; $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = -\frac{1}{3}$

   (c) $y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \dfrac{1}{1!(1+\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^m}{m!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$

   (d) $y_2(x) = x^{-1/3}\left[1 - \dfrac{1}{1!(1-\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^m}{m!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$

   Sugestão: faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$

3. (b) $r(r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

   (c) $y_1(x) = x\left[1 - \dfrac{x}{1!2!} + \dfrac{x^2}{2!3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n + \cdots\right]$

4. (b) $r^2 = 0$; $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2}$; $r_1 = r_2 = 0$

   (c) $y_1(x) = 1 + \dfrac{x}{(1!)^2} + \dfrac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \dfrac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$

5. (b) $r(3r-1) = 0$; $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}$; $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!7}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!7\cdot 13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!7\cdot 13\cdots(6m+1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots\right]$

(d) $y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!5\cdot 11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!5\cdot 11\cdots(6m-1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots$

Sugestão: faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$

6. (b) $r^2 - 2 = 0$; $a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}$; $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$

(c) $y_1(x) = x^{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$

(d) $y_2(x) = x^{-\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$

7. (b) $r^2 = 0$; $(n+r)a_n = a_{n-1}$; $r_1 = r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$

8. (b) $2r^2 + r - 1 = 0$; $(2n + 2r - 1)(n + r + 1)a_n + 2a_{n-2} = 0$;
$r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = -1$

(c) $y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2!7\cdot 11} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!7\cdot 11\cdots(4m+3)} + \cdots\right)$

(d) $y_2(x) = x^{-1}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!5} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!5\cdot 9\cdots(4m-3)} + \cdots\right)$

9. (b) $r^2 - 4r + 3 = 0$; $(n + r - 3)(n + r - 1)a_n - (n + r - 2)a_{n-1} = 0$; $r_1 = 3$, $r_2 = 1$

(c) $y_1(x) = x^3\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{2x^n}{n!(n+2)} + \cdots\right)$

10. (b) $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$; $(n + r - \frac{1}{2})^2 a_n + a_{n-2} = 0$; $r_1 = r_2 = 1/2$

(c) $y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} + \cdots\right)$

11. (a) $r^2 = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = 0$

(b) $y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1^2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2\cdot 1^2)(2\cdot 2^2)}(x-1)^2 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]\cdots[n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n(n!)^2}(x-1)^n + \cdots$

12. (a) $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$ em ambos $x = \pm 1$

(b) $y_1(x) = |x-1|^{1/2} \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+2\alpha)\cdots(2n-1+2\alpha)(1-2\alpha)\cdots(2n-1-2\alpha)}{2^n(2n+1)!}(x-1)^n\right]$

$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)(-\alpha)(1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-1)^n$

13. (b) $r^2 = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = 0$; $a_n = \frac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

(c) $y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n + \cdots$

Para $\lambda = n$, os coeficientes de todos os termos depois de x^n são nulos.

16. (e) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$ e é impossível determinar b_2.

Seção 5.6

1. (a) $x = 0$; (b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
2. (a) $x = 0$; (b) $r^2 - 3r + 2 = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$
3. (a) $x = 0$; (b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
   (a) $x = 1$; (b) $r(r+5) = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -5$
4. Não tem ponto singular regular
5. (a) $x = 0$;
   (b) $r^2 + 2r - 2 = 0$; $r_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0{,}732$, $r_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -2{,}73$
6. (a) $x = 0$; (b) $r(r - \frac{3}{4}) = 0$; $r_1 = \frac{3}{4}$, $r_2 = 0$
   (a) $x = -2$; (b) $r(r - \frac{5}{4}) = 0$; $r_1 = \frac{5}{4}$, $r_2 = 0$
7. (a) $x = 0$; (b) $r^2 + 1 = 0$; $r_1 = i$, $r_2 = -i$
8. (a) $x = -1$;
   (b) $r^2 - 7r + 3 = 0$; $r_1 = (7 + \sqrt{37})/2 \cong 6{,}54$, $r_2 = (7 - \sqrt{37})/2 \cong 0{,}459$
9. (a) $x = 1$; (b) $r^2 + r = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -1$
10. (a) $x = -2$; (b) $r^2 - (5/4)r = 0$; $r_1 = 5/4$, $r_2 = 0$
11. (a) $x = 2$; (b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$
    (a) $x = -2$; (b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$
12. (a) $x = 0$; (b) $r^2 - (5/3)r = 0$; $r_1 = 5/3$, $r_2 = 0$
    (a) $x = -3$; (b) $r^2 - (r/3) - 1 = 0$; $r_1 = (1 + \sqrt{37})/6 \cong 1{,}18$,
    $r_2 = (1 - \sqrt{37})/6 \cong -0{,}847$
13. (b) $r_1 = 0$, $r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots$
    $y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots$
14. (b) $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x - 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = -6y_1(x)\ln x + 1 - 33x^2 + \frac{449}{6}x^3 + \cdots$
15. (b) $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \frac{51}{16}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = 3y_1(x)\ln x + 1 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{19}{4}x^3 + \cdots$
16. (b) $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = -y_1(x)\ln x + 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{35}{1728}x^4 + \cdots$
17. (b) $r_1 = 1$, $r_2 = -1$
    (c) $y_1(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 + \cdots$
    $y_2(x) = -\frac{1}{3}y_1(x)\ln x + x^{-1} - \frac{1}{90}x^3 + \cdots$
18. (b) $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = (x-1)^{1/2}[1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{53}{480}(x-1)^2 + \cdots]$. (d) $\rho = 1$
19. (c) *Sugestão:* $(n-1)(n-2) + (1+\alpha+\beta)(n-1) + \alpha\beta = (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$
    (d) *Sugestão:* $(n-\gamma)(n-1-\gamma) + (1+\alpha+\beta)(n-\gamma) + \alpha\beta = (n-\gamma+\alpha)(n-\gamma+\beta)$

Seção 5.7

1. $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}$

   $y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \dfrac{1}{x}\left[1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$
2. $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$, $y_2(x) = y_1(x)\ln x - \dfrac{2}{x}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}x^n$
3. $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2}x^n$, $y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2}x^n$
4. $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n$

   $y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \dfrac{1}{x^2}\left[1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$

5. $y_1(x) = x^{3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{3}{2})(2+\frac{3}{2})\cdots(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

$y_2(x) = x^{-3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2})\cdots(m-\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

Sugestão: faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$
Para $r = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 0$ e a_3 é arbitrário.

CAPÍTULO 6

Seção 6.1

1. Seccionalmente contínua
2. Nenhuma das duas
3. Contínua
4. Seccionalmente contínua
5. (a) $F(s) = 1/s^2, \quad s > 0$ (b) $F(s) = 2/s^3, \quad s > 0$
   (c) $F(s) = n!/s^{n+1}, \quad s > 0$
6. $F(s) = s/(s^2 + a^2), \quad s > 0$
7. $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|$
8. $F(s) = \dfrac{b}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|$
9. $F(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}, \quad s - a > |b|$
10. $F(s) = \dfrac{b}{(s-a)^2 - b^2}, \quad s - a > |b|$
11. $F(s) = \dfrac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
12. $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
13. $F(s) = \dfrac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
14. $F(s) = \dfrac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
15. $F(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a$
16. $F(s) = \dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$
17. $F(s) = \dfrac{s^2 + a^2}{(s-a)^2(s+a)^2}, \quad s > |a|$
18. $F(s) = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
19. $F(s) = \dfrac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}, \quad s > 0$
20. $F(s) = \dfrac{2a(3s^2 + a^2)}{(s^2 - a^2)^3}, \quad s > |a|$
21. Converge
22. Converge
23. Diverge
24. Converge
26. (d) $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2; \quad \Gamma(11/2) = 945\sqrt{\pi}/32$

Seção 6.2

1. $f(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$
2. $f(t) = 2t^2e^t$
3. $f(t) = \frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{-4t}$
4. $f(t) = \frac{9}{5}e^{3t} + \frac{6}{5}e^{-2t}$
5. $f(t) = 2e^{-t}\cos 2t$
6. $f(t) = 2\cosh 2t - \frac{3}{2}\operatorname{senh} 2t$
7. $f(t) = 2e^t\cos t + 3e^t\operatorname{sen} t$
8. $f(t) = 3 - 2\operatorname{sen} 2t + 5\cos 2t$
9. $f(t) = -2e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\operatorname{sen} t$
10. $f(t) = 2e^{-t}\cos 3t - \frac{5}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t$
11. $y = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$
12. $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$
13. $y = e^t\operatorname{sen} t$
14. $y = e^{2t} - te^{2t}$
15. $y = 2e^t\cos\sqrt{3}t - (2/\sqrt{3})e^t\operatorname{sen}\sqrt{3}t$
16. $y = 2e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
17. $y = te^t - t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$
18. $y = \cosh t$
19. $y = \cos\sqrt{2}t$
20. $y = (\omega^2 - 4)^{-1}[(\omega^2 - 5)\cos\omega t + \cos 2t]$
21. $y = \frac{1}{5}(\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4e^t\cos t - 2e^t\operatorname{sen} t)$
22. $y = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^t\cos t + 7e^t\operatorname{sen} t)$
23. $y = 2e^{-t} + te^{-t} + 2t^2e^{-t}$
24. $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$
25. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} - \dfrac{e^{-s}(s+1)}{s^2(s^2+1)}$
26. $Y(s) = (1 - e^{-s})/s^2(s^2+4)$
29. $F(s) = 1/(s-a)^2$
30. $F(s) = 2b(3s^2 - b^2)/(s^2 + b^2)^3$
31. $F(s) = n!/s^{n+1}$
32. $F(s) = n!/(s-a)^{n+1}$
33. $F(s) = 2b(s-a)/[(s-a)^2 + b^2]^2$
34. $F(s) = [(s-a)^2 - b^2]/[(s-a)^2 + b^2]^2$
36. (a) $Y' + s^2Y = s$ (b) $s^2Y'' + 2sY' - [s^2 + \alpha(\alpha+1)]Y = -1$

Seção 6.3

7. (b) $f(t) = -2u_3(t) + 4u_5(t) - u_7(t)$
8. (b) $f(t) = 1 - 2u_1(t) + 2u_2(t) - 2u_3(t) + u_4(t)$

9. (b) $f(t) = 1 + u_2(t)[e^{-(t-2)} - 1]$
10. (b) $f(t) = t^2 + u_2(t)(1 - t^2)$
11. (b) $f(t) = t - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)(t-2)$
12. (b) $f(t) = t + u_2(t)(2-t) + u_5(t)(5-t) - u_7(t)(7-t)$
13. $F(s) = 2e^{-s}/s^3$
14. $F(s) = e^{-s}(s^2+2)/s^3$
15. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1+\pi s)$
16. $F(s) = \dfrac{1}{s}(e^{-s} + 2e^{-3s} - 6e^{-4s})$
17. $F(s) = s^{-2}[(1-s)e^{-2s} - (1+s)e^{-3s}]$
18. $F(s) = (1-e^{-s})/s^2$
19. $f(t) = t^3e^{2t}$
20. $f(t) = \frac{1}{3}u_2(t)[e^{t-2} - e^{-2(t-2)}]$
21. $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$
22. $f(t) = u_2(t)\operatorname{senh} 2(t-2)$
23. $f(t) = u_1(t)e^{2(t-1)}\cosh(t-1)$
24. $f(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$
26. $f(t) = 2(2t)^n$
27. $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t^2}\cos t$
28. $f(t) = \frac{1}{6}e^{t/3}(e^{2t/3} - 1)$
29. $f(t) = \frac{1}{2}e^{t^2}u_2(t/2)$
30. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s}), \quad s > 0$
31. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}), \quad s > 0$
32. $F(s) = \dfrac{1}{s}[1 - e^{-s} + \cdots + e^{-2ns} - e^{-(2n+1)s}] = \dfrac{1 - e^{-(2n+2)s}}{s(1+e^{-s})}, \quad s > 0$
33. $F(s) = \dfrac{1}{s}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-ns} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}}, \quad s > 0$
35. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}}, \quad s > 0$
36. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}, \quad s > 0$
37. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1-(1+s)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}, \quad s > 0$
38. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1-e^{-\pi s})}, \quad s > 0$
39. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1-e^{-s}), \quad s > 0$
    (b) $\mathcal{L}\{g(t)\} = s^{-2}(1-e^{-s}), \quad s > 0$
    (c) $\mathcal{L}\{h(t)\} = s^{-2}(1-e^{-s})^2, \quad s > 0$
40. (b) $\mathcal{L}\{p(t)\} = \dfrac{1-e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})}, \quad s > 0$

Seção 6.4

1. (a) $y = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{3\pi}(t)(1 + \cos t)$
2. (a) $y = e^{-t}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}u_\pi(t)[1 + e^{-(t-\pi)}\cos t + e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t]$
   $-\frac{1}{2}u_{2\pi}(t)[1 - e^{-(t-2\pi)}\cos t - e^{-(t-2\pi)}\operatorname{sen} t]$
3. (a) $y = \frac{1}{6}[1 - u_{2\pi}(t)](2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$
4. (a) $y = \frac{1}{6}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) - \frac{1}{6}u_\pi(t)(2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$
5. (a) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} - u_{10}(t)[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)}]$
6. (a) $y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}]$
7. (a) $y = \cos t + u_{3\pi}(t)[1 - \cos(t - 3\pi)]$
8. (a) $y = h(t) - u_{\pi/2}(t)h(t - \pi/2), \quad h(t) = \frac{4}{25}(-4 + 5t + 4e^{-t/2}\cos t - 3e^{-t/2}\operatorname{sen} t)$
9. (a) $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}u_6(t)[t - 6 - \operatorname{sen}(t-6)]$
10. (a) $y = h(t) + u_\pi(t)h(t - \pi), \quad h(t) = \frac{4}{17}[-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t]$
11. (a) $y = u_\pi(t)[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t - 2\pi)] - u_{3\pi}(t)[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t - 6\pi)]$
12. (a) $y = u_1(t)h(t-1) - u_2(t)h(t-2), \quad h(t) = -1 + (\cos t + \cosh t)/2$
13. (a) $y = h(t) - u_\pi(t)h(t - \pi), \quad h(t) = (3 - 4\cos t + \cos 2t)/12$
14. $f(t) = [u_{t_0}(t)(t - t_0) - u_{t_0+k}(t)(t - t_0 - k)](h/k)$
15. $g(t) = [u_{t_0}(t)(t - t_0) - 2u_{t_0+k}(t)(t - t_0 - k) + u_{t_0+2k}(t)(t - t_0 - 2k)](h/k)$
16. (b) $u(t) = 4ku_{3/2}(t)h(t - \frac{3}{2}) - 4ku_{5/2}(t)h(t - \frac{5}{2})$,
    $h(t) = \frac{1}{4} - (\sqrt{7}/84)\,e^{-t/8}\operatorname{sen}(3\sqrt{7}\,t/8) - \frac{1}{4}e^{-t/8}\cos(3\sqrt{7}\,t/8)$
    (d) $k = 2{,}51$ (e) $\tau = 25{,}6773$
17. (a) $k = 5$
    (b) $y = [u_5(t)h(t-5) - u_{5+k}(t)h(t-5-k)]/k, \quad h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t$
18. (b) $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$;
    $y = [u_{4-k}(t)h(t-4+k) - u_{4+k}(t)h(t-4-k)]/2k$,
    $h(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t/6}\cos(\sqrt{143}\,t/6) - (\sqrt{143}/572)\,e^{-t/6}\operatorname{sen}(\sqrt{143}\,t/6)$
19. (b) $y = 1 - \cos t + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t)[1 - \cos(t - k\pi)]$
21. (b) $y = 1 - \cos t + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t)[1 - \cos(t - k\pi)]$
23. (a) $y = 1 - \cos t + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{11k/4}(t)[1 - \cos(t - 11k/4)]$

Seção 6.5

1. (a) $y = e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t + u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)$
2. (a) $y = \frac{1}{2}u_\pi(t)\operatorname{sen}2(t-\pi) - \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}2(t-2\pi)$
3. (a) $y = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + u_5(t)[-e^{-2(t-5)} + e^{-(t-5)}] + u_{10}(t)[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)}]$
4. (a) $y = \cosh(t) - 20u_3(t)\operatorname{senh}(t-3)$
5. (a) $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{2}t + (1/\sqrt{2})u_{3\pi}(t)e^{-(t-3\pi)}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t-3\pi)$
6. (a) $y = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}u_{4\pi}(t)\operatorname{sen}2(t-4\pi)$
7. (a) $y = \operatorname{sen} t + u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi)$
8. (a) $y = u_{\pi/4}(t)\operatorname{sen}2(t-\pi/4)$
9. (a) $y = u_{\pi/2}(t)[1-\cos(t-\pi/2)] + 3u_{3\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-3\pi/2) - u_{2\pi}(t)[1-\cos(t-2\pi)]$
10. (a) $y = (1/\sqrt{31})u_{\pi/6}(t)\exp[-\frac{1}{4}(t-\pi/6)]\operatorname{sen}(\sqrt{31}/4)(t-\pi/6)$
11. (a) $y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{3}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t + u_{\pi/2}(t)e^{-(t-\pi/2)}\operatorname{sen}(t-\pi/2)$
12. (a) $y = u_1(t)[\operatorname{senh}(t-1) - \operatorname{sen}(t-1)]/2$
13. (a) $-e^{-T/4}\delta(t-5-T), \quad T = 8\pi/\sqrt{15}$
14. (a) $y = (4/\sqrt{15})u_1(t)e^{-(t-1)/4}\operatorname{sen}(\sqrt{15}/4)(t-1)$
    (b) $t_1 \cong 2{,}3613, \quad y_1 \cong 0{,}71153$
    (c) $y = (8\sqrt{7}/21)u_1(t)e^{-(t-1)/8}\operatorname{sen}(3\sqrt{7}/8)(t-1); \quad t_1 \cong 2{,}4569, \quad y_1 \cong 0{,}83351$
    (d) $t_1 = 1 + \pi/2 \cong 2{,}5708, \quad y_1 = 1$
15. (a) $k_1 \cong 2{,}8108$ (b) $k_1 \cong 2{,}3995$ (c) $k_1 = 2$
16. (a) $\phi(t,k) = [u_{4-k}(t)h(t-4+k) - u_{4+k}(t)h(t-4-k)]/2k, \quad h(t) = 1-\cos t$
    (b) $\phi_0(t) = u_4(t)\operatorname{sen}(t-4)$ (c) Sim
17. (b) $y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi)$
18. (b) $y = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}u_{k\pi}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi)$
19. (b) $y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi/2)$
20. (b) $y = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}u_{k\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi/2)$
21. (b) $y = \sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t)\operatorname{sen}[t-(2k-1)\pi]$
22. (b) $y = \sum_{k=1}^{40}(-1)^{k+1}u_{11k/4}(t)\operatorname{sen}(t-11k/4)$
23. (b) $y = \frac{20}{\sqrt{399}}\sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}u_{k\pi}(t)e^{-(t-k\pi)/20}\operatorname{sen}[\sqrt{399}(t-k\pi)/20]$
24. (b) $y = \frac{20}{\sqrt{399}}\sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t)e^{-[t-(2k-1)\pi]/20}\operatorname{sen}\{\sqrt{399}[t-(2k-1)\pi]/20\}$

Seção 6.6

3. $\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ é negativo quando $t = 2\pi$, por exemplo.
4. $F(s) = 2/s^2(s^2+4)$
5. $F(s) = 1/(s+1)(s^2+1)$
6. $F(s) = 1/s^2(s-1)$
7. $F(s) = s/(s^2+1)^2$
8. $f(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (t-\tau)^3\operatorname{sen}\tau\,d\tau$
9. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}\cos 2\tau\,d\tau$
10. $f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}2\tau\,d\tau$
11. $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$
12. (c) $\displaystyle\int_0^1 u^m(1-u)^n\,du = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$
13. $y = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}\omega(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$
14. $y = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)}\operatorname{sen}(t-\tau)\operatorname{sen}\alpha\tau\,d\tau$
15. $y = \frac{1}{8}\displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\operatorname{sen}2(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$
16. $y = e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)/2}\operatorname{sen}(t-\tau)[1-u_\pi(\tau)]\,d\tau$
17. $y = 2e^{-2t} + te^{-2t} + \displaystyle\int_0^t (t-\tau)e^{-2(t-\tau)}g(\tau)\,d\tau$
18. $y = 2e^{-t} - e^{-2t} + \displaystyle\int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\cos\alpha\tau\,d\tau$
19. $y = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t [\operatorname{senh}(t-\tau) - \operatorname{sen}(t-\tau)]g(\tau)\,d\tau$

20. $y = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{6}\int_0^t [2\operatorname{sen}(t-\tau) - \operatorname{sen} 2(t-\tau)]g(\tau)\,d\tau$

21. $\Phi(s) = \dfrac{F(s)}{1+K(s)}$

22. (a) $\phi(t) = \frac{1}{3}(4\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t)$

23. (a) $\phi(t) = \cos t$
    (b) $\phi''(t) + \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$

24. (a) $\phi(t) = \cosh(t)$
    (b) $\phi''(t) - \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$

25. (a) $\phi(t) = (1 - 2t + t^2)e^{-t}$
    (b) $\phi''(t) + 2\phi'(t) + \phi(t) = 2e^{-t}, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = -3$

26. (a) $\phi(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)$
    (b) $\phi'''(t) + \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = 1$

27. (a) $\phi(t) = \cos t$
    (b) $\phi^{(4)}(t) - \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0$

28. (a) $\phi(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)$
    (b) $\phi'''(t) + \phi''(t) + \phi'(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = -1, \quad \phi''(0) = 1$

CAPÍTULO 7 Seção 7.1

1. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2$
2. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2 + 3\operatorname{sen} t$
3. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(1 - 0{,}25t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2$
4. $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_1$
5. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -4x_1 - 0{,}25x_2 + 2\cos 3t, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2$
6. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t); \quad x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = u_0'$
7. (a) $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}, \quad x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$
   (b) $c_1 = 5/2, \quad c_2 = -1/2$ na solução em (a)
   (c) O gráfico se aproxima da origem no primeiro quadrante tangente à reta $x_1 \leq x_2$.
8. (a) $x_1'' - x_1' - 2x_1 = 0$
   (b) $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \quad x_2 = \frac{11}{6}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$
   (c) O gráfico é assintótico à reta $x_1 = 2x_2$ no primeiro quadrante.
9. (a) $2x_1'' - 5x_1' + 2x_1 = 0$
   (b) $x_1 = -\frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}, \quad x_2 = \frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}$
   (c) O gráfico é assintótico à reta $x_1 = x_2$ no terceiro quadrante.
10. (a) $x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0$
    (b) $x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t}, \quad x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t}$
    (c) O gráfico se aproxima da origem no terceiro quadrante tangente à reta $x_1 = x_2$.
11. (a) $x_1'' + 4x_1 = 0$
    (b) $x_1 = 3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t, \quad x_2 = -3\operatorname{sen} 2t + 4\cos 2t$
    (c) O gráfico é um círculo centrado na origem com raio 5 percorrido no sentido horário.
12. (a) $x_1'' + x_1' + 4.25x_1 = 0$
    (b) $x_1 = -2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\operatorname{sen} 2t, \quad x_2 = 2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\operatorname{sen} 2t$
    (c) O gráfico é uma espiral se aproximando da origem no sentido horário.
13. $LRCI'' + LI' + RI = 0$
18. $y_1' = y_3, \quad y_2' = y_4, \quad m_1y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2 + F_1(t),$
    $m_2y_4' = k_2y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t)$
22. (a) $Q_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}Q_1 + \frac{3}{40}Q_2, \quad Q_1(0) = 25$
    $Q_2' = 3 + \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2, \quad Q_2(0) = 15$
    (b) $Q_1^E = 42, \quad Q_2^E = 36$
    (c) $x_1' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{40}x_2, \quad x_1(0) = -17$
    $x_2' = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2, \quad x_2(0) = -21$
23. (a) $Q_1' = 3q_1 - \frac{1}{15}Q_1 + \frac{1}{100}Q_2, \quad Q_1(0) = Q_1^0$
    $Q_2' = q_2 + \frac{1}{30}Q_1 - \frac{3}{100}Q_2, \quad Q_2(0) = Q_2^0$
    (b) $Q_1^E = 6(9q_1 + q_2), \quad Q_2^E = 20(3q_1 + 2q_2)$
    (c) Não
    (d) $\frac{10}{9} \leq Q_2^E/Q_1^E \leq \frac{20}{3}$

Seção 7.2

1. (a) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -15 & 6 & -12 \\ 7 & -18 & -1 \\ -26 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 11 \\ 14 & 12 & -5 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1-i & -7+2i \\ -1+2i & 2+3i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3+4i & 6i \\ 11+6i & 6-5i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -3+5i & 7+5i \\ 2+i & 7+2i \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 8+7i & 4-4i \\ 6-4i & -4 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c), (d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 3-2i & 2-i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3+2i & 1-i \\ 2+i & -2-3i \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3+2i & 2+i \\ 1-i & -2-3i \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. (a) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & -3 \\ 11 & 20 & 17 \\ -4 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -11 \\ 9 & 15 & 6 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

8. (a) $4i$ (b) $12 - 8i$ (c) $2 + 2i$ (d) 16

10. $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

14. Singular

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

17. Singular

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

21. (a) $\begin{pmatrix} 7e^{t} & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^{t} & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^{t} & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^{t} & 3e^{3t} + 2e^{t} - e^{4t} \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^{t} & 6e^{3t} + e^{t} + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^{t} & -3e^{3t} + 3e^{t} - 2e^{4t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} e^{t} & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^{t} & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^{t} & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix}$ (d) $(e-1)\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-1} & \frac{1}{2}(e+1) \\ 2 & e^{-1} & -\frac{1}{2}(e+1) \\ -1 & 3e^{-1} & e+1 \end{pmatrix}$

Seção 7.3

1. $x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{7}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}$
2. Não tem solução
3. $x_1 = -c, \quad x_2 = c + 1, \quad x_3 = c$, onde c é arbitrário
4. $x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = -c$, onde c é arbitrário
5. $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$
6. $x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_1 + 2c_2 + 2$
7. Linearmente independente
8. $\mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$
9. $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
10. Linearmente independente
11. $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
13. $3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$
14. Linearmente independente
16. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 4, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
17. $\lambda_1 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$
18. $\lambda_1 = -3, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
19. $\lambda_1 = 0, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
20. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
21. $\lambda_1 = -1/2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3/2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
22. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$
23. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 3, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
24. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
25. $\lambda_1 = -1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 8, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Seção 7.4

2. (c) $W(t) = c \exp \int [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\, dt$
6. (a) $W(t) = t^2$

   (b) $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes em todos os pontos, exceto em $t = 0$; eles são linearmente independentes em todos os intervalos.

   (c) Pelo menos um coeficiente tem que ser descontínuo em $t = 0$.

   (d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}$
7. (a) $W(t) = t(t-2)e^t$

   (b) $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes em todos os pontos, exceto em $t = 0$ e $t = 2$; eles são linearmente independentes em todos os intervalos.

   (c) Pelo menos um coeficiente tem que ser descontínuo em $t = 0$ e em $t = 2$.

   (d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2-2t}{t^2-2t} & \dfrac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Seção 7.5

1. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

2. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$

3. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

4. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

5. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

6. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

7. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$

8. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$

9. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}$

10. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} - c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it}$

11. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$

13. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

14. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

15. $\mathbf{x} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$

16. $\mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$

17. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

18. $\mathbf{x} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^{4t}$

20. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

21. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{4}$

22. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$

23. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^{2}$

29. (a) $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(c/a)x_1 - (b/a)x_2$

30. (a) $\mathbf{x} = -\frac{55}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t/20} + \frac{29}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/4}$

(c) $T \cong 74{,}39$

31. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{2})t/2} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{2})t/2}$;

$r_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{2})/2$; nó

(b) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t}$; $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$; ponto de sela

(c) $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}$; $\alpha = 1$

32. (a) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

33. (a) $\left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L} \right)^2 - \frac{4}{CL} > 0$

Seção 7.6

1. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{t} \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$

2. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

3. (a) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{t/2}\begin{pmatrix} 5\cos \frac{3}{2}t \\ 3(\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix} + c_2 e^{t/2}\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} \frac{3}{2}t \\ 3(-\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix}$

5. (a) $\mathbf{x} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. (a) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_3 e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ \cos\sqrt{2}t \\ -\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t \\ \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \operatorname{sen}\sqrt{2}t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x} = e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t - 5\operatorname{sen} t \\ -2\cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

11. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i$

12. (a) $r = \frac{1}{5} \pm i$

13. (a) $r = \alpha \pm i$ (b) $\alpha = 0$

14. (a) $r = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 20})/2$ (b) $\alpha = -\sqrt{20},\ 0,\ \sqrt{20}$

15. (a) $r = \pm\sqrt{4 - 5\alpha}$ (b) $\alpha = 4/5$

16. (a) $r = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}$ (b) $\alpha = 0,\ 25/12$

17. (a) $r = -1 \pm \sqrt{-\alpha}$ (b) $\alpha = -1,\ 0$

18. (a) $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{49 - 24\alpha}$ (b) $\alpha = 2,\ 49/24$

19. (a) $r = \frac{1}{2}\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha - 24}$ (b) $\alpha = -4 - 2\sqrt{10},\ -4 + 2\sqrt{10},\ 5/2$

20. (a) $r = -1 \pm \sqrt{25 + 8\alpha}$ (b) $\alpha = -25/8,\ -3$

21. $\mathbf{x} = c_1 t^{-1}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\ln t) \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 5\cos(\ln t) \\ 2\cos(\ln t) + \operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 5\operatorname{sen}(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2\operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix}$

23. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ -\frac{1}{4}$

24. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ \frac{1}{10}$

25. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t/2}\begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ 4\operatorname{sen}(t/2) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t/2) \\ -4\cos(t/2) \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{4}$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; não

26. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2$ e $c_2 = 3$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; não

28. (b) $r = \pm i\sqrt{k/m}$ (d) $|r|$ é a frequência natural.

29. (c) $r_1^2 = -1$, $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r_2^2 = -4$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $x_1 = 3c_1\cos t + 3c_2\operatorname{sen} t + 3c_3\cos 2t + 3c_4\operatorname{sen} 2t$,
$x_2 = 2c_1\cos t + 2c_2\operatorname{sen} t - 4c_3\cos 2t - 4c_4\ \operatorname{sen} 2t$

(e) $x_1' = -3c_1\operatorname{sen} t + 3c_2\cos t - 6c_3\operatorname{sen} 2t + 6c_4\cos 2t$,
$x_2' = -2c_1\operatorname{sen} t + 2c_2\cos t + 8c_3\operatorname{sen} 2t - 8c_4\cos 2t$

30. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -13/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $r_1 = i,\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix};\quad r_2 = -i,\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix};$

$r_3 = \frac{5}{2}i,\ \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10i \\ -\frac{15}{2}i \end{pmatrix};\quad r_4 = -\frac{5}{2}i,\ \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10i \\ \frac{15}{2}i \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4\cos\frac{5}{2}t \\ -3\cos\frac{5}{2}t \\ -10\operatorname{sen}\frac{5}{2}t \\ \frac{15}{2}\operatorname{sen}\frac{5}{2}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4\operatorname{sen}\frac{5}{2}t \\ -3\operatorname{sen}\frac{5}{2}t \\ 10\cos\frac{5}{2}t \\ -\frac{15}{2}\cos\frac{5}{2}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = \frac{10}{7},\ c_2 = 0,\ c_3 = \frac{1}{7},\ c_4 = 0.$ período $= 4\pi$.

31. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $r_1 = i,\ \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix};\quad r_2 = -i,\ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix};$

$r_3 = \sqrt{3}i,\ \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix};\quad r_4 = -\sqrt{3}i,\ \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos\sqrt{3}t \\ -\cos\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\operatorname{sen}\sqrt{3}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{3}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\cos\sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = -2,\ c_4 = 0.$

Seção 7.7

1. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$

2. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} & e^{-t/2} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{-t/2} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

3. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

4. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \\ -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$

5. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\operatorname{sen} 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$

7. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$

8. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\operatorname{sen} t & e^{-t}\operatorname{sen} t \\ 5e^{-t}\operatorname{sen} t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

9. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} & -e^{-2t} - e^{-t} \\ \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \frac{7}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{2t} \end{pmatrix}$

10. (b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}\cos 2t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \quad 2 \end{pmatrix}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$

17. (c) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\cos \omega t + \begin{pmatrix} v_0 \\ -\omega^2 u_0 \end{pmatrix}\frac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega}$

Seção 7.8

1. (c) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t}\right]$

2. (c) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

3. (c) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}\right]$

4. (c) $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}e^{-t/2}\right]$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}\right]$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

7. (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix}e^{-3t}$

8. (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t}$

9. (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}e^{t/2} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^{t/2}$

10. (a) $\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}t$

11. (a) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix}e^{t} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}te^{t} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

12. (a) $\mathbf{x} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}e^{-7t/2}$

13. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t\ln t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t\right]$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^{-3}\ln t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}t^{-3}\right]$

16. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t/2} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t/2}\right]$

17. (b) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

(c) $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

(d) $\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t^2/2)e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$

(e) $\Psi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t+2 \\ 1 & t+1 & (t^2/2)+t \\ -1 & -t & -(t^2/2)+3 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

18. (a) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{t}$

(d) $\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}$

(e) $\Psi(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 2 & 4t \\ 2 & -3 & -2t-1 \end{pmatrix}$ ou $e^{t} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2t \\ 0 & 4 & 4t \\ 2 & -2 & -2t-1 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. (a) $\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$

(c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{x} = \exp(\mathbf{J}t)\mathbf{x}^0$

20. (c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. (c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Seção 7.9

1. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-2t} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}$

3. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t\cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t\operatorname{sen} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$

4. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] - 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ln t + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}t^{-1} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}t^{-2}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}e^{-5t} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ln t + \frac{8}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t + \frac{4}{25}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{3t} + c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-8\end{pmatrix}e^{t}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{t}$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-t/2} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-2t} + \begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}\frac{17}{4}\\\frac{15}{4}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}e^{t}$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}e^{-4t} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-1\\2-\sqrt{2}\end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}2+\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{-t}$

11. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t + \operatorname{sen} t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} t\\-\cos t + 2\operatorname{sen} t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}t\cos t - \begin{pmatrix}5/2\\1\end{pmatrix}t\operatorname{sen} t - \begin{pmatrix}5/2\\1\end{pmatrix}\cos t$

12. $\mathbf{x} = [\frac{1}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \ln(-\cos t) - \frac{2}{5}t + c_1]\begin{pmatrix}5\cos t\\2\cos t + \operatorname{sen} t\end{pmatrix}$
$+ [\frac{2}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \frac{4}{5}t + c_2]\begin{pmatrix}5\operatorname{sen} t\\-\cos t + 2\operatorname{sen} t\end{pmatrix}$

13. (a) $\Psi(t) = \begin{pmatrix}e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t & e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\\4e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t & -4e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t\end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{x} = e^{-t/2}\begin{pmatrix}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t\\4-4\cos\frac{1}{2}t\end{pmatrix}$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t^{-1} - \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}t\ln t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}t^{2}$

15. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^{2} + c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}t + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}t^{4} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

CAPÍTULO 8

Seção 8.1

1. (a) 1,1975; 1,38549; 1,56491; 1,73658
   (b) 1,19631; 1,38335; 1,56200; 1,73308
   (c) 1,19297; 1,37730; 1,55378; 1,72316
   (d) 1,19405; 1,37925; 1,55644; 1,72638
2. (a) 1,59980; 1,29288; 1,07242; 0,930175
   (b) 1,61124; 1,31361; 1,10012; 0,962552
   (c) 1,64337; 1,37164; 1,17763; 1,05334
   (d) 1,63301; 1,35295; 1,15267; 1,02407
3. (a) 1,2025; 1,41603; 1,64289; 1,88590
   (b) 1,20388; 1,41936; 1,64896; 1,89572
   (c) 1,20864; 1,43104; 1,67042; 1,93076
   (d) 1,20693; 1,42683; 1,66265; 1,91802
4. (a) 1,10244; 1,21426; 1,33484; 1,46399
   (b) 1,10365; 1,21656; 1,33817; 1,46832
   (c) 1,10720; 1,22333; 1,34797; 1,48110
   (d) 1,10603; 1,22110; 1,34473; 1,47688
5. (a) 0,509239; 0,522187; 0,539023; 0,559936
   (b) 0,509701; 0,523155; 0,540550; 0,562089
   (c) 0,511127; 0,526155; 0,545306; 0,568822
   (d) 0,510645; 0,525138; 0,543690; 0,566529
6. (a) −0,920498; −0,857538; −0,808030; −0,770038
   (b) −0,922575; −0,860923; −0,812300; −0,774965
   (c) −0,928059; −0,870054; −0,824021; −0,788686
   (d) −0,926341; −0,867163; −0,820279; −0,784275
7. (a) 2,90330; 7,53999; 19,4292; 50,5614
   (b) 2,93506; 7,70957; 20,1081; 52,9779

(c) 3,03951; 8,28137; 22,4562; 61,5496
(d) 3,00306; 8,07933; 21,6163; 58,4462

8. (a) 0,891830; 1,25225; 2,37818; 4,07257
(b) 0,908902; 1,26872; 2,39336; 4,08799
(c) 0,958565; 1,31786; 2,43924; 4,13474
(d) 0,942261; 1,30153; 2,42389; 4,11908

9. (a) 3,95713; 5,09853; 6,41548; 7,90174
(b) 3,95965; 5,10371; 6,42343; 7,91255
(c) 3,96727; 5,11932; 6,44737; 7,94512
(d) 3,96473; 5,11411; 6,43937; 7,93424

10. (a) 1,60729; 2,46830; 3,72167; 5,45963
(b) 1,60996; 2,47460; 3,73356; 5,47774
(c) 1,61792; 2,49356; 3,76940; 5,53223
(d) 1,61528; 2,48723; 3,75742; 5,51404

11. (a) −1,45865; −0,217545; 1,05715; 1,41487
(b) −1,45322; −0,180813; 1,05903; 1,41244
(c) −1,43600; −0,0681657; 1,06489; 1,40575
(d) −1,44190; −0,105737; 1,06290; 1,40789

12. (a) 0,587987; 0,791589; 1,14743; 1,70973
(b) 0,589440; 0,795758; 1,15693; 1,72955
(c) 0,593901; 0,808716; 1,18687; 1,79291
(d) 0,592396; 0,804319; 1,17664; 1,77111

15. 1,595; 2,4636

16. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - 1]h^2$, $|e_{n+1}| \le [1 + 2\max_{0\le t\le 1}|\phi(t)|]h^2$,
$e_{n+1} = e^{2\bar{t}_n}h^2$, $|e_1| \le 0{,}012$, $|e_4| \le 0{,}022$

17. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - \bar{t}_n]h^2$, $|e_{n+1}| \le [1 + 2\max_{0\le t\le 1}|\phi(t)|]h^2$,
$e_{n+1} = 2e^{2\bar{t}_n}h^2$, $|e_1| \le 0{,}024$, $|e_4| \le 0{,}045$

18. $e_{n+1} = [\bar{t}_n + \bar{t}_n^2\phi(\bar{t}_n) + \phi^3(\bar{t}_n)]h^2$

19. $e_{n+1} = [19 - 15\bar{t}_n\phi^{-1/2}(\bar{t}_n)]h^2/4$

20. $e_{n+1} = \{1 + [\bar{t}_n + \phi(\bar{t}_n)]^{-1/2}\}h^2/4$

21. $e_{n+1} = \{2 - [\phi(\bar{t}_n) + 2\bar{t}_n^2]\exp[-\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)] - \bar{t}_n\exp[-2\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)]\}h^2/2$

22. (a) $\phi(t) = 1 + (1/5\pi)\operatorname{sen} 5\pi t$ (b) 1,2; 1,0; 1,2
(c) 1,1; 1,1; 1,0; 1,0 (d) $h < 1/\sqrt{50\pi} \cong 0{,}08$

24. $e_{n+1} = -\frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2$

25. (a) 1,55; 2,34; 3,46; 5,07
(b) 1,20; 1,39; 1,57; 1,74
(c) 1,20; 1,42; 1,65; 1,90

26. (a) 0 (b) 60 (c) −92,16

27. $0{,}224 \neq 0{,}225$

Seção 8.2

1. (a) 1,19512; 1,38120; 1,55909; 1,72956
(b) 1,19515; 1,38125; 1,55916; 1,72965
(c) 1,19516; 1,38126; 1,55918; 1,72967

2. (a) 1,62283; 1,33460; 1,12820; 0,995445
(b) 1,62243; 1,33386; 1,12718; 0,994215
(c) 1,62234; 1,33368; 1,12693; 0,993921

3. (a) 1,20526; 1,42273; 1,65511; 1,90570
(b) 1,20533; 1,42290; 1,65542; 1,90621
(c) 1,20534; 1,42294; 1,65550; 1,90634

4. (a) 1,10483; 1,21882; 1,34146; 1,47263
(b) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
(c) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262

5. (a) 0,510164; 0,524126; 0,542083; 0,564251
(b) 0,510168; 0,524135; 0,542100; 0,564277
(c) 0,510169; 0,524137; 0,542104; 0,564284

6. (a) −0,924650; −0,864338; −0,816642; −0,780008
(b) −0,924550; −0,864177; −0,816442; −0,779781
(c) −0,924525; −0,864138; −0,816393; −0,779725

7. (a) 2,96719; 7,88313; 20,8114; 55,5106
(b) 2,96800; 7,88755; 20,8294; 55,5758

8. (a) 0,926139; 1,28558; 2,40898; 4,10386
   (b) 0,925815; 1,28525; 2,40869; 4,10359
9. (a) 3,96217; 5,10887; 6,43134; 7,92332
   (b) 3,96218; 5,10889; 6,43138; 7,92337
10. (a) 1,61263; 2,48097; 3,74556; 5,49595
    (b) 1,61263; 2,48092; 3,74550; 5,49589
11. (a) −1,44768; −0,144478; 1,06004; 1,40960
    (b) −1,44765; −0,143690; 1,06072; 1,40999
12. (a) 0,590897; 0,799950; 1,16653; 1,74969
    (b) 0,590906; 0,799988; 1,16663; 1,74992
15. $e_{n+1} = (38h^3/3)\exp(4\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 37.758\,8h^3$ em $0 \le t \le 2$, $|e_1| \le 0{,}00193389$
16. $e_{n+1} = (2h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 4{,}92604h^3$ em $0 \le t \le 1$, $|e_1| \le 0{,}000814269$
17. $e_{n+1} = (4h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \le 9{,}85207h^3$ em $0 \le t \le 1$, $|e_1| \le 0{,}00162854$
18. $h \cong 0{,}071$
19. $h \cong 0{,}023$
20. $h \cong 0{,}081$
21. $h \cong 0{,}117$
23. 1,19512, 1,38120, 1,55909, 1,72956
24. 1,62268, 1,33435, 1,12789, 0,995130
25. 1,20526, 1,42273, 1,65511, 1,90570
26. 1,10485, 1,21886, 1,34149, 1,47264

Seção 8.3

1. (a) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
   (b) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
2. (a) 1,62231; 1,33362; 1,12686; 0,993839
   (b) 1,62230; 1,33362; 1,12685; 0,993826
3. (a) 1,20535; 1,42295; 1,65553; 1,90638
   (b) 1,20535; 1,42296; 1,65553; 1,90638
4. (a) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
   (b) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
5. (a) 0,510170; 0,524138; 0,542105; 0 564286
   (b) 0,520169; 0,524138; 0,542105; 0 564286
6. (a) −0,924517; −0,864125; −0 816377; −0,779706
   (b) −0,924517; −0,864125; −0 816377; −0,779706
7. (a) 2,96825; 7 88889; 20,8349; 55,5957
   (b) 2,96828; 7 88904; 20,8355; 55,5980
8. (a) 0,925725; 1,28516; 2,40860; 4,10350
   (b) 0,925711; 1,28515; 2,40860; 4,10350
9. (a) 3,96219; 5,10890; 6,43139; 7,92338
   (b) 3,96219; 5,10890; 6,43139; 7,92338
10. (a) 1,61262; 2,48091; 3,74548; 5,49587
    (b) 1,61262; 2,48091; 3,74548; 5,49587
11. (a) −1,44764; −0,143543; 1,06089; 1,41008
    (b) −1,44764; −0,143427; 1,06095; 1,41011
12. (a) 0,590909; 0,800000; 1,166667; 1,75000
    (b) 0,590909; 0,800000; 1,166667; 1,75000

Seção 8.4

1. (a) 1,7296801; 1,8934697
   (b) 1,7296802; 1,8934698
   (c) 1,7296805; 1,8934711
2. (a) 0,993852; 0,925764
   (b) 0,993846; 0,925746
   (c) 0,993869; 0,925837
3. (a) 1,906382; 2,179567
   (b) 1,906391; 2,179582
   (c) 1,906395; 2,179611
4. (a) 1,4726173; 1,6126215
   (b) 1,4726189; 1,6126231
   (c) 1,4726199; 1,6126256

5. (a) 0,56428577; 0.59090918
   (b) 0,56428581; 0.59090923
   (c) 0,56428588; 0.59090952
6. (a) −0,779693; −0,753135
   (b) −0,779692; −0,753137
   (c) −0,779680; −0,753089
7. (a) 2,96828; 7,88907; 20.8356; 55.5984
   (b) 2,96829; 7,88909; 20.8357; 55.5986
   (c) 2,96831; 7.88926; 20.8364; 55.6015
8. (a) 0,9257133; 1.285148; 2,408595; 4,103495
   (b) 0,9257124; 1.285148; 2,408595; 4,103495
   (c) 0,9257248; 1.285158; 2,408594; 4,103493
9. (a) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
   (b) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
   (c) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
10. (a) 1,612622; 2,480909; 3,745479; 5,495872
    (b) 1,612622; 2,480909; 3,745479; 5,495873
    (c) 1,612623; 2,480905; 3,745473; 5,495869
11. (a) −1,447639; −0,1436281; 1.060946; 1,410122
    (b) −1,447638; −0,1436762; 1,060913; 1,410103
    (c) −1,447621; −0,1447219; 1.060717; 1,410027
12. (a) 0,5909091; 0.8000000; 1,166667; 1,750000
    (b) 0,5909091; 0.8000000; 1,166667; 1,750000
    (c) 0,5909092; 0.8000002; 1,166667; 1,750001

Seção 8.5

1. (b) $\phi_2(t) - \phi_1(t) = 0{,}001e^t \to \infty$ quando $t \to \infty$
2. (b) $\phi_1(t) = \ln[e^t/(2 - e^t)]$; $\phi_2(t) = \ln[1/(1 - t)]$
3. (a,b) $h = 0{,}00025$ é suficiente. (c) $h = 0{,}005$ é suficiente.
4. (a) $y = 4e^{-10t} + (t^2/4)$. (c) O método de Runge-Kutta é estável para $h = 0{,}25$, mas é instável para $h = 0{,}3$. (d) $h = 5/13 \equiv 0{,}384615$ é suficientemente pequeno.
5. (a) $y = t$
6. (a) $y = t^2$

Seção 8.6

1. (a) 1,26, 0,76; 1.7714, 1.4824; 2.58991, 2,3703; 3.82374, 3,60413; 5,64246, 5,38885
   (b) 1,32493, 0,758933; 1.93679, 1.57919; 2,93414, 2,66099; 4,48318, 4,22639; 6,84236, 6,56452
   (c) 1,32489, 0,759516; 1.9369, 1.57999; 2,93459, 2,66201; 4,48422, 4.22784; 6,8444, 6,56684
2. (a) 1,451, 1,232; 2,16133, 1,65988; 3,29292, 2,55559; 5,16361, 4,7916; 8,54951, 12,0464
   (b) 1,51844, 1,28089; 2,37684, 1.87711; 3,85039, 3,44859; 6,6956, 9,50309; 15,0987, 64,074
   (c) 1,51855, 1,2809; 2,3773, 1,87729; 3,85247, 3,45126; 6,71282, 9,56846; 15,6384, 70,3792
3. (a) 0,582, 1,18; 0.117969, 1,27344; −0,336912, 1,27382; −0,730007, 1.18572; −1,02134, 1,02371
   (b) 0,568451, 1,15775; 0,109776, 1.22556; −0,32208, 1,20347; −0,681296, 1,10162; −0,937852, 0.937852
   (c) 0,56845, 1,15775; 0,109773, 1.22557; −0,322081, 1,20347; −0,681291, 1,10161; −0,937841, 0.93784
4. (a) −0,198, 0,618; −0,378796, 0,28329; −0,51932, −0,0321025; −0,594324, −0,326801; −0,588278, −0,57545
   (b) −0,196904, 0,630936; −0,372643, 0,298888; −0,501302, −0,0111429; −0,561270, −0,288943; −0,547053, −0,508303
   (c) −0,196935, 0,630939; −0,372687, 0,298866; −0,501345, −0,0112184; −0,561292, −0,28907; −0,547031, −0,508427

5. (a) 2,96225, 1,34538; 2,34119, 1,67121; 1,90236, 1,97158; 1,56602, 2,23895; 1,29768, 2,46732
   (b) 3,06339, 1,34858; 2,44497, 1,68638; 1,9911, 2,00036; 1,63818, 2,27981; 1,3555, 2,5175
   (c) 3,06314, 1,34899; 2,44465, 1,68699; 1,99075, 2,00107; 1,63781, 2,28057; 1,35514, 2,51827
6. (a) 1,42386, 2,18957; 1,82234, 2,36791; 2,21728, 2,53329; 2,61118, 2,68763; 2,9955, 2,83354
   (b) 1,41513, 2,18699; 1,81208, 2,36233; 2,20635, 2,5258; 2,59826, 2,6794; 2,97806, 2,82487
   (c) 1,41513, 2,18699; 1,81209, 2,36233; 2,20635, 2,52581; 2,59826, 2,67941; 2,97806, 2,82488
7. Para $h = 0{,}05$ e 0,025: $x = 10{,}227, y = -4{,}9294$; estes resultados estão de acordo com a solução exata até cinco dígitos
8. 1,543, 0,0707503; 1,14743, −1,3885 9. 1,99521, −0,662442

CAPÍTULO 9

Seção 9.1

1. (a) $r_1 = -1, \xi^{(1)} = (1, 2)^T; r_2 = 2, \xi^{(2)} = (2, 1)^T$ (b) ponto de sela, instável
2. (a) $r_1 = 2, \xi^{(1)} = (1, 3)^T; r_2 = 4, \xi^{(2)} = (1, 1)^T$ (b) nó, instável
3. (a) $r_1 = -1, \xi^{(1)} = (1, 3)^T; r_2 = 1, \xi^{(2)} = (1, 1)^T$ (b) ponto de sela, instável
4. (a) $r_1 = r_2 = -3; \xi^{(1)} = (1, 1)^T$ (b) nó impróprio, assintoticamente estável
5. (a) $r_1, r_2 = -1 \pm i; \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ (b) ponto espiral, assintoticamente estável
6. (a) $r_1, r_2 = \pm i; \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ (b) centro, estável
7. (a) $r_1, r_2 = 1 \pm 2i; \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (1, 1 \mp i)^T$ (b) ponto espiral, instável
8. (a) $r_1 = -1, \xi^{(1)} = (1, 0)^T; r_2 = -1/4, \xi^{(2)} = (4, -3)^T$ (b) nó, assintoticamente estável
9. (a) $r_1 = r_2 = 1; \xi^{(1)} = (2, 1)^T$ (b) nó impróprio, instável
10. (a) $r_1, r_2 = \pm 3i; \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2, -1 \pm 3i)^T$ (b) centro, estável
11. (a) $r_1 = r_2 = -1; \xi^{(1)} = (1, 0)^T, \xi^{(2)} = (0, 1)^T$ (b) nó próprio, assintoticamente estável
12. (a) $r_1, r_2 = (1 \pm 3i)/2; \xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (5, 3 \mp 3i)^T$ (b) ponto espiral, instável
13. $x_0 = 1, y_0 = 1; r_1 = \sqrt{2}, r_2 = -\sqrt{2}$; ponto de sela, instável
14. $x_0 = -1, y_0 = 0; r_1 = -1, r_2 = -3$; nó, assintoticamente estável
15. $x_0 = -2, y_0 = 1; r_1, r_2 = -1 \pm \sqrt{2}i$; ponto espiral, assintoticamente estável
16. $x_0 = \gamma/\delta, y_0 = \alpha/\beta; r_1, r_2 = \pm \sqrt{\beta\delta}i$; centro, estável
17. $c^2 > 4km$, nó, assintoticamente estável; $c^2 = 4km$, nó impróprio, assintoticamente estável; $c^2 < 4km$, ponto espiral, assintoticamente estável

Seção 9.2

1. $x = 4e^{-t}, \ y = 2e^{-2t}, \ y = x^2/8$
2. $x = 4e^{-t}, \ y = 2e^{2t}, \ y = 32x^{-2}; \quad x = 4e^{-t}, \ y = 0$
3. $x = 4\cos t, \ y = 4\operatorname{sen} t, \ x^2 + y^2 = 16; \quad x = -4\operatorname{sen} t, \ y = 4\cos t, \ x^2 + y^2 = 16$
4. $x = \sqrt{a}\cos\sqrt{ab}\,t, \ y = -\sqrt{b}\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,t; \quad (x^2/a) + (y^2/b) = 1$
5. (a, c) $(-\frac{1}{2}, 1)$, ponto de sela, instável; (0, 0), nó (próprio), instável
6. (a, c) $(-\sqrt{3}/3, -\frac{1}{2})$, ponto de sela, instável; $(\sqrt{3}/3, -\frac{1}{2})$, centro, estável
7. (a, c) (0, 0), nó, instável; (2, 0), nó, assintoticamente estável; $(0, \frac{3}{2})$, ponto de sela, instável; (−1, 3), nó, assintoticamente estável
8. (a, c) (0, 0), nó, assintoticamente estável; (1, −1), ponto de sela, instável; (1, −2), ponto aspiral, assintoticamente estável
9. (a, c) (0, 0), ponto espiral, assintoticamente estável; $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, ponto de sela, instável; $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, ponto de sela, instável
10. (a, c) (0, 0), ponto de sela, instável; (2, 2), ponto espiral, assintoticamente estável; (−1, −1), ponto espiral, assintoticamente estável; (−2, 0), ponto de sela, instável
11. (a, c) (0, 0), ponto de sela, instável; (0, 1), ponto de sela, instável; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, centro, estável; $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, centro, estável
12. (a, c) (0, 0), ponto de sela, instável; $(\sqrt{6}, 0)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(-\sqrt{6}, 0)$, ponto espiral, assintoticamente estável
13. (a, c) (0, 0), ponto de sela, instável; (−2, 2), nó, instável; (4, 4), ponto espiral, assintoticamente estável
14. (a, c) (0, 0), ponto de sela, instável; (2, 0), ponto de sela, instável; (1, 1), ponto espiral, assintoticamente estável; (−2, −2), ponto espiral, assintoticamente estável
15. (a, c) (0, 0), nó, instável; (1, 1), ponto de sela, instável; (3, −1), ponto espiral, assintoticamente estável

16. (a, c) $(0, 1)$, ponto de sela, instável; $(1, 1)$, nó, assintoticamente estável; $(-2, 4)$, ponto espiral, instável
17. (a) $4x^2 - y^2 = c$
18. (a) $4x^2 + y^2 = c$
19. (a) $(y - 2x)^2(x + y) = c$
20. (a) $\arctan(y/x) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$
21. (a) $2x^2y - 2xy + y^2 = c$
22. (a) $x^2y^2 - 3x^2y - 2y^2 = c$
23. (a) $(y^2/2) - \cos x = c$
24. (a) $x^2 + y^2 - (x^4/12) = c$

Seção 9.3

1. Linear e não linear: ponto de sela, instável
2. Linear e não linear: ponto espiral, assintoticamente estável
3. Linear: centro, estável; não linear: ponto espiral ou centro, indeterminado
4. Linear: nó impróprio, instável; não linear: nó ou ponto espiral, instável
5. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = -2u + 2v$, $v' = 4u + 4v$; $r = 1 \pm \sqrt{17}$; ponto de sela, instável
   $(-2, 2)$; $u' = 4u$, $v' = 6u + 6v$; $r = 4, 6$; nó, instável
   $(4, 4)$; $u' = -6u + 6v$, $v' = -8u$; $r = -3 \pm \sqrt{39}i$; ponto espiral, assintoticamente estável
6. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = 3v$; $r = 1, 3$; nó, instável
   $(1, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = 2v$; $r = -1, 2$; ponto de sela, instável
   $(0, \frac{3}{2})$; $u' = (-\frac{1}{2})u$, $v' = (-\frac{3}{2})u - 3v$; $r = -\frac{1}{2}, -3$; nó, assintoticamente estável
   $(-1, 2)$; $u' = u + v$, $v' = -2u - 4v$; $r = (-3 \pm \sqrt{17})/2$; ponto de sela, instável
7. (a, b, c) $(1, 1)$; $u' = -v$, $v' = 2u - 2v$; $r = -1 \pm i$; ponto espiral, assintoticamente estável
   $(-1, 1)$; $u' = -v$, $v' = -2u - 2v$; $r = -1 \pm \sqrt{3}$; ponto de sela, instável
8. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = (\frac{1}{2})v$; $r = 1, \frac{1}{2}$; nó, instável
   $(0, 2)$; $u' = -u$, $v' = (-\frac{3}{2})u - (\frac{1}{2})v$; $r = -1, -\frac{1}{2}$; nó, assintoticamente estável
   $(1, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = (-\frac{1}{4})v$; $r = -1, -1/4$; nó, assintoticamente estável
   $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; $u' = (-\frac{1}{2})u - (\frac{1}{2})v$, $v' = (-\frac{3}{8})u - (\frac{1}{8})v$; $r = (-5 \pm \sqrt{57})/16$; ponto de sela, instável
9. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = -u + 2v$, $v' = u + 2v$; $r = (1 \pm \sqrt{17})/2$; ponto de sela, instável
   $(2, 1)$; $u' = (-\frac{3}{2})u + 3v$, $v' = -2u$; $r = (-3 \pm \sqrt{87}i)/4$; ponto espiral, assintoticamente estável
   $(2, -2)$; $u' = -3v$, $v' = u$; $r = \pm\sqrt{3}i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
   $(4, -2)$; $u' = -4v$, $v' = -u - 2v$; $r = -1 \pm \sqrt{5}$; ponto de sela, instável
10. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = v$; $r = 1, 1$; nó ou ponto espiral, instável
    $(-1, 0)$; $u' = -u$, $v' = 2v$; $r = -1, 2$; ponto de sela, instável
11. (a, b, c)$(0, 0)$; $u' = 2u + v$, $v' = u - 2v$; $r = \pm\sqrt{5}$; ponto de sela, instável $(-1{,}1935; -1{,}4797)$; $u' = -1{,}2399u - 6{,}8393v$, $v' = 2{,}4797u - 0{,}80655v$; $r = -1{,}0232 \pm 4{,}1125i$; ponto espiral, assintoticamente estável
12. (a, b, c) $(0, \pm 2n\pi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $u' = v$, $v' = -u$; $r = \pm i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
    $(2, \pm 2(n - 1)\pi)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $u' = -3v$, $v' = -u$; $r = \pm\sqrt{3}$; ponto de sela, instável
13. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = v$; $r = 1, 1$; nó ou ponto espiral, instável
    $(1, 1)$; $u' = u - 2v$, $v' = -2u + v$; $r = 3, -1$; ponto de sela, instável
14. (a, b, c) $(1, 1)$; $u' = -u - v$, $v' = u - 3v$; $r = -2, -2$; nó ou ponto espiral, assintoticamente estável
    $(-1, -1)$; $u' = u + v$, $v' = u - 3v$; $r = -1 \pm \sqrt{5}$; ponto de sela, instável
15. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = -2u - v$, $v' = u - v$; $r = (-3 \pm \sqrt{3}i)/2$; ponto espiral, assintoticamente estável
    $(-0{,}33076; 1{,}0924)$ e $(0{,}33076; -1{,}0924)$; $u' = -3{,}5216u - 0{,}27735v$, $v' = 0{,}27735u + 2.6895v$; $r = -3{,}5092$; $2{,}6771$; ponto de sela, instável
16. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u + v$, $v' = -u + v$; $r = 1 \pm i$; ponto espiral, instável
17. (a, b, c) $(2, 2)$; $u' = -4v$, $v' = (-\frac{7}{2})u + (\frac{7}{2})v$; $r = (7 \pm \sqrt{273})/4$; ponto de sela, instável
    $(-2, -2)$; $u' = 4v$, $v' = (\frac{1}{2})u - (\frac{1}{2})v$; $r = (-1 \pm \sqrt{33})/4$; ponto de sela, instável
    $(-\frac{3}{2}, 2)$; $u' = -4v$, $v' = (\frac{7}{2})u$; $r = \pm\sqrt{14}i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
    $(-\frac{3}{2}, -2)$; $u' = 4v$, $v' = (-\frac{1}{2})u$; $r = \pm\sqrt{2}i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
18. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = 2u - v$, $v' = 2u - 4v$; $r = -1 \pm \sqrt{7}$; ponto de sela, instável
    $(2, 1)$; $u' = -3v$, $v' = 4u - 8v$; $r = -2, -6$; nó, assintoticamente estável
    $(-2, 1)$; $u' = 5v$, $v' = -4u$; $r = \pm 2\sqrt{5}i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
    $(-2, -4)$; $u' = 10u - 5v$, $v' = 6u$; $r = 5 \pm \sqrt{5}i$; ponto espiral, instável
21. (b, c) Veja a Tabela 9.3.1
23. (a) $R = A$, $T \cong 3{,}17$ (b) $R = A$, $T \cong 3{,}20$; $3{,}35$; $3{,}63$; $4{,}17$
    (c) $T \to \pi$ quando $A \to 0$ (d) $A = \pi$
24. (b) $v_e \cong 4{,}00$
25. (b) $v_e \cong 4{,}51$
30. (a) $dx/dt = y$, $dy/dt = -g(x) - c(x)y$
    (b) O sistema linear é $dx/dt = y$, $dy/dt = -g'(0)x - c(0)y$
    (c) Os autovalores satisfazem $r^2 + c(0)r + g'(0) = 0$

Seção 9.4

1. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{3}{2})u$, $v' = 2v$; $r = \frac{3}{2}, 2$; nó, instável
   $(0,2)$; $u' = (\frac{1}{2})u$, $v' = (-\frac{3}{2})u - 2v$; $r = \frac{1}{2}, -2$; ponto de sela, instável
   $(\frac{3}{2}, 0)$; $u' = (-\frac{3}{2})u - (\frac{3}{4})v$, $v' = (\frac{7}{8})v$; $r = -\frac{3}{2}, \frac{7}{8}$; ponto de sela, instável
   $(\frac{4}{5}, \frac{7}{5})$; $u' = (-\frac{4}{5})u - (\frac{2}{5})v$, $v' = (-\frac{21}{10})u - (\frac{7}{5})v$; $r = (-22 \pm \sqrt{204})/20$; nó, assintoticamente estável
2. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{3}{2})u$, $v' = 2v$; $r = \frac{3}{2}, 2$; nó, instável
   $(0,4)$; $u' = (-\frac{1}{2})u$, $v' = -6u - 2v$; $r = -\frac{1}{2}, -2$; nó, assintoticamente estável
   $(\frac{3}{2}, 0)$; $u' = (-\frac{3}{2})u - (\frac{3}{4})v$, $v' = (-\frac{1}{4})v$; $r = -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2}$; nó, assintoticamente estável
   $(1,1)$; $u' = -u - (\frac{1}{2})v$, $v' = (-\frac{3}{2})u - (\frac{1}{2})v$; $r = (-3 \pm \sqrt{13})/4$; ponto de sela, instável
3. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{3}{2})u$, $v' = 2v$; $r = \frac{3}{2}, 2$; nó, instável
   $(0,2)$; $u' = (-\frac{1}{2})u$, $v' = (-\frac{9}{4})u - 2v$; $r = -\frac{1}{2}, -2$; nó, assintoticamente estável
   $(3,0)$; $u' = (-\frac{3}{2})u - 3v$, $v' = (-\frac{11}{8})v$; $r = -\frac{3}{2}, -\frac{11}{8}$; nó, assintoticamente estável
   $(\frac{4}{5}, \frac{11}{10})$; $u' = (-\frac{2}{5})u - (\frac{4}{5})v$, $v' = (-\frac{99}{80})u - (\frac{11}{10})v$; $r = -1{,}80475; 0{,}30475$; ponto de sela, instável
4. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{3}{2})u$, $v' = (\frac{3}{4})v$; $r = \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$; nó, instável
   $(0, \frac{3}{4})$; $u' = (\frac{3}{4})u$, $v' = (-\frac{3}{4})v$; $r = \pm\frac{3}{4}$; ponto de sela, instável
   $(3,0)$; $u' = (-\frac{3}{2})u - 3v$, $v' = (\frac{3}{8})v$; $r = -\frac{3}{2}, \frac{3}{8}$; ponto de sela, instável
   $(2, \frac{1}{2})$; $u' = -u - 2v$, $v' = (-\frac{1}{16})u - (\frac{1}{2})v$; $r = -1{,}18301; -0{,}31699$; nó, assintoticamente estável
5. (b, c) $(0,0)$; $u' = u$, $v' = (\frac{3}{2})v$; $r = 1, \frac{3}{2}$; nó, instável
   $(0, \frac{3}{2})$; $u' = (-\frac{1}{2})u$, $v' = (-\frac{3}{2})u - (\frac{3}{2})v$; $r = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$; nó, assintoticamente estável
   $(1,0)$; $u' = -u - v$, $v' = (\frac{1}{2})v$; $r = -1, \frac{1}{2}$; ponto de sela, instável
6. (b, c) $(0,0)$; $u' = u$, $v' = (\frac{5}{2})v$; $r = 1, \frac{5}{2}$; nó, instável
   $(0, \frac{5}{3})$; $u' = (\frac{11}{6})u$, $v' = (\frac{5}{12})u - (\frac{5}{2})v$; $r = \frac{11}{6}, -5/2$; ponto de sela, instável
   $(1,0)$; $u' = -u + (\frac{1}{2})v$, $v' = (\frac{11}{4})v$; $r = -1, \frac{11}{4}$; ponto de sela, instável
   $(2,2)$; $u' = -2u + v$, $v' = (\frac{1}{2})u - 3v$; $r = (-5 \pm \sqrt{3})/2$; nó, assintoticamente estável
8. (a) Os pontos críticos são $x = 0, y = 0$; $x = \epsilon_1/\sigma_1, y = 0$; $x = 0, y = \epsilon_2/\sigma_2$. $x \to 0, y \to \epsilon_2/\sigma_2$ quando $t \to \infty$; os vermelhões sobrevivem
   (b) Os mesmos pontos críticos que em (a), mas $x \to \epsilon_1/\sigma_1$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$; os peixes azulados sobrevivem
9. (a) $X = (B - \gamma_1 R)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$, $Y = (R - \gamma_2 B)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$
   (b) X diminui, Y aumenta; sim, se B se tornar menor do que $\gamma_1 R$, então $x \to 0$ e $y \to R$ quando $t \to \infty$
10. (a) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 \neq 0$: $(0,0), (0, \epsilon_2/\sigma_2), (\epsilon_1/\sigma_1, 0)$
    $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$: $(0,0)$ e todos os pontos na reta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$
    (b) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$: $(0,0)$ é um nó instável; $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ é um ponto de sela; $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ é um nó assintoticamente estável
    $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$: $(0,0)$ é um nó instável; $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ é um ponto de sela; $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ é um nó assintoticamente estável
    (c) $(0,0)$ é um nó instável; os pontos na reta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$ são pontos críticos estáveis, não isolados
12. (a) $(0,0)$, ponto de sela; $(0{,}15; 0)$, ponto espiral se $\gamma^2 < 1{,}11$; $(2,0)$, ponto de sela
    (c) $\gamma \cong 1{,}20$
13. (b) $(2 - \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$, $(2 + \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$
    (c) $(1,3)$ é um nó assintoticamente estável; $(3,3)$ é um ponto de sela
    (d) $\alpha_0 = 8/3$; o ponto crítico é $(2,4)$; $\lambda = 0, -1$
14. (b) $(2 - \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$, $(2 + \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$
    (c) $(1,3)$ é um ponto de sela; $(3,3)$ é um ponto espiral instável
    (d) $\alpha_0 = 8/3$; o ponto crítico é $(2,4)$; $\lambda = 0, 1$
15. (b) $([3 - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    $([3 + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$
    (c) $(1,3)$ é um ponto de sela; $(2,4)$ é um ponto espiral instável
    (d) $\alpha_0 = 9/4$; o ponto crítico é $(3/2, 15/4)$; $\lambda = 0, 0$
16. (b) $([3 - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    $([3 + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$
    (c) $(1,3)$ é um centro da aproximação linear e também do sistema linear; $(2,4)$ é um ponto de sela
    (d) $\alpha_0 = 9/4$; o ponto crítico é $(3/2, 15/4)$; $\lambda = 0, 0$
17. (b) $P_1(0,0), P_2(1,0), P_3(0,\alpha), P_4(2 - 2\alpha, -1 + 2\alpha)$. P_4 está no primeiro quadrante para $0{,}5 \leq \alpha \leq 1$.
    (c) $\alpha = 0$; P_3 coincide com P_1. $\alpha = 0{,}5$; P_4 coincide com P_2. $\alpha = 1$; P_4 coincide com P_3.
    (d) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -0{,}5y & \alpha - 2y - 0{,}5x \end{pmatrix}$

(e) P_1 é um nó instável para $\alpha > 0$. P_2 é um nó assintoticamente estável para $0 < \alpha < 0{,}5$ e um ponto de sela para $\alpha > 0{,}5$. P_3 é um ponto de sela para $0 < \alpha < 1$ e um nó assintoticamente estável para $\alpha > 1$. P_4 é um nó assintoticamente estável para $0{,}5 < \alpha < 1$.

18. (b) $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0; 0{,}75/\alpha)$. $P_4[(4\alpha - 3)/(4\alpha - 2), 1/(4\alpha - 2)]$. P_4 está no primeiro quadrante para $\alpha \geq 0{,}75$.
(c) $\alpha = 0{,}75$; P_3 coincide com P_4.
(d) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -0{,}5y & 0{,}75 - 2\alpha y - 0{,}5x \end{pmatrix}$
(e) P_1 é um nó instável. P_2 é um ponto de sela. P_3 é um nó assintoticamente estável para $0 < \alpha < 0{,}75$ e um ponto de sela para $\alpha > 0{,}75$. P_4 é um nó assintoticamente estável para $\alpha > 0{,}75$.

19. (b) $P_1(0,0)$, $P_2(1,0)$, $P_3(0,\alpha)$, $P_4(0.5; 0{,}5)$. Além disso, para $\alpha = 1$, todo ponto na reta $x + y = 1$ é um ponto crítico.
(c) $\alpha = 0$; P_3 coincide com P_1. Também $\alpha = 1$.
(d) $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -(2\alpha - 1)y & \alpha - 2y - (2\alpha - 1)x \end{pmatrix}$
(e) P_1 é um nó instável para $\alpha > 0$. P_2 e P_3 são pontos de sela para $0 < \alpha < 1$ e nós assintoticamente estáveis para $\alpha > 1$. P_4 é um ponto espiral assintoticamente estável para $0 < \alpha < 0{,}5$, um nó assintoticamente estável para $0{,}5 < \alpha < 1$ e um ponto de sela para $\alpha > 1$.

Seção 9.5

1. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{3}{2})u$, $v' = (-\frac{1}{2})v$; $r = \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$; ponto de sela, instável
$(\frac{1}{2}, 3)$; $u' = (-\frac{1}{4})v$, $v' = 3u$; $r = \pm\sqrt{3}i$ 2; centro ou ponto espiral, indeterminado
2. (b, c) $(0,0)$; $u' = u$, $v' = (-\frac{1}{4})v$; $r = 1, -\frac{1}{4}$; ponto de sela, instável
$(\frac{1}{2}, 2)$; $u' = (-\frac{1}{4})v$, $v' = u$; $r = \pm(\frac{1}{2})i$; centro ou ponto espiral, indeterminado
3. (b, c) $(0,0)$; $u' = u$, $v' = (-\frac{1}{4})v$; $r = 1, -\frac{1}{4}$; ponto de sela, instável
$(2, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = (\frac{3}{4})v$; $r = -1, \frac{3}{2}$; ponto de sela, instável
$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; $u' = (-\frac{1}{4})u - (\frac{1}{4})v$, $v' = (\frac{3}{4})u$; $r = (-1 \pm \sqrt{11}i)/8$; ponto espiral, assintoticamente estável
4. (b, c) $(0,0)$; $u' = (\frac{9}{8})u$, $v' = -v$; $r = \frac{9}{8}, -1$; ponto de sela, instável
$(\frac{9}{8}, 0)$; $u' = (-\frac{9}{8})u - (\frac{9}{16})v$, $v' = (\frac{1}{8})v$; $r = -\frac{9}{8}, \frac{1}{8}$; ponto de sela, instável
$(1, \frac{1}{4})$; $u' = -u - (\frac{1}{2})v$, $v' = (\frac{1}{4})u$; $r = (-1 \pm \sqrt{0.5})/2$; nó, assintoticamente estável
5. (b, c) $(0,0)$; $u' = -u$, $v' = (-\frac{3}{2})v$; $r = -1, -\frac{3}{2}$; nó, assintoticamente estável
$(\frac{1}{2}, 0)$; $u' = (\frac{3}{4})u - (\frac{3}{20})v$, $v' = -v$; $r = -1, \frac{3}{4}$; ponto de sela, instável
$(2, 0)$; $u' = -3u - (\frac{3}{5})v$, $v' = (\frac{1}{2})v$; $r = -3, \frac{1}{2}$; ponto de sela, instável
$(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$; $u' = (-\frac{3}{4})u - (\frac{9}{20})v$, $v' = (\frac{5}{3})u$; $r = (-3 \pm \sqrt{39}i)/8$; ponto espiral, assintoticamente estável
6. (b, c)

$t = 0, T, 2T, \ldots$:	H é um máximo,	dP/dt é um máximo.
$t = T/4, 5T/4, \ldots$:	dH/dt é um mínimo.	P é um máximo.
$t = T/2, 3T/2, \ldots$:	H é um mínimo,	dP/dt é um mínimo.
$t = 3T/4, 7T/4, \ldots$:	dH/dt é um máximo.	P é um mínimo.

7. (a) $\sqrt{c}\,\alpha/\sqrt{a}\,\gamma$ (b) $\sqrt{3}$
(d) A razão das amplitudes da presa e do predador aumenta bem devagar quando o ponto inicial se afasta do ponto de equilíbrio.
8. (a) $4\pi/\sqrt{3} \cong 7{,}2552$
(c) O período aumenta devagar quando o ponto inicial se afasta do ponto de equilíbrio.
9. (a) $T \cong 6{,}5$ (b) $T \cong 3{,}7$, $T \cong 11{,}5$ (c) $T \cong 3{,}8$, $T \cong 11{,}1$
11. (a) $P_1(0,0)$, $P_2(1/\sigma, 0)$, $P_3(3, 2 - 6\sigma)$; P_2 se move para a esquerda e P_3 se move para baixo; eles coincidem em $(3,0)$ quando $\sigma = 1/3$.
(b) P_1 é um ponto de sela. P_2 é um ponto de sela para $\sigma < 1/3$ e um nó assintoticamente estável para $\sigma > 1/3$. P_3 é um ponto espiral assintoticamente estável para $\sigma < \sigma_1 = (\sqrt{7/3} - 1)/2 \cong 0{,}2638$, um nó assintoticamente estável para $\sigma_1 < \sigma < 1/3$ e um ponto de sela para $\sigma > 1/3$.
12. (a) $P_1(0,0)$, $P_2(a/\sigma, 0)$, $P_3[c/\gamma, (a/\alpha) - (c\sigma/\alpha\gamma)]$; P_2 se move para a esquerda e P_3 se move para baixo; eles coincidem em $(c/\gamma, 0)$ quando $\sigma = a\gamma/c$.
(b) P_1 é um ponto de sela. P_2 é um ponto de sela para $\sigma < a\gamma/c$ e um nó assintoticamente estável para $\sigma > a\gamma/c$. P_3 é um ponto espiral assintoticamente estável para valores suficientemente pequenos de σ e torna-se um nó assintoticamente estável em um determinado valor $\sigma_1 < a\gamma/c$. P_3 é um ponto de sela para $\sigma > a\gamma/c$.
13. (a, b) $P_1(0,0)$ é um ponto de sela; $P_2(5,0)$ é um ponto de sela; $P_3(2; 2{,}4)$ é um ponto espiral assintoticamente estável.

14. (b) A mesma população de presas, menos predadores
    (c) Mais presas, a mesma quantidade de predadores
    (d) Mais presas, menos predadores
15. (b) A mesma população de presas, menos predadores
    (c) Mais presas, menos predadores
    (d) Mais presas, menos predadores ainda
16. (b) A mesma população de presas, menos predadores
    (c) Mais presas, a mesma quantidade de predadores
    (d) Mais presas, menos predadores

Seção 9.7

1. $r = 1, \theta = t + t_0$, ciclo limite estável. 2. $r = 1, \theta = -t + t_0$, ciclo limite semiestável
3. $r = 1, \theta = t + t_0$, ciclo limite estável; $r = 3, \theta = t + t_0$, solução periódica instável
4. $r = 1, \theta = -t + t_0$, solução periódica instável; $r = 2, \theta = -t + t_0$, ciclo limite estável
5. $r = 2n - 1, \theta = t + t_0, n = 1, 2, 3, \ldots$, ciclo limite estável
   $r = 2n, \theta = t + t_0, n = 1, 2, 3, \ldots$, solução periódica instável
6. $r = 2, \theta = -t + t_0$, ciclo limite semiestável
   $r = 3, \theta = -t + t_0$, solução periódica instável
8. (a) Sentido trigonométrico
   (b) $r = 1, \theta = t + t_0$, ciclo limite estável; $r = 2, \theta = t + t_0$, ciclo limite semiestável; $r = 3, \theta = t + t_0$, solução periódica semiestável
9. $r = \sqrt{2}, \theta = -t + t_0$, solução periódica instável
14. (a) $\mu = 0{,}2,\ T \cong 6{,}29; \quad \mu = 1,\ T \cong 6{,}66; \quad \mu = 5,\ T \cong 11{,}60$
15. (a) $x' = y,\ y' = -x + \mu y - \mu y^3/3$
    (b) $0 < \mu < 2$, ponto espiral instável; $\mu \geq 2$, nó instável
    (c) $A \cong 2{,}16,\ T \cong 6{,}65$
    (d) $\mu = 0{,}2,\ A \cong 1{,}99,\ T \cong 6{,}31; \quad \mu = 0{,}5,\ A \cong 2{,}03,\ T \cong 6{,}39;$
    $\mu = 2,\ A \cong 2{,}60,\ T \cong 7{,}65; \quad \mu = 5,\ A \cong 4{,}36,\ T \cong 11{,}60$
16. (b) $x' = \mu x + y, y' = -x + \mu y; \lambda = \mu \pm i$; a origem é um ponto espiral assintoticamente estável para $\mu < 0$ e um ponto espiral instável para $\mu > 0$
    (c) $r' = r(\mu - r^2), \theta' = -1$
17. (a) A origem é um nó assintoticamente estável para $\mu < -2$, um ponto espiral assintoticamente estável para $-2 < \mu < 0$, um ponto espiral instável para $0 < \mu < 2$ e um nó instável para $\mu > 2$.
18. (a, b) $(0, 0)$ é um ponto de sela; $(12, 0)$ é um ponto de sela; $(2, 8)$ é um ponto espiral instável.
19. (a) $(0,0),\ (5a, 0),\ (2, 4a - 1{,}6)$
    (b) $r = -0{,}25 + 0{,}125a \pm 0{,}25\sqrt{220 - 400a + 25a^2}; \quad a_0 = 2$
20. (b) $\lambda = \left[-(5/4 - b) \pm \sqrt{(5/4 - b)^2 - 1}\right]/2$
    (c) $0 < b < 1/4$: nó assintoticamente estável; $1/4 < b < 5/4$: ponto espiral assintoticamente estável; $5/4 < b < 9/4$: ponto espiral instável; $9/4 < b$: nó instável.
    (d) $b_0 = 5/4$
21. (b) $k = 0,\ (1{,}1994,\ -0{,}62426); \quad k = 0{,}5,\ (0{,}80485,\ -0{,}13106)$
    (c) $k_0 \cong 0{,}3465,\ (0{,}95450,\ -0{,}31813)$
    (d) $k = 0{,}4,\ T \cong 11{,}23; \quad k = 0{,}5,\ T \cong 10{,}37; \quad k = 0{,}6,\ T \cong 9{,}93$
    (e) $k_1 \cong 1{,}4035$

Seção 9.8

1. (b) $\lambda = \lambda_1,\ \xi^{(1)} = (0, 0, 1)^T; \quad \lambda = \lambda_2,\ \xi^{(2)} = (20, 9 - \sqrt{81 + 40r}, 0)^T;$
   $\lambda = \lambda_3,\ \xi^{(3)} = (20, 9 + \sqrt{81 + 40r}, 0)^T$
   (c) $\lambda_1 \cong -2{,}6667,\ \xi^{(1)} = (0, 0, 1)^T; \quad \lambda_2 \cong -22{,}8277,\ \xi^{(2)} \cong (20;\ -25{,}6554; 0)^T;$
   $\lambda_3 \cong 11{,}8277,\ \xi^{(3)} \cong (20; 43{,}6554; 0)^T$
2. (c) $\lambda_1 \cong -13{,}8546; \quad \lambda_2, \lambda_3 \cong 0{,}0939556 \pm 10{,}1945i$
5. (a) $dV/dt = -2\sigma[rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2]$
11. (b) $c = \sqrt{0{,}5}: \quad P_1(\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}, \sqrt{2}); \quad \lambda = 0; -0{,}05178 \pm 1{,}5242i$
    $c = 1: \quad P_1 = (0{,}8536; -3{,}4142; 3{,}4142); \quad \lambda = 0{,}1612; -0{,}02882 \pm 2{,}0943i$
    $P_2(0{,}1464; -0{,}5858; 0{,}5858); \quad \lambda = -0{,}5303; -0{,}03665 \pm 1{,}1542i$
12. (a) $P_1(1{,}1954; -4{,}7817; 4{,}7817); \quad \lambda = 0{,}1893; -0{,}02191 \pm 2{,}4007i$
    $P_2(0{,}1046; -0{,}4183; 0{,}4183); \quad \lambda = -0{,}9614; 0{,}007964 \pm 1{,}0652i$
    (d) $T_1 \cong 5{,}9$

13. (a,b,c) $c_1 \cong 1{,}243$
14. (a) $P_1(2{,}9577; -11{,}8310; 11{,}8310)$; $\lambda = 0{,}2273; -0{,}009796 \pm 3{,}5812i$
    $P_2(0{,}04226; -0{,}1690; 0{,}1690)$; $\lambda = -2{,}9053; 0{,}09877 \pm 0{,}9969i$
    (c) $T_2 \cong 11{,}8$
15. (a) $P_1(3{,}7668; -15{,}0673; 15{,}0673)$; $\lambda = 0{,}2324; -0{,}007814 \pm 4{,}0078i$
    $P_2(0{,}03318; -0{,}1327; 0{,}1327)$; $\lambda = -3{,}7335; 0{,}1083 \pm 0{,}9941i$
    (b) $T_4 \cong 23{,}6$

CAPÍTULO 10

Seção 10.1

1. $y = -\operatorname{sen} x$
2. $y = (\cot\sqrt{2}\pi \cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x)/\sqrt{2}$
3. $y = 0$ para todo L; $y = c_2 \operatorname{sen} x$ se $\operatorname{sen} L = 0$
4. $y = -\tan L \cos x + \operatorname{sen} x$ se $\cos L \neq 0$; não solução se $\cos L = 0$
5. Não tem solução
6. $y = (-\pi \operatorname{sen}\sqrt{2}x + x\operatorname{sen}\sqrt{2}\pi)/2\operatorname{sen}\sqrt{2}\pi$
7. Não tem solução
8. $y = c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$
9. $y = c_1 \cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$
10. $y = \frac{1}{2}\cos x$
11. $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2$
12. $y = -\frac{1}{9}x^{-1} + \frac{1}{9}(1 - e^3)x^{-1}\ln x + \frac{1}{9}x^2$
13. Não tem solução
14. $\lambda_n = [(2n-1)/2]^2$, $y_n(x) = \operatorname{sen}[(2n-1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
15. $\lambda_n = [(2n-1)/2]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n-1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
16. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = \cos nx$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
17. $\lambda_n = [(2n-1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n-1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
18. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
19. $\lambda_n = -[(2n-1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
20. $\lambda_n = 1 + (n\pi/\ln L)^2$, $y_n(x) = x\operatorname{sen}(n\pi \ln x/\ln L)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
21. (a) $w(r) = G(R^2 - r^2)/4\mu$ (c) Q é reduzido a 0,3164 de seu valor original
22. (a) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)/24$
    (b) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)/24$
    (c) $y = k(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)/24$

Seção 10.2

1. $T = 2\pi/5$
2. $T = 1$
3. Não é periódica
4. $T = 2L$
5. $T = 1$
6. Não é periódica
7. $T = 2$
8. $T = 4$
9. $f(x) = 2L - x$ em $L < x < 2L$; $f(x) = -2L - x$ em $-3L < x < -2L$
10. $f(x) = x - 1$ em $1 < x < 2$; $f(x) = x - 8$ em $8 < x < 9$
11. $f(x) = -L - x$ em $-L < x < 0$
13. (b) $f(x) = \dfrac{2L}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$
14. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/L]}{2n-1}$
15. (b) $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx}{n}\right]$
16. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$
17. (b) $f(x) = \dfrac{3L}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2L\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2\pi^2} + \frac{(-1)^{n+1}L\operatorname{sen}(n\pi x/L)}{n\pi}\right]$
18. (b) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$
19. (b) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$
20. (b) $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$
21. (b) $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$
22. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{12}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2} + \frac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

23. (b) $f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 5}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

24. (b) $f(x) = \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{162[(-1)^n - 1]}{n^4\pi^4} - \frac{27(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{108(-1)^n + 54}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$

25. (b) $m = 81$

26. (b) $m = 27$

28. $\int_0^x f(t)\,dt$ pode não ser periódica; por exemplo, seja $f(t) = 1 + \cos t$.

Seção 10.3

1. (a) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

2. (a) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$

3. (a) $f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$

4. (a) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

5. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

6. (a) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x + b_n\operatorname{sen} n\pi x)$;
$a_0 = \frac{1}{3}$, $a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}$, $b_n = \begin{cases} -1/n\pi, & n \text{ par} \\ 1/n\pi - 4/n^3\pi^3, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

7. (a) $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx\right]$
(b) $n = 10$; $\max|e| = 1{,}6025$ em $x = \pm\pi$
$n = 20$; $\max|e| = 1{,}5867$ em $x = \pm\pi$
$n = 40$; $\max|e| = 1{,}5788$ em $x = \pm\pi$
(c) Não é possível

8. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos n\pi x$
(b) $n = 10$; $\max|e| = 0{,}02020$ em $x = 0, \pm 1$
$n = 20$; $\max|e| = 0{,}01012$ em $x = 0, \pm 1$
$n = 40$; $\max|e| = 0{,}005065$ em $x = 0, \pm 1$
(c) $n = 21$

9. (a) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} n\pi x$
(b) $n = 10, 20, 40$; $\max|e| = 1$ em $x \pm 1$
(c) Não é possível

10. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6(1-\cos n\pi)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2\cos n\pi}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}\right]$
(b) $n = 10$; $\sup|e| = 1{,}0606$ quando $x \to 2$
$n = 20$; $\sup|e| = 1{,}0304$ quando $x \to 2$
$n = 40$; $\sup|e| = 1{,}0152$ quando $x \to 2$
(c) Não é possível

11. (a) $f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{2 - 2\cos n\pi + n^2\pi^2\cos n\pi}{n^3\pi^3}\operatorname{sen} n\pi x\right]$
(b) $n = 10$; $\sup|e| = 0{,}5193$ quando $x \to 1$
$n = 20$; $\sup|e| = 0{,}5099$ quando $x \to 1$
$n = 40$; $\sup|e| = 0{,}5050$ quando $x \to 1$
(c) Não é possível

12. (a) $f(x) = -\dfrac{12}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen} n\pi x$

(b) $n = 10$: $\max|e| = 0{,}001345$ em $x = \pm 0{,}9735$
$n = 20$: $\max|e| = 0{,}0003534$ em $x = \pm 0{,}9864$
$n = 40$: $\max|e| = 0{,}00009058$ em $x = \pm 0{,}9931$

(c) $n = 4$

13. $y = (\omega \operatorname{sen} nt - n\operatorname{sen}\omega t)/\omega(\omega^2 - n^2), \quad \omega^2 \neq n^2$
$y = (\operatorname{sen} nt - nt\cos nt)/2n^2, \quad \omega^2 = n^2$

14. $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(\omega \operatorname{sen} nt - n\operatorname{sen}\omega t)/\omega(\omega^2 - n^2), \quad \omega \neq 1, 2, 3, \ldots$

$y = \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n\neq m}}^{\infty} b_n(m\operatorname{sen} nt - n\operatorname{sen} mt)/m(m^2 - n^2) + b_m(\operatorname{sen} mt - mt\cos mt)/2m^2, \quad \omega = n$

15. $y = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega^2 - (2n-1)^2}\left[\frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}(2n-1)t - \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right]$

16. $y = \cos\omega t + \dfrac{1}{2\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi t - \cos\omega t}{(2n-1)^2[\omega^2 - (2n-1)^2\pi^2]}$

Seção 10.4

1. Ímpar
2. Nenhuma das duas
3. Ímpar
4. Par
5. Par
6. Nenhuma das duas

14. $f(x) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$f(x) = \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\pi/2) - \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

16. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

17. (a) $f(x) = 1$

18. (a) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

19. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{2n\pi}{3} - 2\cos n\pi\right)\operatorname{sen}\frac{nx}{3}$

20. (a) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}$

21. (a) $f(x) = \dfrac{L}{2} + \dfrac{4L}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$

22. (a) $f(x) = \dfrac{2L}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi x/L)}{n}$

23. (a) $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right]\cos\frac{nx}{2}$

24. (a) $f(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx$

25. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n^2\pi^2(1 + \cos n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{16(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

26. (a) $f(x) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 + 3\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$

27. (b) $g(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{6}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}$

$h(x) = \dfrac{6}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$

28. (b) $g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(n\pi/2) + 2n\pi \operatorname{sen}(n\pi/2) - 4}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{2}$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\operatorname{sen}(n\pi/2) - 2n\pi\cos(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

29. (b) $g(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cos n\pi + 4}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi x}{2}$

$$h(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2(3 + 5\cos n\pi) + 32(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$$

30. (b) $g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2\pi^2(2\cos n\pi - 5) + 324(1 - \cos n\pi)}{n^4\pi^4} \cos\frac{n\pi x}{3}$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4\cos n\pi + 2}{n\pi} + \frac{144\cos n\pi + 180}{n^3\pi^3}\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$$

40. (a) Estenda $f(x)$ antissimetricamente a $(L, 2L)$, ou seja, de modo que $f(2L - x) = -f(x)$ para $0 \le x < L$. Depois, estenda esta função como uma função par a $(-2L, 0)$.

Seção 10.5

1. $xX'' - \lambda X = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
2. $X'' - \lambda xX = 0, \quad T' + \lambda tT = 0$
3. $X'' - \lambda(X' + X) = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
4. $[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
5. Não é separável
6. $X'' + (x + \lambda)X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$
7. $u(x,t) = e^{-400\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x - e^{-2500\pi^2 t}\operatorname{sen} 5\pi x$
8. $u(x,t) = 2e^{-\pi^2 t/16}\operatorname{sen}(\pi x/2) - e^{-\pi^2 t/4}\operatorname{sen}\pi x + 4e^{-\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x$
9. $u(x,t) = \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
10. $u(x,t) = \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
11. $u(x,t) = \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
12. $u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
13. $t = 5, \ n = 16; \quad t = 20, \ n = 8; \quad t = 80, \ n = 4$
14. (d) $t = 673{,}35$
15. (d) $t = 451{,}60$
16. (d) $t = 617{,}17$
17. (b) $t = 5, \ x = 33{,}20; \quad t = 10, \ x = 31{,}13; \quad t = 20, \ x = 28{,}62; \quad t = 40, \ x = 25{,}73;$ $t = 100, \ x = 21{,}95; \quad t = 200, \ x = 20{,}31$
    (e) $t = 524{,}81$
18. $u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n^2\pi^2 a^2 t/400} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{20}$
    (a) 35,91°C (b) 67,23°C (c) 99,96°C
19. (a) 76,73 s (b) 152,56 s (c) 1093,36 s
21. (a) $aw_{xx} - bw_t + (c - b\delta)w = 0$ (b) $\delta = c/b$ se $b \neq 0$
22. $X'' + \mu^2 X = 0, \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$
23. $r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad \Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$

Seção 10.6

1. $u = 10 + \frac{3}{5}x$
2. $u = 30 - \frac{5}{4}x$
3. $u = 0$
4. $u = T$
5. $u = 0$
6. $u = T$
7. $u = T(1 + x)/(1 + L)$
8. $u = T(1 + L - x)/(1 + L)$
9. (a) $u(x,t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{70\cos n\pi + 50}{n\pi} e^{-0.86n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{20}$
    (d) 160,29 s

10. (a) $f(x) = 2x,\ 0 \le x \le 50; \quad f(x) = 200 - 2x,\ 50 < x \le 100$

(b) $u(x,t) = 20 - \dfrac{x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1{,}14n^2\pi^2 t/(100)^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{100},$

$c_n = \dfrac{800}{n^2\pi^2} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{40}{n\pi}$

(d) $u(50,t) \to 10$ quando $t \to \infty$; 3754 s

11. (a) $u(x,t) = 30 - x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/900} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{30},$

$c_n = \dfrac{60}{n^3\pi^3}[2(1 - \cos n\pi) - n^2\pi^2(1 + \cos n\pi)]$

12. (a) $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \dfrac{n\pi x}{L},$

$c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar;} \\ -4/(n^2 - 1)\pi, & n \text{ par} \end{cases}$

(b) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2/\pi$

13. (a) $u(x,t) = \dfrac{200}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/6400} \cos \dfrac{n\pi x}{40},$

$c_n = -\dfrac{160}{3n^2\pi^2}(3 + \cos n\pi)$

(c) 200/9

(d) 1543 s

14. (a) $u(x,t) = \dfrac{25}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/900} \cos \dfrac{n\pi x}{30},$

$c_n = \dfrac{50}{n\pi}\left(\operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{3} - \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{6}\right)$

15. (b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4L^2} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2L},$

$c_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx$

16. (a) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/3600} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{60},$

$c_n = \dfrac{120}{(2n-1)^2\pi^2}[2\cos n\pi + (2n-1)\pi]$

(c) x_m aumenta a partir de $x = 0$ e chega a $x = 30$ quando $t = 104{,}4$.

17. (a) $u(x,t) = 40 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/3600} \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi x}{60},$

$c_n = \dfrac{40}{(2n-1)^2\pi^2}[6\cos n\pi - (2n-1)\pi]$

19. $u(x) = \begin{cases} T\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{\xi}{\xi + (L/a) - 1}\right], & 0 \le x \le a, \\ T\left[1 - \dfrac{L-x}{a}\dfrac{1}{\xi + (L/a) - 1}\right], & a \le x \le L, \end{cases}$ onde $\xi = \kappa_2 A_2/\kappa_1 A_1$

20. (e) $u_n(x,t) = e^{-\mu_n^2\alpha^2 t} \operatorname{sen} \mu_n x$

21. $\alpha^2 v'' + s(x) = 0; \qquad v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2$

$w_t = \alpha^2 w_{xx}; \qquad w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad w(x,0) = f(x) - v(x)$

22. (a) $v(x) = T_1 + (T_2 - T_1)(x/L) + kLx/2 - kx^2/2$

(b) $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{20}, \qquad c_n = \dfrac{160\,(\cos n\pi - 1)}{n^3\pi^3}$

23. (a) $v(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L + kLx/6 - kx^3/6L$

(b) $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{20},$

$c_n = \dfrac{20}{3}\left[\dfrac{3m^3\pi^3(3\cos m\pi - 1) + 60\cos m\pi}{m^4\pi^4}\right]$

Seção 10.7

1. (a) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi at}{L}$

2. (a) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4}+\operatorname{sen}\dfrac{3n\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi at}{L}$

3. (a) $u(x,t) = \dfrac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+\cos n\pi}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi at}{L}$

4. (a) $u(x,t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\cos\dfrac{n\pi at}{L}$

5. (a) $u(x,t) = \dfrac{8L}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{L}$

6. (a) $u(x,t) = \dfrac{8L}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/4)+\operatorname{sen}(3n\pi/4)}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{L}$

7. (a) $u(x,t) = \dfrac{32L}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\pi+2}{n^4}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{L}$

8. (a) $u(x,t) = \dfrac{4L}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi at}{L}$

9. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\dfrac{(2n-1)\pi at}{2L}$,
$c_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx$

10. (a) $u(x,t) = \dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi}{4}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi}{2L}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\dfrac{(2n-1)\pi at}{2L}$

11. (a) $u(x,t) = \dfrac{512}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)\pi+3\cos n\pi}{(2n-1)^4}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}\cos\dfrac{(2n-1)\pi at}{2L}$

14. (b) $\phi(x+at)$ representa uma onda movendo-se no sentido negativo de x com velocidade $a>0$.

15. (a) 248 ft/s (b) $49{,}6\pi n$ rad/s (c) As frequências aumentam; os modos permanecem inalterados.

21. $r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - \mu^2)R = 0$, $\Theta'' + \mu^2\Theta = 0$, $T'' + \lambda^2a^2T = 0$

23. (b) $a_n = a\sqrt{1+(\gamma^2L^2/n^2\pi^2)}$ (c) $\gamma = 0$

24. (a) $c_n = \dfrac{20}{n^2\pi^2}\left(2\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{2n\pi}{5} - \operatorname{sen}\dfrac{3n\pi}{5}\right)$

Seção 10.8

1. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$, $c_n = \dfrac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

(b) $u(x,y) = \dfrac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$

2. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi(b-y)}{a}$, $c_n = \dfrac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

3. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(1)}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty}c_n^{(2)}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi(b-y)}{a}$,
$c_n^{(1)} = \dfrac{2/b}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\int_0^b f(y)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$, $c_n^{(2)} = \dfrac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

(b) $c_n^{(1)} = \dfrac{2}{n\pi\operatorname{senh}(n\pi a/b)}$, $c_n^{(2)} = -\dfrac{2}{n^3\pi^3}\dfrac{(n^2\pi^2-2)\cos n\pi+2}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}$

5. $u(r,\theta) = \dfrac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}(c_n\cos n\theta + k_n\operatorname{sen}n\theta)$;
$c_n = \dfrac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$, $k_n = \dfrac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\operatorname{sen}n\theta\,d\theta$

6. (a) $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^n \operatorname{sen} n\theta,\quad c_n=\dfrac{2}{\pi a^n}\displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

   (b) $c_n=\dfrac{4}{\pi a^n}\dfrac{1-\cos n\pi}{n^3}$

7. $u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n r^{n\pi/\alpha}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi\theta}{\alpha},\quad c_n=(2/\alpha)a^{-n\pi/\alpha}\displaystyle\int_0^{\alpha} f(\theta)\operatorname{sen}\frac{n\pi\theta}{\alpha}\,d\theta$

8. (a) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-n\pi y/a}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a},\quad c_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^{a} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$

   (b) $c_n=\dfrac{4a^2}{n^3\pi^3}(1-\cos n\pi)$ (c) $y_0\cong 6{,}6315$

10. (b) $u(x,y)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cosh\dfrac{n\pi x}{b}\cos\dfrac{n\pi y}{b},\quad c_n=\dfrac{2/n\pi}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^{b} f(y)\cos\frac{n\pi y}{b}\,dy$

11. $u(r,\theta)=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n(c_n\cos n\theta+k_n\operatorname{sen} n\theta)$,

    $c_n=\dfrac{1}{n\pi a^{n-1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos n\theta\,d\theta,\quad k_n=\frac{1}{n\pi a^{n-1}}\int_0^{2\pi} g(\theta)\operatorname{sen} n\theta\,d\theta$;

    a condição necessária é $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(\theta)\,d\theta=0$.

12. (a) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\cosh\dfrac{n\pi y}{a},\quad c_n=\dfrac{2/a}{\cosh(n\pi b/a)}\displaystyle\int_0^{a} g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$

    (b) $c_n=\dfrac{4a\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2\cosh(n\pi b/a)}$

13. (a) $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\operatorname{senh}\dfrac{(2n-1)\pi x}{2b}\operatorname{sen}\dfrac{(2n-1)\pi y}{2b}$,

    $c_n=\dfrac{2/b}{\operatorname{senh}[(2n-1)\pi a/2b]}\displaystyle\int_0^{b} f(y)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi y}{2b}\,dy$

    (b) $c_n=\dfrac{32b^2}{(2n-1)^3\pi^3\operatorname{senh}[(2n-1)\pi a/2b]}$

14. (a) $u(x,y)=\dfrac{c_0 y}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$,

    $c_0=\dfrac{2}{ab}\displaystyle\int_0^{a} g(x)\,dx,\quad c_n=\frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^{a} g(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$

    (b) $c_0=\dfrac{2}{b}\left(1+\dfrac{a^4}{30}\right),\quad c_n=-\dfrac{24a^4(1+\cos n\pi)}{n^4\pi^4\operatorname{senh}(n\pi b/a)}$

16. (a) $u(x,z)=b+\dfrac{\alpha a}{2}-\dfrac{4\alpha a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/a]\cosh[(2n-1)\pi z/a]}{(2n-1)^2\cosh[(2n-1)\pi b/a]}$

CAPÍTULO 11

Seção 11.1

1. Homogênea
2. Não homogênea
3. Não homogênea
4. Homogênea
5. Não homogênea
6. Homogênea
7. (a) $\phi_n(x)=\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda}=-\tan\sqrt{\lambda}\,\pi$; (b) Não
   (c) $\lambda_1\cong 0{,}6204,\quad \lambda_2\cong 2{,}7943$
   (d) $\lambda_n\cong(2n-1)^2/4$ para n grande
8. (a) $\phi_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda}=\cot\sqrt{\lambda}$; (b) Não
   (c) $\lambda_1\cong 0{,}7402,\quad \lambda_2\cong 11{,}7349$
   (d) $\lambda_n\cong(n-1)^2\pi^2$ para n grande
9. (a) $\phi_n(x)=\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x+\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $(\lambda-1)\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}-2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}=0$; (b) Não
   (c) $\lambda_1\cong 1{,}7071,\quad \lambda_2\cong 13{,}4924$
   (d) $\lambda_n\cong(n-1)^2\pi^2$ para n grande
10. (a) Para $n=1,2,3,\ldots,\phi_n(x)=\operatorname{sen}\mu_n x-\mu_n\cos\mu_n x$ e $\lambda_n=-\mu_n^2$, onde μ_n satisfaz $\mu=\tan\mu$.
    (b) Sim; $\lambda_0=0,\phi_0(x)=1-x$

(c) $\lambda_1 \cong -20{,}1907, \quad \lambda_2 \cong -59{,}6795$

(d) $\lambda_n \cong -(2n+1)^2\pi^2/4$ para n grande

12. $\mu(x) = e^{-x^2}$
13. $\mu(x) = 1/x$
14. $\mu(x) = e^{-x}$
15. $\mu(x) = (1-x^2)^{-1/2}$
16. $X'' + \lambda X = 0, \quad T''' + cT' + (k + \lambda a^2)T = 0$
17. (a) $s(x) = e^x$ (b) $\lambda_n = n^2\pi^2, \quad \phi_n(x) = e^x \operatorname{sen} n\pi x; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
18. Os autovalores positivos são $\lambda = \lambda_n$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda} = (\frac{2}{3})\tan(3\sqrt{\lambda}L)$; as autofunções associadas são $\phi_n(x) = e^{-2x}\operatorname{sen}(3\sqrt{\lambda_n}x)$. Se $L = \frac{1}{2}$, $\lambda_0 = 0$ é um autovalor com autofunção associada $\phi_0(x) = xe^{-2x}$; se $L \neq \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$ não é autovalor. Se $L \leq \frac{1}{2}$, não existem autovalores negativos; se $L > \frac{1}{2}$, existe um autovalor negativo $\lambda = -\mu^2$, onde μ é uma raiz de $\mu = (\frac{2}{3})\tanh(3\mu L)$; a autofunção associada é $\phi_{-1}(x) = e^{-2x}\operatorname{senh}(3\mu x)$.
19. Não tem autovalores reais.
20. O único autovalor é $\lambda = 0$; a autofunção associada é $\phi(x) = x - 1$.
21. (a) $2\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$

(c) $\lambda_1 \cong 18{,}2738, \quad \lambda_2 \cong 57{,}7075$

(d) $2\operatorname{senh}\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\cosh\sqrt{\mu} = 0, \quad \mu = -\lambda$

(e) $\lambda_{-1} \cong -3{,}6673$

24. (a) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $\operatorname{sen}\mu L \operatorname{senh}\mu L = 0$, logo $\lambda_n = (n\pi/L)^4$; $\lambda_1 \cong 97{,}409/L^4, \quad \lambda_2 \cong 1558{,}5/L^4, \quad \phi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$

(b) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $\operatorname{sen}\mu L \cosh\mu L - \cos\mu L \operatorname{senh}\mu L = 0$; $\lambda_1 \cong 237{,}72/L^4, \quad \lambda_2 \cong 2496{,}5/L^4, \quad \phi_n = \dfrac{\operatorname{sen}\mu_n x \operatorname{senh}\mu_n L - \operatorname{sen}\mu_n L \operatorname{senh}\mu_n x}{\operatorname{senh}\mu_n L}$

(c) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $1 + \cosh\mu L \cos\mu L = 0$: $\lambda_1 \cong 12{,}362/L^4$, $\lambda_2 \cong 485{,}52/L^4$

$$\phi_n(x) = \frac{[(\operatorname{sen}\mu_n x - \operatorname{senh}\mu_n x)(\cos\mu_n L + \cosh\mu_n L) + (\operatorname{sen}\mu_n L + \operatorname{senh}\mu_n L)(\cosh\mu_n x - \cos\mu_n x)]}{\cos\mu_n L + \cosh\mu_n L}$$

25. (c) $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}x$, onde λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n}L - \gamma\sqrt{\lambda_n}L\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}L = 0$

(d) $\lambda_1 \cong 1{,}1597/L^2, \quad \lambda_2 \cong 13{,}276/L^2$

Seção 11.2

1. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x; \quad n = 1, 2, \ldots$
2. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n - \frac{1}{2})\pi x; \quad n = 1, 2, \ldots$
3. $\phi_0(x) = 1, \quad \phi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x; \quad n = 1, 2, \ldots$
4. $\phi_n(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}x}{(1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$, onde λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$
5. $\phi_n(x) = \sqrt{2}e^x \operatorname{sen} n\pi x; \quad n = 1, 2, \ldots$
6. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}; \quad n = 1, 2, \ldots$
7. $a_n = \dfrac{4\sqrt{2}(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}; \quad n = 1, 2, \ldots$
8. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}\{1 - \cos[(2n-1)\pi/4]\}; \quad n = 1, 2, \ldots$
9. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})(\pi/2)}{(n - \frac{1}{2})^2\pi^2}; \quad n = 1, 2, \ldots$

Nos Problemas de 10 a 13, $\alpha_n = (1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}$ e $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$.

10. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}\alpha_n}; \quad n = 1, 2, \ldots$
11. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)}{\lambda_n\alpha_n}; \quad n = 1, 2, \ldots$
12. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(1 - \cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n\alpha_n}; \quad n = 1, 2, \ldots$
13. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}/2)}{\sqrt{\lambda_n}\alpha_n}; \quad n = 1, 2, \ldots$
14. Não é autoadjunto.
15. Autoadjunto.
16. Não é autoadjunto.
17. Autoadjunto.
18. Autoadjunto.
21. (a) Se $a_2 = 0$ ou $b_2 = 0$, não existe o termo de fronteira correspondente.
25. (a) $\lambda_1 = \pi^2/L^2; \quad \phi_1(x) = \operatorname{sen}(\pi x/L)$

(b) $\lambda_1 \cong (4{,}4934)^2/L^2; \quad \phi_1(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_1}x - \sqrt{\lambda_1}x\cos\sqrt{\lambda_1}L$

(c) $\lambda_1 = (2\pi)^2/L^2; \quad \phi_1(x) = 1 - \cos(2\pi x/L)$

26. $\lambda_1 = \pi^2/4L^2; \quad \phi_1(x) = 1 - \cos(\pi x/2L)$

27. (a) $X'' - (v/D)X' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) = 0; \qquad T' + \lambda DT = 0$

(e) $c(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n Dt} e^{vx/2D} \operatorname{sen} \mu_n x$, onde $\lambda_n = \mu_n^2 + (v^2/4D^2)$;

$$a_n = \frac{4D\mu_n^2 \int_0^L e^{-vx/2D} f(x) \operatorname{sen} \mu_n x \, dx}{(2LD\mu_n^2 + v \operatorname{sen}^2 \mu_n L)}$$

28. (a) $u_t + vu_x = Du_{xx}, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad u(x,0) = -c_0$

(b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n Dt} e^{vx/2D} \operatorname{sen} \mu_n x$, onde $\lambda_n = \mu_n^2 + (v^2/4D^2)$;

$$b_n = \frac{8c_0 D^2 \mu^2 (2D\mu_n e^{-vL/2D} \cos \mu_n L + v e^{-vL/2D} \operatorname{sen} \mu_n L - 2D\mu_n)}{(v^2 + 4D^2\mu_n^2)(2LD\mu_n^2 + v \operatorname{sen}^2 \mu_n L)}$$

Seção 11.3

1. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} \operatorname{sen} n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n\pi}$

2. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x}{[(n - \frac{1}{2})^2\pi^2 - 2](n - \frac{1}{2})^2\pi^2}$

3. $y = -\dfrac{1}{4} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(2n-1)\pi x}{[(2n-1)^2\pi^2 - 2](2n-1)^2\pi^2}$

4. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)\cos\sqrt{\lambda_n} x}{\lambda_n(\lambda_n - 2)(1 - \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})}$

5. $y = 8\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2) \operatorname{sen} n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n^2\pi^2}$

6–9. Para cada problema, a solução é

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} \phi_n(x), \qquad c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad \mu \neq \lambda_n,$$

onde $\phi_n(x)$ é dada nos Problemas de 1 a 4, respectivamente, da Seção 11.2, e λ_n é o autovalor associado. No Problema 8, o somatório começa em $n = 0$.

10. $a = -\dfrac{1}{2}, \quad y = \dfrac{1}{2\pi^2}\cos\pi x + \dfrac{1}{\pi^2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + c \operatorname{sen}\pi x$

11. Não tem solução

12. a arbitrário, $y = c\cos\pi x + a/\pi^2$

13. $a = 0, \quad y = c\operatorname{sen}\pi x - (x/2\pi)\operatorname{sen}\pi x$

17. $v(x) = a - (b - a)x$

18. $v(x) = 1 - \frac{3}{2}x$

19. $u(x,t) = \sqrt{2}\left[-\dfrac{4c_1}{\pi^2} + \left(\dfrac{4c_1}{\pi^2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\pi^2 t/4}\right]\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2}$

$$- \sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4c_n}{(2n-1)^2\pi^2}[1 - e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t}]\operatorname{sen}(n - \tfrac{1}{2})\pi x, \quad c_n = \frac{4\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

20. $u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{c_n}{\lambda_n - 1}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}) + \alpha_n e^{-\lambda_n t}\right]\dfrac{\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{(1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}},$

$$c_n = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}(1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}, \quad \alpha_n = \frac{\sqrt{2}(1 - \cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n(1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}.$$

e λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$.

21. $u(x,t) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^4\pi^4}(1 - e^{-n^2\pi^2 t})\operatorname{sen} n\pi x$

22. $u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n(e^{-t} - e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t})\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x}{(n - \frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}, \quad c_n = \dfrac{2\sqrt{2}(2n-1)\pi + 4\sqrt{2}(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2}$

23. (a) $r(x)w_t = [p(x)w_x]_x - q(x)w, \quad w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad w(x,0) = f(x) - v(x)$

24. $u(x,t) = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

25. $u(x,t) = -\cos\pi x + e^{-9\pi^2 t/4}\cos(3\pi x/2)$

31–34. Em todos os casos a solução é $y = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds$, onde $G(x,s)$ é dado a seguir.

31. $G(x,s) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le s \le x \\ 1-s, & x \le s \le 1 \end{cases}$

32. $G(x,s) = \begin{cases} s(2-x)/2, & 0 \le s \le x \\ x(2-s)/2, & x \le s \le 1 \end{cases}$

33. $G(x,s) = \begin{cases} \cos s \operatorname{sen}(1-x)/\cos 1, & 0 \le s \le x \\ \operatorname{sen}(1-s)\cos x/\cos 1, & x \le s \le 1 \end{cases}$

34. $G(x,s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le x \\ x, & x \le s \le 1 \end{cases}$

Seção 11.4

1. $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_0(\sqrt{\lambda_n}x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx,$

   $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$.

2. (c) $y = -\frac{c_0}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_0(\sqrt{\lambda_n}x);$

   $c_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx; \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx, \ n = 1,2,\ldots;$

   $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $J_0'(\sqrt{\lambda}) = 0$.

3. (d) $a_n = \int_0^1 xJ_k(\sqrt{\lambda_n}x)f(x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$

   (e) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_k(\sqrt{\lambda_n}x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_k(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$

4. (b) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu} P_{2n-1}(x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)P_{2n-1}(x)\,dx \Big/ \int_0^1 P_{2n-1}^2(x)\,dx$

Seção 11.5

1. (b) $u(\xi,2) = f(\xi+1), \quad u(\xi,0) = 0, \quad 0 \le \xi \le 2$
   $u(0,\eta) = u(2,\eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 2$

2. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n J_0(\lambda_n r)\operatorname{sen}\lambda_n at, \quad k_n = \frac{1}{\lambda_n a}\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)g(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$

3. Superponha a solução do Problema 2 e a do exemplo [Eq. (21)] no texto.

6. $u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z}J_0(\lambda_n r), \quad c_n = \int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)f(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr,$

   e λ_n satisfaz $J_0(\lambda) = 0$.

7. (b) $v(r,\theta) = \frac{1}{2}c_0J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)(b_m \operatorname{sen} m\theta + c_m \cos m\theta),$

   $b_m = \frac{1}{\pi J_m(kc)}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} m\theta\,d\theta; \quad m = 1,2,\ldots$

   $c_m = \frac{1}{\pi J_m(kc)}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta\,d\theta; \quad m = 0,1,2,\ldots$

8. $c_n = \int_0^1 rf(r)J_0(\lambda_n r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$

10. $u(\rho,s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(s)$, onde $c_n = \int_{-1}^1 f(\arccos s)P_n(s)\,ds \Big/ \int_{-1}^1 P_n^2(s)\,ds;$

    P_n é o n-ésimo polinômio de Legendre e $s = \cos\phi$.

Seção 11.6

1. $n = 21$ 2. (a) $b_m = (-1)^{m+1}\sqrt{2}/m\pi$ (c) $n = 20$
3. (a) $b_m = 2\sqrt{2}(1 - \cos m\pi)/m^3\pi^3$ (c) $n = 1$
7. (a) $f_0(x) = 1$ (b) $f_1(x) = \sqrt{3}(1-2x)$ (c) $f_2(x) = \sqrt{5}(-1 + 6x - 6x^2)$
   (d) $g_0(x) = 1, \quad g_1(x) = 2x - 1, \quad g_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$
8. $P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = (3x^2-1)/2, \quad P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$